ONDAS MECÂNICAS NA CORDA

1. ONDAS PERIÓDICAS

2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA ONDA TRANSVERSAL

   - velocidade de propagação da onda
   - energia transportada pela onda
   - princípio da superposição
   - reflexão da onda

3. MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO DE UMA CORDA

Vamos começar o estudo de ondas mecânicas pelas ondas transversais.

Inicialmente veremos como perturbações periódicas se propagam em uma corda esticada, usando as propriedades dos movimentos oscilatórios.

O objetivo é obter uma equação que descreva a onda periódica produzida na corda. Veremos que isso é facilitado quando adotamos um referencial que se desloca junto com a onda, para o qual portanto a onda está em repouso.

Em seguida vamos aplicar os princípios de dinâmica à um segmento da corda para obtermos uma equação diferencial que descreve a onda transversal. Veremos que a equação da onda periódica satisfaz essa equação diferencial.

1. ONDAS PERIÓDICAS

Uma onda é uma perturbação produzida em um ponto do espaço que se propaga para outro ponto através de um meio.

Para produzir essa perturbação é necessário realizar trabalho, como por exemplo, agitar a extremidade de uma corda esticada ou dar pancadas em uma membrana de tambor ou uma barra.

O trabalho realizado transfere energia p/ o meio, isto é produz movimentos oscilatórios; das partículas na extremidade da corda, da membrana do tambor ou das moléculas que formam a barra.

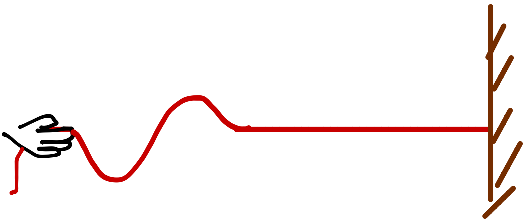
Se as partículas do meio estão conectadas, as osilações são transmitidas para as partículas vizinhas.

Vamos começar o estudo de ondas periódicas, que são produzidas pelo movimento periódico das partículas do meio, e essas oscilações podem ser na mesma direção de propagação da onda (onda longitudinal) ou na direção transversal.

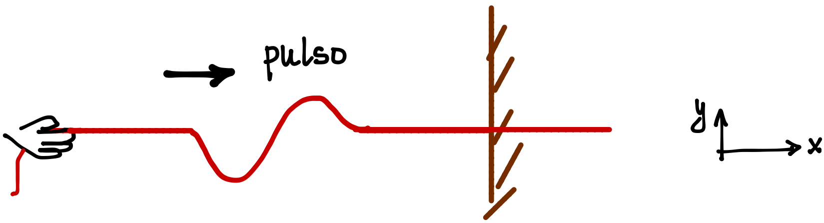
Uma agitação na extremidade de uma corda, ou uma batida na membrana de um tambor ou de uma barra são chamados de "pulso".

Corda esticada

Oscilação na extremidade da corda

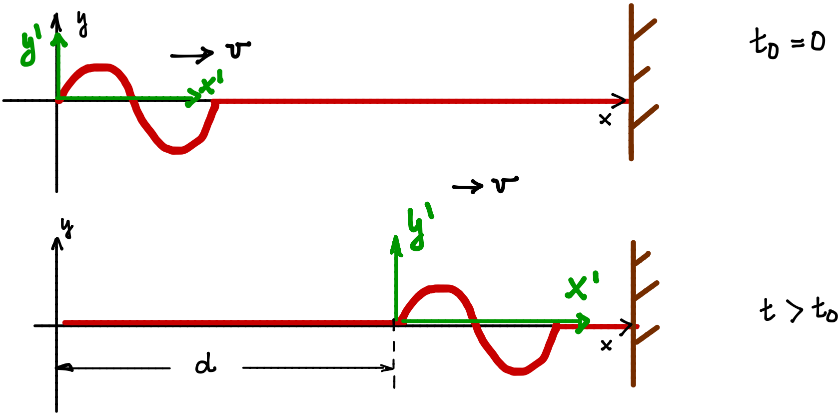


Pulso que se propaga produzindo oscilações transversais na corda



A forma do pulso se mantém a mesma e, com a propagação da onda essa forma é apenas deslocada p/ a direita.

