OSCILACOẼS AMORTECIDAS E FORÇADAS

1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL

2. OSCILADOR AMORTECIDO

- 2.1 - ANÁLISE DAS SOLUÇÕES
- 2.2 - BALANÇO DE ENERGIA
- 2.3 - CONCLUSÕES FINAIS

3. OSCILAÇÕES FORÇADAS

- 3.1 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL
- 3.2 - SOLUÇÃO ESTACIONARIA
- 3.3 - ANÁLISE DA SOLUÇÃO
- 3.4 - BALANÇO DE ENERGIA

Vamos considerar a oscilação de um corpo ligado à uma mola de uma maneira mais realista, sob a ação de uma força de dissipação e também de uma força externa periódica.

Exemplos:

- criança em um balanço, sendo empurrada por um adulto,

- circuito RLC, alimentado por um gerador de tensão AC.

- um edifício sacudido por um terremoto.

- o amortecedor de um carro trafegando por um piso irregular

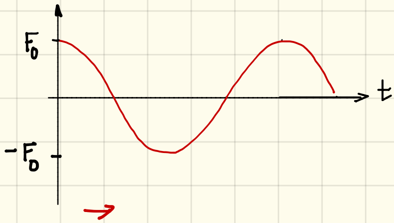
No movimento de um pêndulo ou de um bloco suspenso por uma mola a principal contribuição para o amortecimento da oscilação é a resistência do ar.
Essa força é proporcional á velocidade do corpo e sentido inverso;

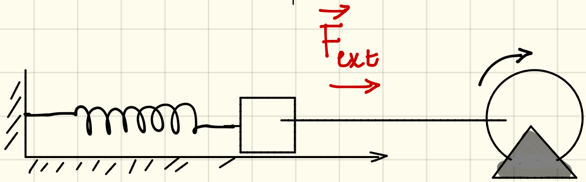
$$F_{diss} = -b\,\frac{dx}{dt}$$

$b > 0$, e depende do meio (ar, líquido...) e da geometria do corpo.
unidades: $N.s/m$

Além dessa força vamos considerar uma força externa periódica com frequência angular ω.

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t$$





1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL

O balanço de forças se traduz pela equação:

$$\vec{F}_{RES} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_{ext}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

dividindo por m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma\frac{dx}{dt} + F(t)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_0^2 &= k/m \\ \gamma &= b/m \end{aligned}}$$

$\gamma \rightarrow$ unidades s^{-1}

Essa equação diferencial agora envolve a primeira derivada de $x(t)$ mas continua sendo linear.

Vamos usar a notação complexa e considerar uma função complexa $z(t)$:

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[z(t)\right]$$

e $z(t)$ obedece a eq. diferencial:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega_0^2 z - \gamma \frac{dz}{dt} + F(t) \qquad (1)$$

2. OSCILADOR AMORTECIDO

Em primeiro lugar vamos analisar a situação em que a força externa é nula.

Na equação 1 $\rightarrow F(t) = 0$ $\qquad \dfrac{d^2 z}{dt^2} = -\omega_0^2 z - \gamma \dfrac{dz}{dt}$

ω_0 = frequência angular natural do oscilador

Solução tentativa: $z(t) = e^{\lambda t}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lambda e^{\lambda t} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{substituindo na eq. diferencial}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega_0^2 e^{\lambda t} - \gamma \lambda e^{\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\left[\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2\right] = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Para que $z = e^{\lambda t}$ seja solução da equação diferencial λ deve satisfazer a equação de 2º grau:

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Existem diferentes soluções que correspondem à diferentes tipos de movimento.

Se $\quad \frac{\gamma}{2} \geq \omega_0 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \rightarrow$ Real

$\frac{\gamma}{2} < \omega_0 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \rightarrow$ Imaginário

Cada uma dessas situações resulta em soluções e movimentos difrentes.

Vamos analisar separadamente cada uma dessas situações.

2.1. Análise das Soluções

i) $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$

Definimos: $\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

Assim: $\lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-1}\,\omega$

$$\lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega$$

Solução geral da equação diferencial: combinação linear das duas soluções:

$$z(t) = Ae^{\left(-\frac{\gamma}{2} + i\omega\right)t} + Be^{\left[-\frac{\gamma}{2} - i\omega\right]t}$$

$$z(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left[Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right]$$

