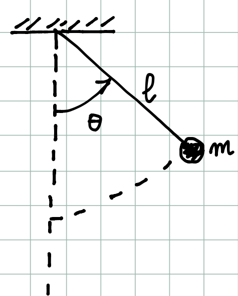
EXEMPLOS DE OSCILADORES E APLICAÇÕES

1- Pêndulo Simples



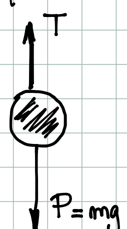
O pêndulo simples consiste de uma partícula de massa m suspensa por um fio de comprimento ℓ.

A posição de equilíbrio é a posição vertical com a massa em repouso.

Se a massa é deslocada para a direita ou para a esquerda, e o fio forma um ângulo θ com a direção vertical, ao ser abandonada a partir do repouso a partícula passará a oscilar em torno de $\theta = 0$, que corresponde a posição de equilíbrio.

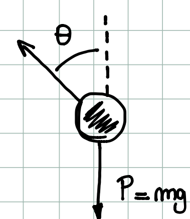
Vamos analisar as forças que atuam na partícula nas duas situações, considerando que a massa do fio é desprezível.

No equilíbrio:



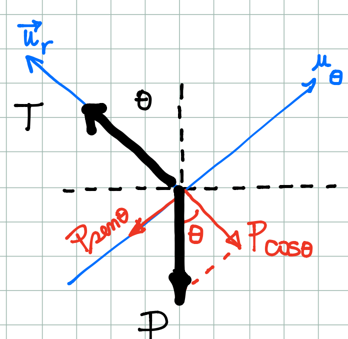
$\vec{F}_{RES} = 0 \Rightarrow T = P$

Fora do equilíbrio



A partícula vai descrever uma trajetória que é o arco de uma circunferência com raio ℓ, e com aceleração variável, que decresce à medida que a partícula se aproxima da posição de equilíbrio.

Para analisar essa situação vamos usar coordenadas polares e projetar as forças ao longo dos eixos que têm a direção radial e tangencial, indicados por $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\theta$ em azul na figura.



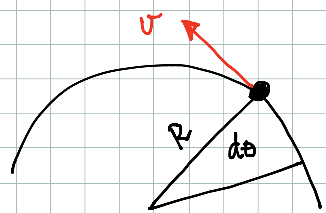
Na direção radial $\quad \vec{F}_{RES} = 0 \rightarrow T = P\cos\theta$

Na direção tangencial $\quad \vec{F}_{RES} = P sen\theta$

A força resultante é na direção tangencial $\Rightarrow \vec{F}_{RES} = m\vec{a}_T$

a_T = aceleração tangencial

Lembrando que em um movimento circular existe uma relação entre a velocidade angular w e a velocidade tangencial v_T

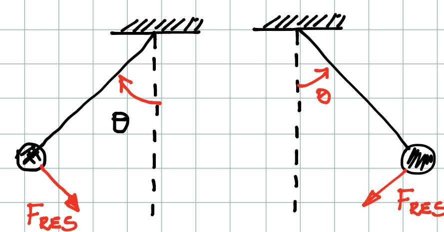


$$v_T = wR \Rightarrow v = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} \Rightarrow a_T = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Então podemos escrever: $\vec{F}_{RES} = m\vec{a}_T$ $\quad |F_{RES}| = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$

Nos diagramas ao lado vemos que θ mede o afastamento do fio em relação à posição de equilíbrio, e que a força resultante tem o sentido contrário, atuando como a força restauradora, para trazer a partícula de volta para a vertical.



Essa força é equivalente à força elástica exercida pela mola no oscilador massa mola.

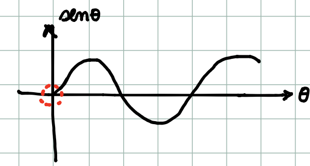
Voltando à equação: $|\vec{F}_{RES}| = P\operatorname{sen}\theta \Rightarrow$ $ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\operatorname{sen}\theta$

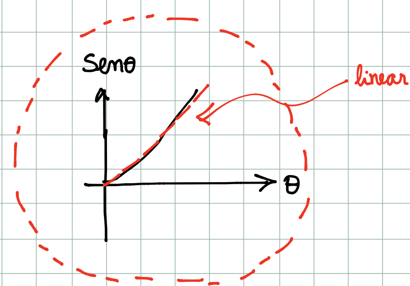
O sinal negativo refere-se ao fato de que a aceleração angular $(\alpha = d^2\theta/dt^2)$ tem sentido contrário ao adotado para o sentido de aumento de θ.

Agora vemos que essa equação é uma equação diferencial de segunda ordem, porém não é linear, pois a segunda derivada da função não é proporcional à $\theta(t)$, mas sim a uma função de $\theta(t)$ que é $\operatorname{sen}(\theta(t))$.

A equação se reduz à: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\,\text{sen}\,\theta$

No entanto para valores de θ pequenos podemos fazer uma aproximação:





$\text{sen}\,\theta \cong \theta$ (p/ θ em radianos)

Essa aproximação permite "linearizar" a equação diferencial, mas devemos lembrar que a solução que será obtida só é válida para oscilações de pequenas amplitudes.