Se a forma do pulso é descrita por uma função $y(x,t)$ a forma da função deve se manter.



v = velocidade de propagação do pulso

Na figura acima temos dois referenciais, o referencial do laboratório x-y e um referencial x'-y' que se desloca com o pulso, com velocidade v.

No instante t, o pulso terá se deslocado de uma distância d

$$d = vt$$

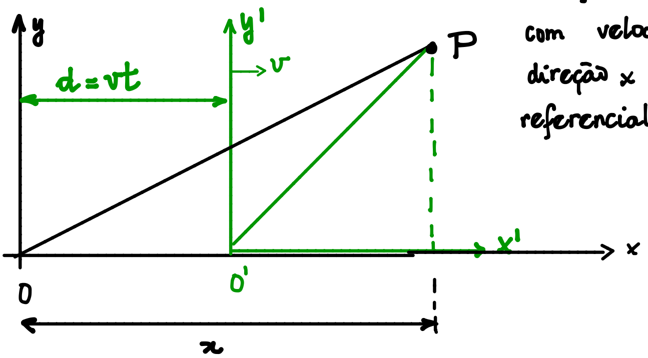
No referencial x-y a forma do pulso é dada pela função $y(x,t)$ e no referencial x'-y' a função que descreve pulso não depende do tempo; $y'(x')$

Em $t=0$ a forma do pulso é: $y(x,0)$ no referencial x-y

No instante t e no referencial x'-y' $\Rightarrow$ $y'(x'$

Como a forma do pulso se mantém: $\boxed{y(x,t) = y'(x')}$

Para passar do referencial x-y para o referencial x'-y' usamos a TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU



O referencial x'-y' se move com velocidade v = cte na direção x em relação ao referencial x-y.

No referencial x'-y' o ponto P tem coordenadas:

$$\boxed{x' = x - vt} \qquad \boxed{y' = y}$$

Voltando à igualdade: $y(x,t) = y'(x')$

Temos:

$$\boxed{y(x,t) = y(x - vt)}$$

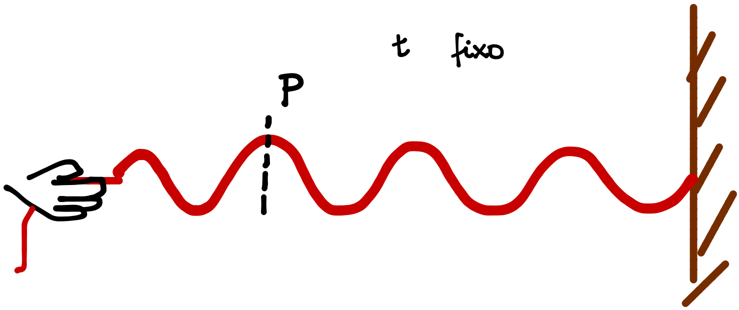
Essa é uma propriedade que deve ser satisfeita por qualquer função que ~~descreva~~ um pulso ou um conjunto de pulsos se propagando com velocidade v para a direita.

Se o movimento de agitação da extremidade for repetido periódicamente tem-se vários pulsos em sequência, e os pontos da corda irão executar um movimento oscilatório transversal com a mesma frequência do ponto na extremidade.

w = frequência angular da oscilação produzida na extremidade da corda.

$T = \frac{2\pi}{w}$ = período do movimento periódico produzido na extremidade da corda.

Em um dado instante, se tirassemos uma foto da da corda veríamos a forma de uma senóide.



Essa figura equivale à descrever a forma da onda no referencial x'-y', onde não se tem a dependência temporal.

Então podemos descrever a forma da onda no referencial x'-y':

$$y' = A\cos(kx' + \varphi)$$

onde A é a amplitude do movimento de oscilação e φ uma fase ajustável, que depende da escolha da origem de x'.