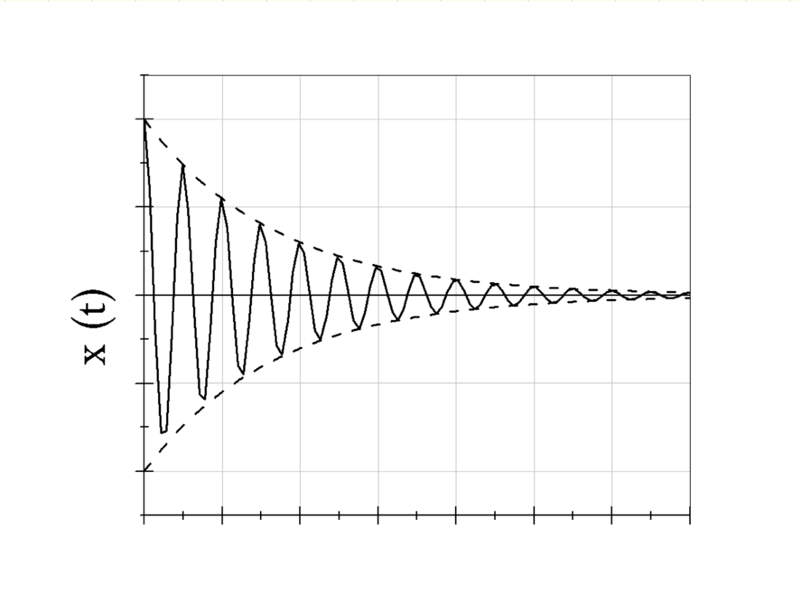
Tomando a parte real: $x(t) = \mathrm{Re}[z(t)]$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left[A\cos\omega t + B\cos\omega t\right]$$

A soma de dois cossenos de mesma frequência angular ainda é uma função cosseno c/ a mesma frequência angular. Essa expressão pode ser escrita de maneira equivalente:

$$\boxed{x(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \phi)}$$

A e ϕ são duas constantes ajustáveis de acordo com as condições iniciais.



oscilação periódica

amplitude que varia no tempo $a(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}}$

É importante notar que a frequência angular da oscilação é ω:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

A frequência angular da oscilação ω é menor que a frequência natural ω_0.

Em resumo:

Para $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ → Amortecimento fraco

Solução → $x(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \phi)$

- O movimento é periódico com frequencia $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$
- A amplitude que decai com o tempo → $a(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}}$

ii) $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$

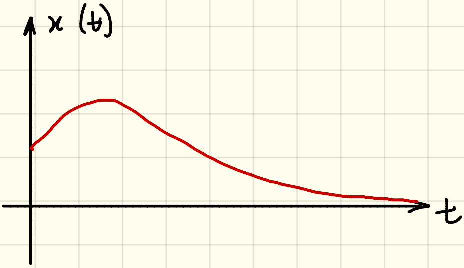
Definimos $\boxed{\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}}$ → Real $\qquad \lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \beta$

Solução Geral: $x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}$

$$x(t) = A e^{\left[-\frac{\gamma}{2}+\beta\right]t} + B e^{\left[-\frac{\gamma}{2}-\beta\right]t}$$

como $\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$ $\quad \beta < \frac{\gamma}{2}$

$x(t)$ é a soma de duas exponenciais decrescentes



Não há movimento periódico. O corpo retorna a posição de equilíbrio.

Para $\frac{\gamma}{2} > \omega_0 \longrightarrow$ o amortecimento é super crítico.

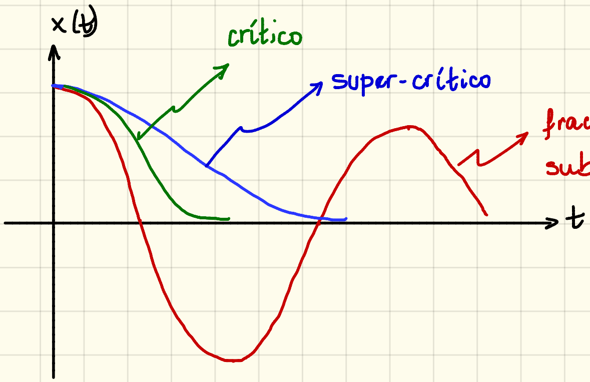
iii) $\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \longrightarrow$ amortecimento crítico.

A solução geral é a solução para $\beta = 0 \rightarrow e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ mais a solução para $\beta > 0$, tomando o caso particular em que $\beta \rightarrow 0$.

Essa solução é dada por: $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}[A + Bt]$

Nesse caso também não há movimento periódico. O corpo apenas retorna à posição de equilíbrio.

Essa solução decai mais rapidamente do que a solução com amortecimento super crítico, ou seja o corpo leva menos tempo para retornar à posição de equilíbrio.