Com essa aproximação podemos escrever a equação diferencial como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\,\theta \Rightarrow \text{Eq. dif p/ o pêndulo com } \theta \text{ pequeno.}$$

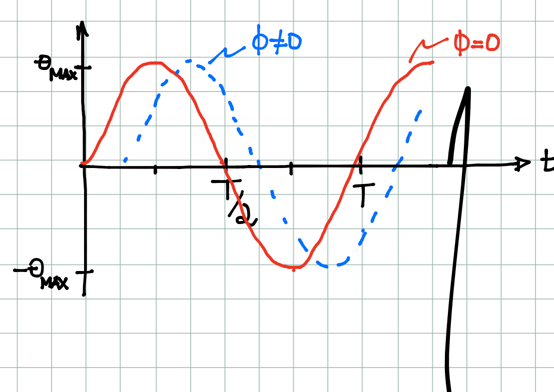
E, por analogia com a equação diferencial do sistema massa-mola,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

podemos reconhecer: $\Omega^2 = \frac{g}{\ell}$ como a frequência angular do pêndulo, e o período é*: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

A solução da equação diferencial, também por analogia é:

$$\theta(t) = \theta_{max}\,\text{sen}(\Omega t + \phi)$$

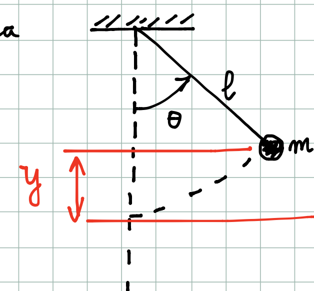


E para pequenas amplitudes o movimento do pêndulo pode ser considerado periódico.

* aqui foi usado o símbolo Ω para representar a frequência angular da oscilação para não ser confundida com ω=dθ/dt, que representa a velocidade angular da partícula durante a oscilação $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Balanço de energia no pêndulo simples

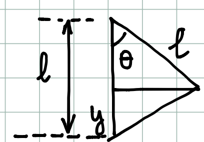
Em uma dada posição $\theta(t)$ podemos escrever a energia mecânica do pêndulo como:



$$E = U(\theta(t)) + K(\theta(t))$$

$U(\theta(t))$ = energia potencial gravitacional = $mgy \rightarrow y = y(\theta)$

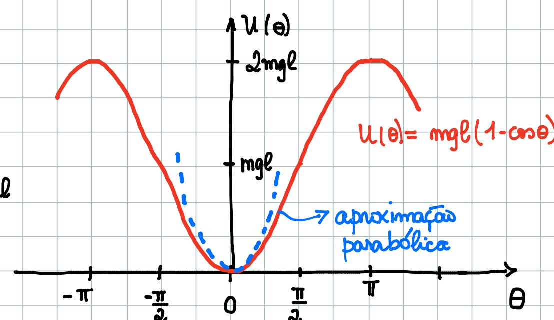
Consideremos o triângulo ao lado:



$$y(\theta) = \ell - \ell\cos\theta$$

$$U(\theta(t)) = mg\ell(1-\cos\theta)$$

Vemos que para
$$\begin{cases} \theta = 0 \rightarrow \cos\theta = 1 & U(\theta) = 0 \\ \theta = \pi/2 \rightarrow \cos\theta = 0 & U(\theta) = mg\ell \\ \theta = \pi \rightarrow \cos\theta = -1 & U(\theta) = 2mg\ell \end{cases}$$

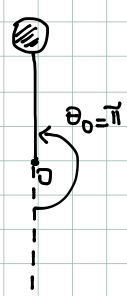


Para pequenas amplitudes de oscilação $\rightarrow \theta \approx 0 \Rightarrow \cos\theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$U(\theta) \cong \frac{1}{2} mg\ell\theta^2 \rightarrow$ representado pela curva pontilhada

Vemos também no gráfico de $U(\theta)$ que $\theta = \pi$ corresponde a um ponto de equilíbrio instável.

Se o corpo estiver preso por um cabo rígido, e este preso à parede por um prego



Se o corpo for deslocado ligeiramente p/ a direita ou para a esquerda a força gravitacional atua no sentido de afastá-lo dessa posição.