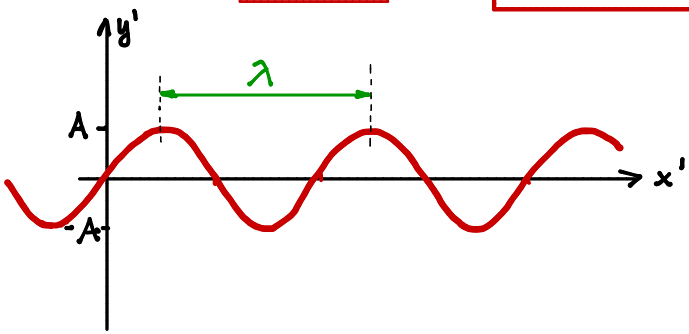
Vamos ver o significado da constante k.

A função $\cos(kx')$ é uma função periódica, que retorna ao mesmo valor. Tomemos, por exemplo, a distância $\Delta x'$ entre dois máximos.

$$k.\Delta x' = 2\pi$$

Esse valor de $\Delta x'$ é chamado de comprimento de onda e é representado por λ

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \qquad \boxed{y' = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi\right)}$$



Uma vez que temos a forma da onda no referencial x'-y' podemos passar para o referencial x-y usando a TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU.

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$

$$y' = A\cos(kx' + \varphi) \Rightarrow y = A\cos[k(x - vt) + \varphi]$$

$$y(x,t) = A\cos[kx - kvt + \varphi]$$

Vamos agora olhar p/ um ponto fixo da corda $x = x_1$. Esse ponto executa um movimento periódico com frequência angular ω, que é a frequência angular com a qual a corda é agitada verticalmente, para cima e para baixo na extremidade.

Para esse ponto da corda; $x = x_1 = cte$

$$y(x_1,t) = A\cos[kx_1 - kvt + \varphi]$$

$$y(x_1,t) = A\cos[-kvt + \varphi'] \Rightarrow \qquad \varphi' = kx_1 + \varphi = cte$$

$$kv = \omega \Rightarrow \boxed{v = \frac{\omega}{k}}$$

Lembrando que: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ e $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T}} \Longrightarrow$$ velocidade de propagação da onda.

No intervalo de tempo de um período, a onda se desloca de 1 comprimento de onda.

Então a equação que descreve uma onda periódica tranversal que se propaga ao longo do eixo x, no sentido positivo é:

$$\boxed{y(x,t) = A\cos[kx - \omega t + \varphi]}$$

Relações úteis

$$\omega = kv \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} \qquad v = \frac{\lambda}{T}$$

f = frequência da onda, unidades s^{-1} ou Hertz.

Outra maneira de escrever a equação de onda é:

$$y(x,t) = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t + \varphi\right]$$

2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA ONDA TRANSVERSAL

Consideremos uma corda que na posição de equilíbrio encontra-se esticada horizontalmente. Essa corda deve ser flexível, como uma corda de violão ou de um piano.

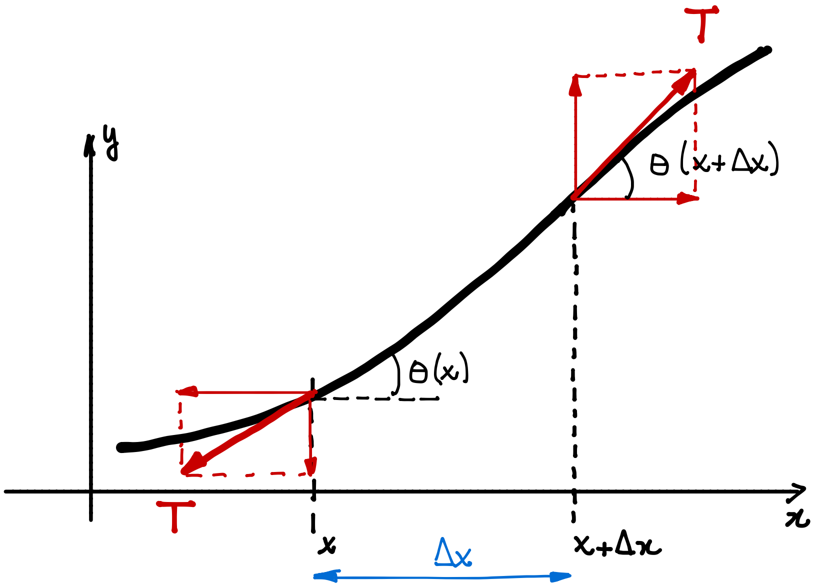
Essa corda está submetida à uma tensão T, como mostrado na figura.