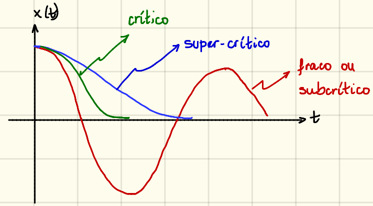


EQUAÇÃO DIFERENCIAL: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma \frac{dx}{dt}$ $\qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\qquad \gamma = \frac{b}{m}$

SOLUÇÕES

Condição	Solução da Equação Diferencial	Amortecimento	Movimento
$\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$	$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi)$	fraco ou subcrítico	Periódico c/ frequência angular ω e amplitude decrescente
$\omega_0 < \frac{\gamma}{2}$	$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t})$	super-crítico	retorno à posição de equilíbrio
$\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$	$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$	crítico	retorno à posição de equilíbrio

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \qquad\qquad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$



2.2. BALANÇO DE ENERGIA

$$\begin{matrix}\text{Energia} \\ \text{Mecânica}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Energia} \\ \text{Cinética}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Energia} \\ \text{Potencial}\end{matrix}$$

$$E(t) = K(t) + U(t)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2(t) \qquad K(t) = \frac{1}{2} m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Vamos analisar o caso do amortecimento <u>sub-crítico.</u>

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\gamma}{2} A e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega t + \phi) - \omega A e^{-\frac{\gamma}{2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} k A^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} m \Big[\frac{\gamma^2}{4} A^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$+ \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) + A^2 \omega \gamma e^{-\gamma t} \underbrace{\operatorname{sen}(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi)}_{2 \operatorname{sen} 2(\omega t + \phi)} \Big]$$

Como a amplitude decai com o tempo, a energia mecânica também vai diminuindo.

Sabemos também que em cada ciclo a energia muda de forma do potencial para cinética e vice-versa.

Vamos então determinar o valor médio da energia por ciclo, isto é no intervalo de tempo de um período, e como ela varia de um período para outro.

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E(t')dt'$$

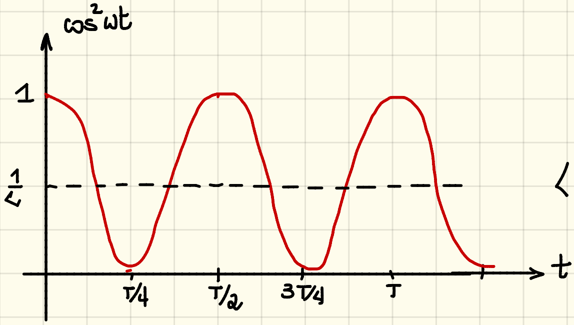
$$\bar{E}(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} K(t')dt' + \frac{1}{T}\int_t^{t+T} U(t')dt'$$

$$\bar{U}(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} U(t')\,dt' = \frac{1}{T}\frac{kA^2}{2}\int_t^{t+T} e^{-\gamma t'}\cos^2(\omega t'+\phi)dt'$$

No intervalo de tempo de um período a função $\cos^2(\omega t'+\phi)$ varia mais rapidamente do que a função $e^{-\gamma t}$, então podemos escrever a integral como:

$$\bar{U}(t) = \frac{1}{T}\frac{kA^2}{2}\left(e^{-\gamma t}\right)\int_t^{t+T}\cos^2(\omega t'+\phi)\,dt'$$

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\cos^2(\omega t'+\phi)dt' = \langle\cos^2(\omega t+\phi)\rangle_T \Rightarrow$$ Valor médio de $\cos^2 \omega t$ em 1 período



$$\langle \cos^2(\omega t)\rangle_T = 1$$

$$\bar{U}(t) = \frac{1}{2} k A^2 \left[\frac{1}{2}\right] e^{-\gamma t}$$

Para o cálculo de $\bar{K}(t)$ podemos usar o mesmo argumento e escrevemos:

$$K(t) = \frac{1}{2} m \left[\frac{\gamma^2}{4} A^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega t + \phi) + \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + 2 A^2 \omega \gamma e^{-\gamma t} \operatorname{sen} 2(\omega t + \phi) \right]$$

$$\bar{K}(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t} \left[\frac{\gamma^2}{4} \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \phi)\rangle_T}_{1/2} + \omega^2 \underbrace{\langle \sin^2(\omega t + \phi)\rangle_T}_{1/2} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} m \frac{\gamma^2}{4} e^{-\gamma t} \underbrace{\langle \sin 2(\omega t + \phi)\rangle_T}_{0} \right]$$

$$\bar{K}(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t} \left(\frac{1}{2}\right) \left[\underbrace{\frac{\gamma^2}{4} + \omega^2}_{\omega_0^2} \right] \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