Quando a corda é agitada para cima e para baixo, produz-se um deslocamento na direção y.

Aproximações

- a ação da força peso sobre a corda é desprezível
- a amplitude dos deslocamentos verticais é pequena
- a Tensão na corda permanece inalterada.
- as partículas da corda deslocam-se apenas na direção transversal à direção de propagação da onda.

Vamos analisar o movimento do um segmento da corda com comprimento Δx.



Esse segmento da corda é acelerado na direção y *

Força Resultante na direção y $\Rightarrow$ $\underbrace{F_{RES}}^{(y)} = (\Delta m) a_y$

A posição de cada ponto x da corda em um instante t é dada por: $y(x,t)$

* aqui estamos considerando $F_{RES}^{(x)} = 0$ porque na direção x não há deslocamento.

Como os deslocamentos na direção y são pequenos vamos assumir que a Tensão na corda não se altera. No entanto, a componente de T na na direção y muda do ponto x para o ponto $x + \Delta x$, assim como o ângulo θ, que dá a inclinação da corda em relação à horizontal.

$$F_{RES}^{(y)} = T_y(x + \Delta x) - T_y(x)$$

$$T_y = T \operatorname{sen}\theta$$

$$\text{Em} \begin{cases} x: & \theta = \theta(x) \\ x + \Delta x & \theta = \theta(x + \Delta x) \end{cases}$$

Se θ é pequeno podemos fazer uma aproximação:

$$\operatorname{sen}\theta \cong tg\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$\frac{\partial y}{\partial x}$ = dá a inclinação da corda em relação à horizontal e esta muda de um ponto a outro.

$$T_y(x + \Delta x) = T \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x + \Delta x} \qquad T_y(x) = T \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}$$

A massa do segmento de corda com comprimento Δx é:

$$\Delta m = \Delta x \cdot \mu$$

μ = densidade linear da corda = $\dfrac{\text{massa}}{\text{unidade de comprimento}}$

$$F_{RES}^{(y)} = \mu \cdot \Delta x \, a_y \qquad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

a_y = aceleração de um dado ponto x da corda na direção y

Então agora podemos escrever:

$$\mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left[\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x} \right]$$

$$\frac{\mu}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \right]$$

No lado direito, tomando limite em que $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \right] \right\} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\mu}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

O termo $\frac{\mu}{T}$ que aparece multiplicando $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ tem unidades:

$$\frac{\text{massa}}{\text{comprimento}} \quad \frac{1}{N} \Rightarrow \quad \frac{kg}{m} \cdot \frac{s^2}{kg \cdot m} = \frac{s^2}{m^2}$$

unidades de $(\text{velocidade})^{-2}$.

Vamos verificar que a equação da onda periódica satisfaz a equação diferencial que obtivemos.

Equação da onda periódica: $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \,\text{sen}(kx - \omega t + \varphi) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -Ak\,\text{sen}(kx - \omega t + \varphi) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

Substituindo $\partial^2 y/\partial t^2$ e $\partial^2 y/\partial x^2$ na Eq. Diferencial:

$$\frac{\mu}{T} \cdot \left[-A\omega^2 \cos(kx - \omega t + \varphi)\right] = -Ak^2 \cos(kx - \omega t +$$

$$\frac{\mu}{T} = \frac{k^2}{\omega^2} \Rightarrow \text{lembrando que } \omega = kv \Rightarrow v^2 = \frac{T}{\mu}$$

Velocidade de Propagação

Portanto, a velocidade de propagação da onda na corda depende da Tensão aplicada à corda e da densidade linear da corda.

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}} \Rightarrow$$

velocidade de propagação da onda na corda.

Para obtermos a equação diferencial da onda na corda não foi necessário assumir uma determinada forma para a onda, só aplicamos as leis da Mecânica (2ª Lei de Newton) para descrever a aceleração de um segmento infinitesimal da corda.

A função $y(x,t)$ é uma função qualquer, que deve satisfazer a equação diferencial, para descrever uma onda se propagando na corda.

A onda periódica é uma possível solução dessa equação diferencial, que é linear.

Portanto, vale o princípio de superposição: se as funções $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ são soluções da equação diferencial, então a combinação linear dessas funções também é solução:

$y(x,t) = a\,y_1(x,t) + b\,y_2(x,t) \Rightarrow$ é solução da Eq. Diferencial

A equação diferencial da onda transversal, que se propaga na direção x, com velocidade de propagação igual a v, pode ser escrita na forma geral como:

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

A velocidade de propagação da onda depende das propriedades do meio e no caso da corda vimos que:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

v é diretamente proporcional a T e inversamente proporcional a densidade linear da corda.

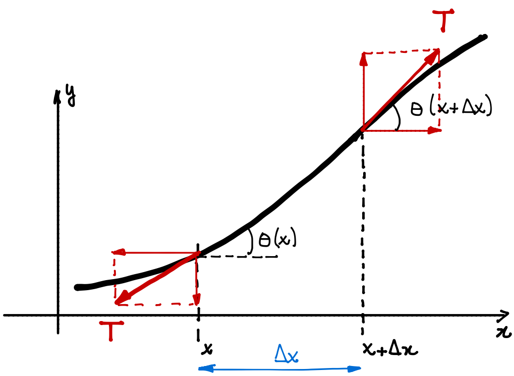
Energia transportada pela onda

Para produzir o movimento ondulatório na extremidade livre da corda, foi realizado trabalho, que se traduz pela força resultante na direção y, atuando sobre cada partícula.

Como esse trabalho é realido repetindo-se o movimento periódicamente, vamos calcular a taxa com a qual esse trabalho é realizado, ou seja, a potência transferida para a corda; P

$$P = F^{(y)} \cdot v_y$$

em um dado ponto x ⇒ $F_{RES}^{(y)} = -T \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$



O sinal negativo deve-se ao fato de $\partial y/\partial x$ ser positivo, enquanto T é negativo.

o ponto x está subindo → $v_y > 0$, mas T_y é negativa.

$$P = -T \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Para a onda harmônica que se propaga no sentido positivo do eixo x:

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA\,\text{sen}(kx - \omega t + \varphi) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \omega A\,\text{sen}(kx - \omega t + \varphi)$$

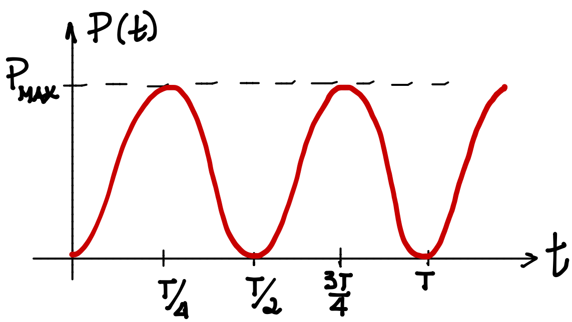
Substituindo na expressão da potência:

$$P = T \cdot k\omega A^2\,\text{sen}^2(kx - \omega t + \varphi)$$

e usando $v^2 = T/\mu$ e $\omega = kv$

$$P = v^2\mu\,\frac{\omega}{v} \cdot \omega \cdot A^2 \cdot \text{sen}^2(kx - \omega t + \varphi)$$

$$P = v\mu\omega^2 A^2\,\text{sen}^2(kx - \omega t + \varphi)$$



$$P_{MAX} = v\omega^2 A^2 \mu$$

$x = cte$

$\varphi = 0$

Vemos que a potência transferida para a corda é sempre maior ou igual a zero, em qualquer instante.