$$\bar{K}(t) = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t}$$

Voltando à expressão de $\bar{E}(t)$

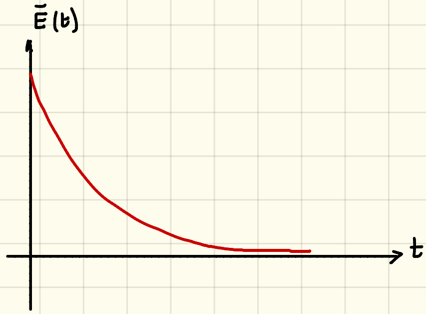
$$\bar{E}(t) = \frac{1}{4} kA^2 e^{-\gamma t} + \frac{1}{4} mA^2\omega_0^2 e^{-\gamma t}$$

Lembrando que $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \bar{E}(t) = \frac{1}{4} A^2 e^{-\gamma t}\left[k + m\frac{k}{m}\right] \Rightarrow$

$\bar{E}(t) = \frac{1}{2} kA^2 e^{-\gamma t} \Rightarrow$ E_0 = Energia mecânica inicial $= \frac{1}{2} kA^2$

$$\boxed{\bar{E}(t) = E_0 e^{-\gamma t}}$$

O gráfico ao lado mostra que o valor médio da Energia mecânica do oscilador decai com o tempo exponencialmente, com constante de decaimento $\gamma = b/m$.



2.3. Conclusões finais

Em uma oscilação livre o oscilador recebe uma energia inicial ao ser deslocado da posição de equilíbrio e passa a oscilar com sua frequência natural ω_0.

Massa mola $\rightarrow$ $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ Pêndulo $\rightarrow$ $\omega_0 = \sqrt{\ell/g}$

Quando existe uma força dissipativa fraca, o movimento ainda é com frequência de oscilação ω ligeiramente menor que ω_0;

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \qquad \text{com} \quad \frac{\gamma}{2} < \omega_0$$

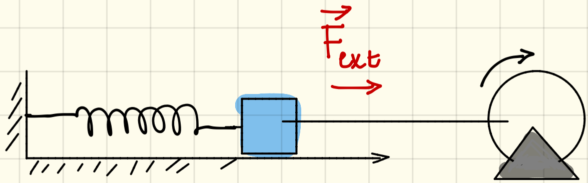
e a amplitude do movimento diminui com o tempo até que o movimento cessa e o oscilador atinge o estado de equilíbrio.

Se o fator de amortecimento γ é tal que $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ então o oscilador retorna a posição de equilíbrio diretamente sem oscilar.

3 - OSCILAÇÕES FORÇADAS

Vamos estudar o movimento de um oscilador quando ele está submetido à uma força externa e periódica.

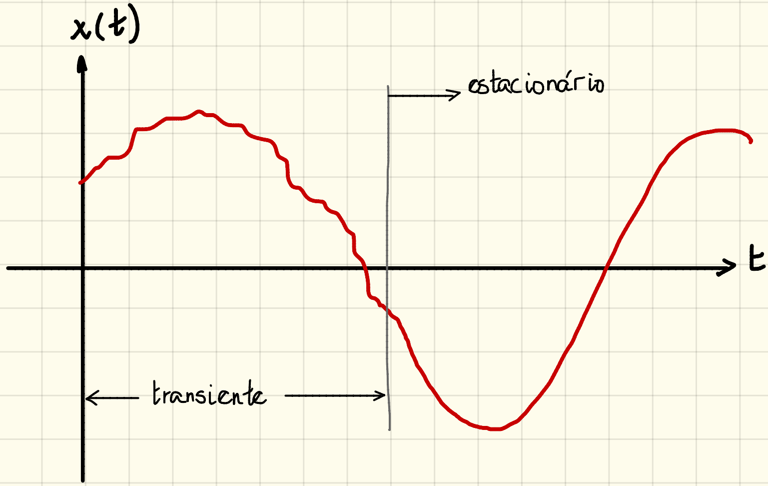
$\vec{F}_{EXT} = F_0 \cos(\omega t)$



Embora exista uma força dissipativa, a força externa realiza trabalho e a energia mecânica do oscilador é suprida com essa energia externa.

Quando o sistema está inicialmente em repouso e a força externa periódica é ligada o movimento que se segue durante um certo intervalo de tempo não é um movimento periódico, e depende das condições iniciais.

Esse movimento é transitório e tende a desapacer e ser substituído por um movimento periódico que tem a mesma frequência angular da força externa.



Vamos analisar esse movimento periódico que se estabelece, que é chamado de regime estacionário.