Vamos calcular o valor médio em um período:

$$\overline{P} = v\mu\,\omega^2 A^2 \langle \underbrace{\operatorname{sen}^2(kx - \omega t + \varphi)}_{1/2} \rangle$$

$$\boxed{\overline{P} = \frac{v\mu\,\omega^2 A^2}{2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\overline{P} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu T}\,\omega^2 A^2}$$

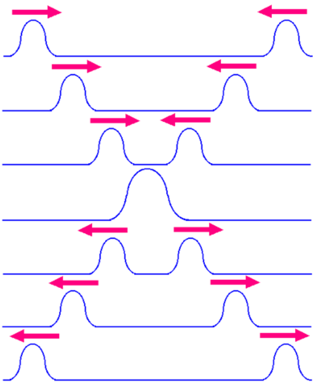
A potência média:

- é proporcional ao quadrado da amplitude
- é proporcional ao quadrado da frequência

Para ondas eletromagnéticas a potência depende da amplitude ao quadrado mas não depende da frequência.

Princípio da Superposição

Quando existem dois pulsos que se propagam em uma corda em sentidos opostos, em um dado ponto da corda, o deslocamento é a soma algébrica dos deslocamentos produzidos por cada pulso.



$$y = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

Esse princípio decorre do fato da equação diferencial da onda ser linear.

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Como y_1 e y_2 são ondas que se propagam pela corda, cada uma das funções y_1 e y_2 satisfazem a equação diferencial:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

Somando as duas equações:

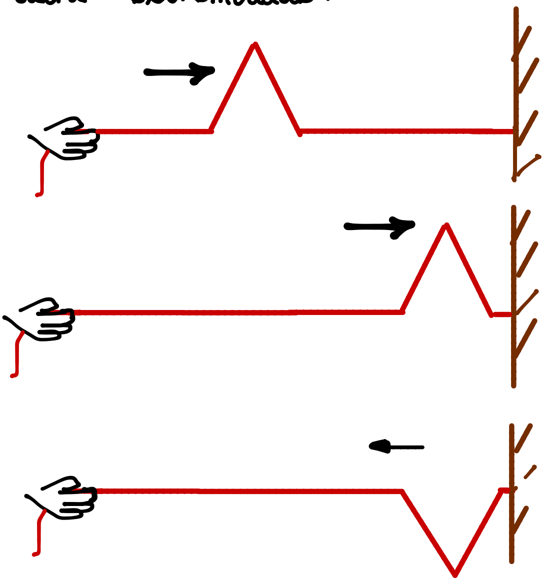
$$\frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right] = \left[\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\right]$$

como a soma das derivadas é a derivada da soma:

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[y_1 + y_2\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Reflexão de ondas

Vamos considerar um pulso que se propaga no sentido positivo do eixo através de uma corda presa na outra extremidade.

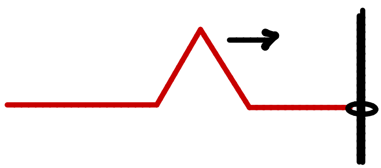


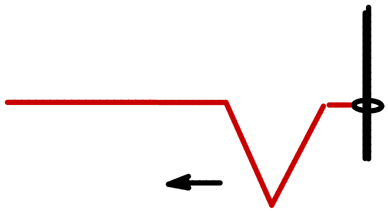
o pulso refletido tem a forma invertida em relação à horizontal

Para que o ponto de contato da corda permaneça em repouso o pulso deve sofrer uma mudança de fase de π.

Assim enquanto o pulso que viaja para a direita tende a produzir um deslocamento para cima o pulso refletido tende a produzir um deslocamento para baixo.

Quando a extremidade da corda está livre, não há mudança de fase no pulso refletido.





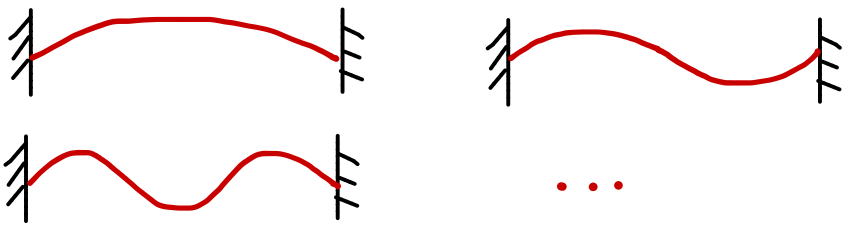
Modos normais de vibração de uma corda

Vamos considerar uma corda de comprimento L, com as duas extremidades.