3.1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Considerando uma forca dissipativa

$$F_{DISS} = -bv \qquad b > 0$$

além da força externa, o balanço de forças é dado por:

$$\vec{F}_{RES} = -kx - bv + F(t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos wt$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -w_0^2 x - \gamma\frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m}\cos wt} \qquad \boxed{\begin{array}{c} w_0^2 = k/m \\ \gamma = b/m \end{array}}$$

A solução geral dessa equação é a soma do movimento transiente e do movimento periódico que tem a frequência da força externa.

$$\underset{\text{Geral}}{\text{Solução}} = \text{transiente} + \text{estacionário}.$$

Como o movimento transiente desaparece e o movimento que persiste é o movimento periódico, do regime estacionário vamos analisar a solução da equação diferencial que corresponde à esse regime.

ou seja $x(t)$ deve ser uma função do tipo:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

3.2. SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA

Usando a notação complexa podemos escrever a equação diferencial para uma função $z(t)$:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z + \gamma \frac{dz}{dt} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Buscamos uma solução tal que:

$$x(t) = Re[z(t)] \implies z(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Vamos então substituir $z(t)$, dz/dt e d^2z/dt^2 na equação diferencial para verificar se essa função é solução e sob quais condições.

$$\frac{dz}{dt} = i\omega A \, e^{i(\omega t+\varphi)} = i\omega z(t)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (i\omega)^2 A \, e^{i(\omega t+\varphi)} = -\omega^2 A \, e^{i(\omega t+\varphi)} = -\omega^2 z(t)$$

Substituindo na equação diferencial:

$$-\omega^2 z(t) + \omega_0^2 z(t) + \gamma i\omega z(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$A \cancel{e^{i\omega t}} \cdot e^{i\varphi} \cdot \left[\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right] = \frac{F_0}{m} \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m}\left[\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\right] \rightarrow \text{Imaginário}$$

Precisamos determinar a parte real e a parte imaginária desse número.

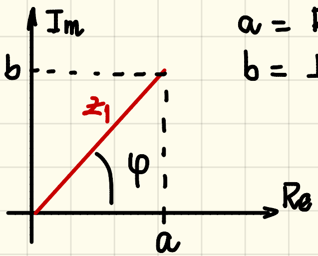
Para isso vamos multiplicar e dividir a expressão acima pelo conjugado complexo do denominador:

$$A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

$$A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Vamos chamar de z_1 o número complexo: $z_1 = A e^{i\varphi}$

No plano complexo esse número é reprentado por:



$a = Re[z_1]$
$b = Im[z_1]$

A = módulo de z_1

$A = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$

Parte real de $z_1 \Rightarrow$ $a = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$

Parte imaginária de $z_1 \Rightarrow$ $b = \frac{F_0}{m} \frac{-\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$

Então agora podemos calcular $A^2 = a^2 + b^2$

$$A^2 = \left[\frac{F_0}{m}\right]^2 \frac{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right]}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right]^2}$$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}}$$

$$\boxed{tg\,\varphi = \frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

3.3. ANÁLISE DA SOLUÇÃO

Vemos que a amplitude A e a fase dependem da frequência angular da força externa:

$$A = A(\omega)$$
$$\varphi = \varphi(\omega)$$

Para $\gamma \neq 0$ vemos que quando $\omega \to \omega_0$, isto é, quando a frequência angular da força externa é próxima da frequência natural do oscilador a amplitude do movimento tende a aumentar.

Vamos considerar $\gamma \ll \omega_0 \rightarrow$ amortecimento fraco.

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

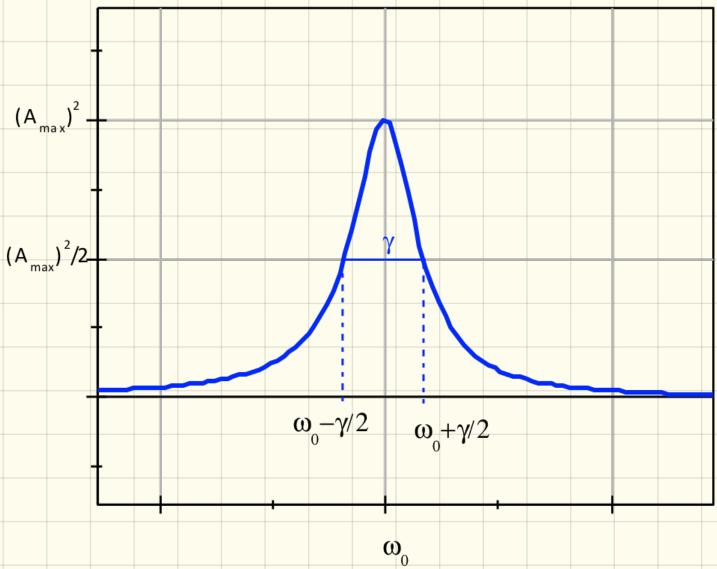
com $\omega = \omega_0$

$$\boxed{A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}}$$

A amplitude é máxima para $\omega \rightarrow \omega_0 \Longrightarrow$ Ressonância