Nos pontos de contato; $x=0$ e $x=\ell$ não há deslocamento transversal:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad \text{p/ todos os valores de } t.$$

Essa condição de contorno pode ser satisfeita de várias maneiras.



A amplitude de oscilação depende do ponto $\underline{x}$ da corda $\Rightarrow$

$$A = A(x)$$

mas todos os pontos oscilam com a mesma frequência $\underline{\omega}$.

Então a solução da equação diferencial pode ser separada em uma parte espacial e uma parte temporal;

$$y(x,t) = A(x) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Vamos verificar se essa equação satisfaz a equação diferencial da onda:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dA}{dx} \cos(\omega t + \varphi) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) .$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A(x)\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A(x) \cos(\omega t + \varphi)$$

Substituindo na equação diferencial da onda:

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Longrightarrow -\frac{\omega^2}{v^2} A(x) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{d^2 A}{dx^2} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A \Longrightarrow \frac{d^2 A}{dx^2} = -k^2 A$$

A amplitude $A(x)$ deve satisfazer a equação diferencial acima, que já conhecemos p/ o oscilador harmônico.

Então podemos escrever a solução geral $A(x)$

$$A(x) = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx)$$

onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são constantes que serão ajustadas de acordo com as condições de contorno.

$$\begin{matrix} y(0)=0 \\ y(\ell)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A(0)=0 \\ A(\ell)=0 \end{cases}$$

$$A(0) = a\cos 0 + b\,\mathrm{sen}\,0 \Rightarrow \quad a = 0$$

$$A(\ell) = b\,\mathrm{sen}\,k\ell = 0$$

$$\mathrm{sen}\,k\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad k\ell = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$$

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{\ell} \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots}$$

Como $\omega = kv \Rightarrow \omega_n = k_n v$

$$\boxed{\omega_n = \frac{n\pi}{\ell} v}$$

Podemos agora escrever a solução geral $y(x,t)$:

$$\boxed{y_n(x,t) = b_n \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{\ell}x\right] \cos\left[\frac{n\pi}{\ell}vt + \varphi\right] \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Além das extremidades, podem existir outros pontos na corda para os quais $A(x) = 0$, dependendo do modo de vibração.

Os pontos para os quais $A(x) = 0$ são chamados de nós.

Cada valor de n caracteriza um modo normal de vibração, em que todas as partículas da corda oscilam senoidalmente e com a mesma frequência.

A frequência do 1º modo é chamada de frequencia fundamental

$$w = 2\pi f \Longrightarrow f_n = \frac{w_n}{2\pi} \Longrightarrow f_n = \frac{n\pi v}{2\pi \ell}$$

$$\boxed{f_n = \frac{nv}{2\ell}}$$

O modo com $n = 1$, é chamado de modo fundamental, ou 1º harmônico.

$n = 1 \rightarrow$ 1º harmônico ou fundamental

$n = 2 \rightarrow$ 2º harmônico

$n = 3 \rightarrow$ 3º harmônico

$\vdots$

Essas ondas não se propagam, os pontos da corda apenas oscilam, e por isso são chamadas de ondas estacionárias.

A corda pode ser encarada com um conjunto de partículas, ligadas entre si, por meio de molas. Para um oscilador formado por N partículas devemos esperar N modos normais de vibração.

Assim, para um oscilador simples, composto de apenas 1 partícula, existe apenas um modo normal de vibração, com frequência angular igual a frequência natural do sistema;

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Quando uma corda com as extremidades fixas, é colocada para vibrar, vários modos normais de vibração podem estar presentes, simultâneamente e superpostos.

Isso ocorre quando toca-se a corda de um violino ou de uma guitarra, ou ainda de um piano.