Na figura abaixo vemos o gráfico de $A(\omega)$ mostrando que a amplitude de oscilação aumenta quando $\omega \rightarrow \omega_0$ e que a largura do pico de ressonância é igual a γ

Quanto menor o valor de γ mais estreito será o pico de ressonância. No limite:



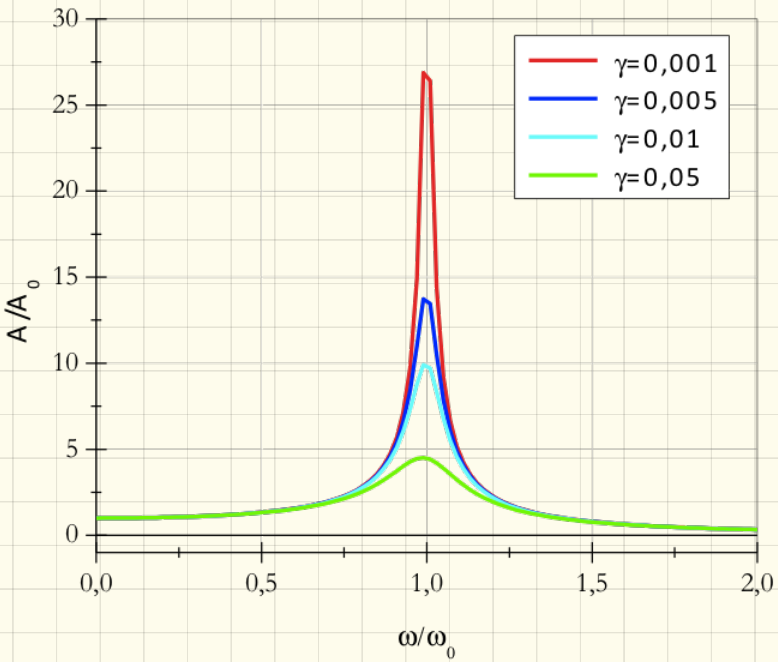
Definimos o fator $\Longrightarrow$ $Q = \dfrac{A(\omega_0)}{A(0)}$

onde: $A(0) = A(\omega = 0) \Rightarrow A_0 = \dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$

$$Q = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0} \cdot \frac{m\omega_0^2}{F_0} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\omega_0}{\gamma}}$$

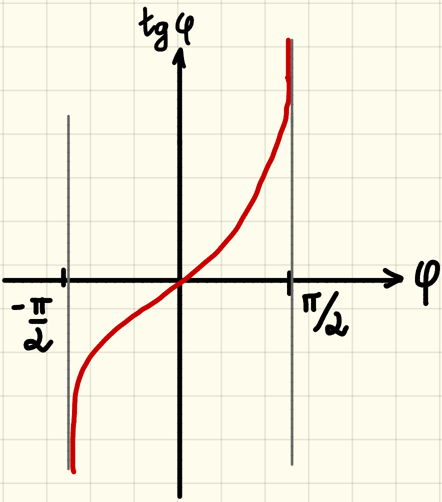
Q mede a amplificação na ressonância.

Quanto menor o valor do fator de amortecimento γ maior será o fator de amplificação.



Vamos analisar o que acontece com φ quando ω varia.

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \left[\frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$



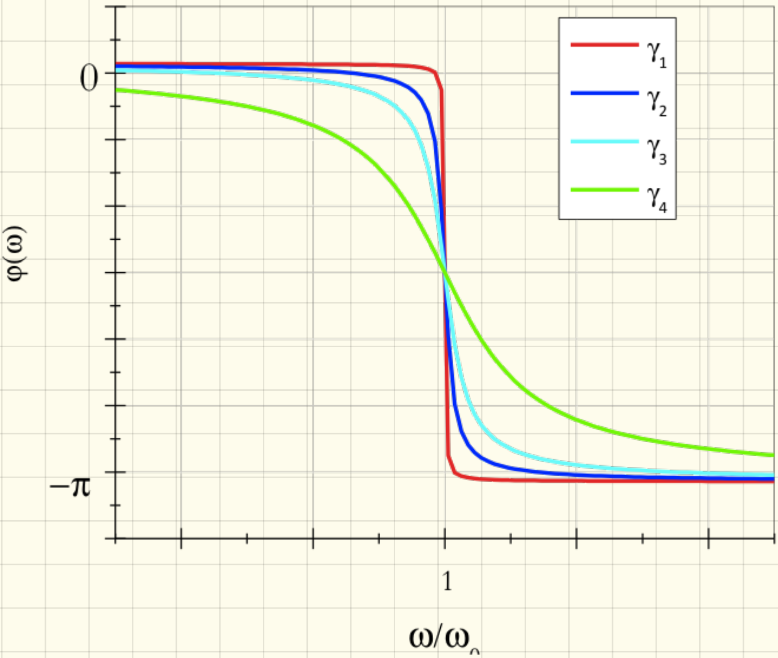
Quando $\omega \to \omega_0$ $\quad \mathrm{tg}\,\varphi \to -\infty \quad \varphi \to \frac{\pi}{2}$

$\omega \to 0 \quad \mathrm{tg}\,\varphi \to 0 \quad \varphi \to 0$

$\omega \to \infty \quad \mathrm{tg}\,\varphi \to -1 \quad \varphi \to -\pi$

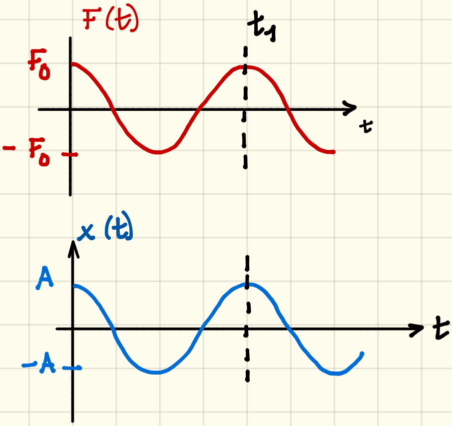
Essa mudança é praticamente descontínua quando $\gamma \to 0$ como é mostrado na figura abaixo.

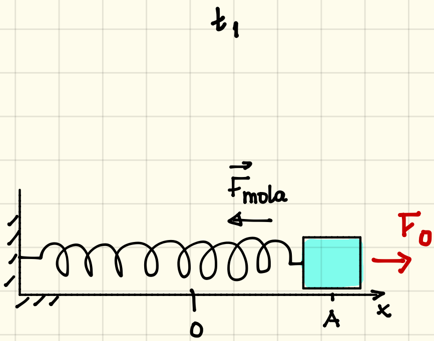
$$\gamma_4 > \gamma_3 > \gamma_2 > \gamma_1$$



Quando $\underline{\omega \ll \omega_0}$ e $\underline{\varphi = 0}$

se $F = F_0 \cos \omega t \Rightarrow x = A \cos \omega t$





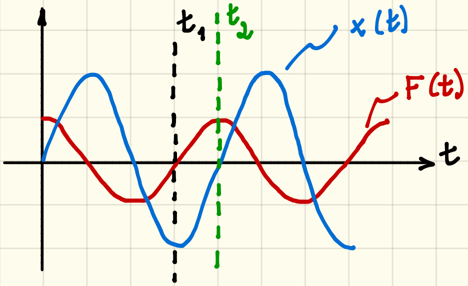
Vemos pelos gráficos de $x(t)$ e $F(t)$ que quando o corpo passa pelas posições de máxima elongação ou compressão da mola, a força exercida pelo motor também é máxima.

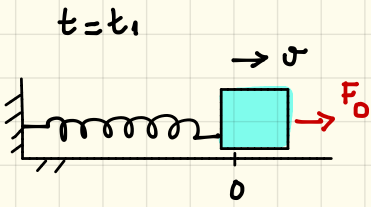
Tomemos o instante t_1 assinalado nos gráficos. Nesse instante $x = A$, ou seja, a mola tem o máximo de elongação e a força tem valor máximo, igual a F_0.

Nesse instante a força exercida pela mola tem sentido negativo, enquanto a força exercida pelo motor tem sentido positivo.

Na ressonância, quando $\omega \cong \omega_0$ e $\varphi = -\pi/2$, temos:

$$x(t) = A(\omega_0)\cos(\omega_0 t - \pi/2) = A(\omega_0)\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t)$$





Pelo gráfico vemos que na ressonância a força passa por um máximo quando a partícula passa pela posição de equilíbrio.

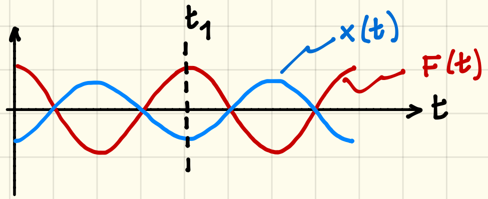
Para o instante t_2, indicado no gráfico, a partícula passa por $x = 0$, com velocidade positiva Nesse instante o o módulo da velocidade é máximo e a força também é máxima e tem o mesmo sentido de v.