A frequência fundamental é

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

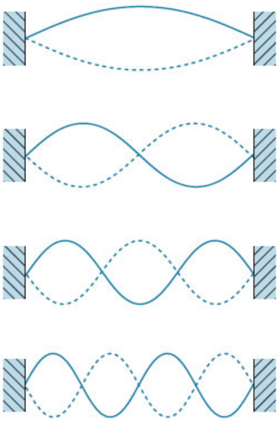
Cada instrumento possui um jogo de cordas apropriado, que são cordas com diferentes espessuras, ou seja valores diferentes de μ.

As frequências mais baixas (sons mais graves) são produzidos pelas cordas mais espessas.

A afinação de cada corda se faz, ajustando-se a tensão na corda.

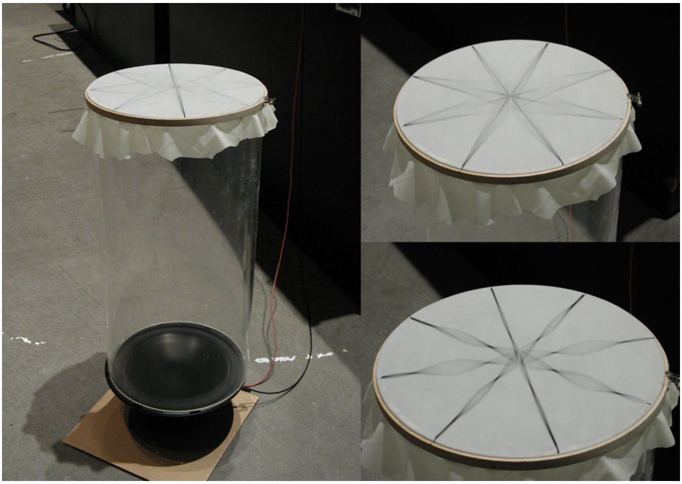
Para produzir notas de frequência mais baixas é preciso aumentar o comprimento da corda ($f \propto 1/L$), e por isso o violoncelo produz sons mais graves que o violino ou o violão.

Modos normais de vibração de uma corda



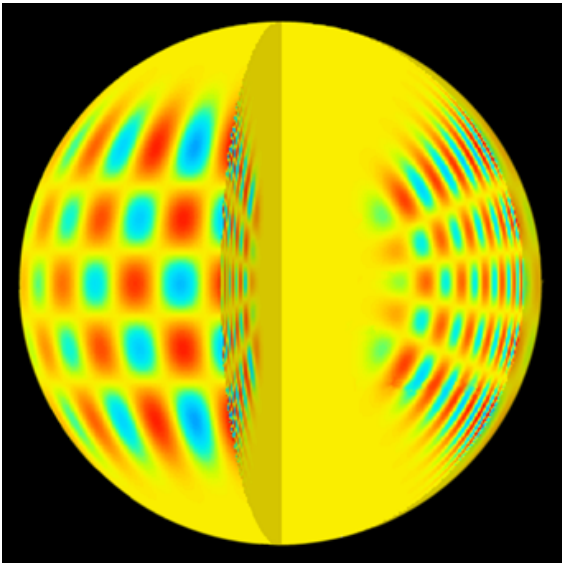
mode	wavelength	frequency
first	$2L$	$\frac{v}{2L}$
second	L	$\frac{v}{L}$
third	$\frac{2L}{3}$	$\frac{3v}{2L}$
fourth	$\frac{L}{2}$	$\frac{2v}{L}$

Modos normais de vibração de um tambor



As linhas escuras na superfície da membrana mostram os nós.

http://en.wikipedia.org/wiki/Helioseismology



Oscilações no Sol causadas por turbulências na zona de convecção. São ondas acústicas de pressão longitudinais (tipo p) de compressão. O Sol tem modos normais, de vibração, que produzem oscilações como se ele fosse um sino.

. Torsional oscillations are the time variation in solar differential rotation. They are alternating bands of faster and slower rotation. So far there is no generally accepted theoretical explanation for them, even though a close relation to the solar cycle is evident, as they have a period of eleven years, as was known since they were first observed in 1980.[6]

Howard, R.; Labonte, B.J. (July 1980). "The sun is observed to be a torsional oscillator with a period of 11 years". Astrophysical Journal 239: L33–L36.