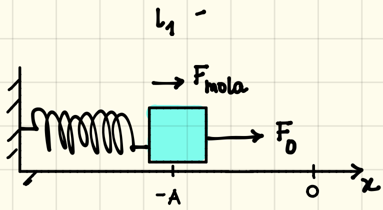
Justamente quando a força exercida pela mola é nula a força do motor atua no sentido de empurrar o corpo para que ele se afaste da posição de equilíbrio.

Nos pontos de máximo afastamento da posição de equilíbrio, a força externa é nula.

Quando $\omega >> \omega_0$ e $\varphi = -\pi$

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \pi) = -A(\omega)\cos\omega t$$





A força exercida pelo motor é máxima quando a mola passa por um máximo de elongação ou de compressão.

No instante t_1, indicado na figura, a mola está comprimida ao máximo, e a tanto a força do motor quanto a força da mola atuam no sentido de devolver o bloco à posição de equilíbrio.

Comparando as três situações vemos que:

quando $\varphi = 0$ a força do motor é máxima quando a força da mola também é máxima, mas com sentido oposto.

quando $\varphi = -\pi$, a força do motor é máxima nos pontos de máximo afastamento, com sentido de levar o corpo p/ a posição de equilíbrio

Na ressonância o trabalho realizado pelo motor transfere mais energia para o oscilador, contribuindo para o aumento da amplitude.

3.4.- BALANÇO DE ENERGIA

A energia mecânica do oscilador é dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Estamos interessados na variação da energia, pois sabemos que ela não é constante:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{2} k x \frac{dx}{dt} + \frac{2}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

$$\frac{dE}{dt} = \left[kx + m\frac{d^2x}{dt^2} \right] \frac{dx}{dt}$$

No regime estacionário: $x(t) = A(\omega) . \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$

$$\frac{dx}{dt} = -A(\omega) . \omega . \sin\left[\omega t + \varphi(\omega)\right] = -\omega x(t)$$

Voltando à expressão de dE/dt:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)}$$

$$\frac{dE}{dt} = \left[kx + m\frac{d^2x}{dt^2} \right] \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{k = \omega_0^2 m}$$

$$\frac{dE}{dt} = \left[\omega_0^2 m x - m \omega^2 x \right](-\omega x)$$

$$\frac{dE}{dt} = -m\omega x^2 \left[\omega_0^2 - \omega^2 \right] \Rightarrow$$ Tomando a média em um período

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = -m\omega \left[\omega_0^2 - \omega^2 \right] \overline{x^2}$$

$$\overline{x^2} = A^2(\omega) \left\langle \cos^2 \left[\omega t + \varphi(\omega) \right] \right\rangle_T = 0$$

Então: $\frac{d\overline{E}}{dt} = 0$

$\boxed{\text{No regime estacionário a energia média não varia.}}$

Isso pode ser visto ainda de outra maneira:

Retomando a equação diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos\omega t$$

$$kx + m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} + F(t)$$

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)}_{v}\left[\underbrace{-b\frac{dx}{dt}}_{F_{DISS}} + \underbrace{F(t)}_{F_{EXT}}\right]$$

$$-b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \text{Potência dissipada} = \frac{dW_{DISS}}{dt}$$

$$F(t).\frac{dx}{dt} = \text{Potencia fornecida} = P(t)$$

A variação da energia no oscilador é o balanço entre a energia fornecida por um fator externo e a energia dissipada por atrito.

No regime estacionário, em um período, a potência fornecida é igual a potência dissipada.

$$\overline{P}_{DISS} = -b\left\langle\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\rangle_T$$

$$\overline{P}_{DISS} = -b.(-A\omega)^2\langle\underbrace{\sin^2[\omega t+\varphi]}_{1/2}\rangle_T = \frac{bA^2\omega^2}{2}$$

usando $b=\gamma.m$ podemos escrever:

$$\boxed{\overline{P}_{DISS} = \overline{P}_{FORN} = \frac{1}{2}\gamma m \omega^2 A^2(\omega)}$$

Vemos que a potência dissipada ou fornecida depende da frequência angular ω da força externa

Como $\overline{P}_{DISS}$ é proporcional a $A^2(\omega)$ o gráfico de $\overline{P}(\omega)$ é muito semelhante ao gráfico de $A(\omega)$, e será mais estreito e mais alto para valores de γ cada vez menores.