Vamos calcular a energia mecânica para pequenas amplitudes de oscilação.

$$E_{MEC} = U(t) + K(t) \qquad \begin{cases} U(t) = \frac{1}{2} mg\ell\,\theta^2(t) \\ K(t) = \frac{1}{2} m v_T^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \Rightarrow K(t) = \frac{1}{2} m\ell^2 \left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 \end{cases}$$

usando a solução da equação diferencial linearizada: $\theta(t) = \theta_{MAX}\, sen(\Omega t + \phi)$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \theta_{max}\,\Omega \cos(\Omega t + \phi) \qquad K(t) = \frac{1}{2} m\ell^2 \theta_{max}^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t + \phi)$$

Lembrando que: $\Omega^2 = \frac{g}{\ell}$

$$\begin{cases} K(t) = \frac{1}{2} m\ell^2 \theta_{max}^2 \frac{g}{\ell} \cos^2(\Omega t + \phi) \\ U(t) = \frac{1}{2} mg\ell\, \theta_{max}^2\, sen^2(\Omega t + \phi) \end{cases}$$

$$E = \frac{1}{2} mg\ell\,\theta_{max}^2 \left[sen^2(\Omega t + \phi) + \cos^2(\Omega t + \phi)\right] \Rightarrow E_{MEC} = \frac{1}{2} mg\ell\,\theta_{MAX}^2 = cte.$$

Essa energia corresponde a energia inicial do pêndulo quando ele é afastado de um ângulo θ (pequeno) da posição vertical e abandonado a partir do repouso.

Vimos que o pêndulo é um oscilador harmônico apenas para pequenas amplitudes de oscilação.

Para amplitudes grandes a equação diferencial não é linear e o movimento deixa de ser periódico.

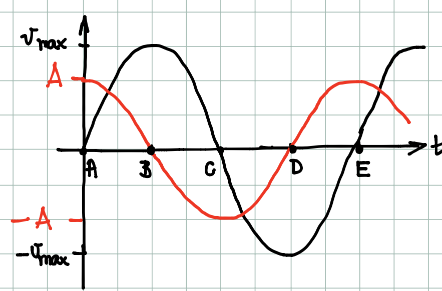
Representação no espaço de fase

O movimento do oscilador pode ser representado em um diagrama chamado de espaço de fase. Nesse diagrama, cada ponto representa um determinado instante do movimento de oscilação que é caracterizado pelos valores de sua posição e velocidade.

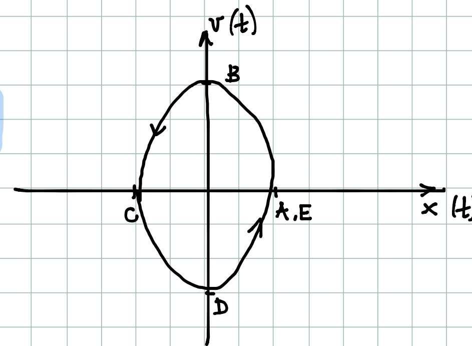
t	x	v
t_0	x_0	v_0
t_1	x_1	v_1
t_2	x_2	v_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Esses pontos podem ser ligados por linhas que representam uma trajetória no espaço de fase.

Tomemos o oscilador massa mola, que no instante $t=0$ foi levado à posição $x_0=A$ e abandonado a partir do repouso. Os gráficos de $x(t)$ e $v(t)$ são representados abaixo:

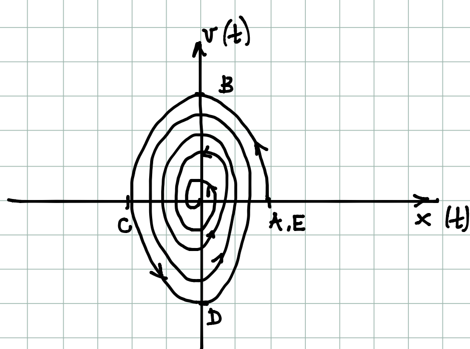


Espaço de fase



No espaço de fase o movimento periódico é representado por uma elipse (ou uma circunferência, dependendo da escala dos eixos), e quando se completa um ciclo os pontos caem sobre a curva já traçada, ou seja para vários ciclos, as elipses estão superpostas.

Para um movimento oscilatório com um ligeiro amortecimento, sabemos que a amplitude das oscilações vai diminuindo até que o corpo atinge o repouso. Nesse caso o diagrama é uma espiral.



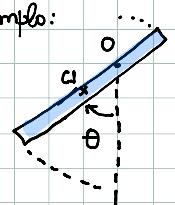
O ponto no centro do diagrama, que corresponde ao ponto de equilíbrio; $x=0$ e $v=0$ é chamado de atrator, porque o corpo é "atraído" para esse ponto.

Outros osciladores

Existem outros osciladores que podem ser descritos por equações diferenciais semelhantes a do sistema massa-mola, ou reduzidas à mesma equação com algumas aproximações, como vimos no caso do pêndulo simples.

1) **Pêndulo físico**: semelhante ao pêndulo simples, porém não desprezamos a distribuição de massa ao longo da direção radial.

Exemplo:



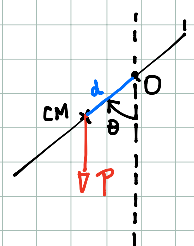
Uma régua que pode girar em torno do ponto O.

Nesse caso existe um torque atuando sobre a régua devido à força peso, que atua no Centro de Massa (C.M) da régua.

$\tau = -I_0 \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$, onde I_0 é o momento de inércia da régua em relação ao ponto O.

e o torque é:

$\tau = mg\,d\,\text{sen}\,\theta$



Equação Diferencial: $I_0 \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,d\,\text{sen}\,\theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I_0}\,\text{sen}\,\theta$$

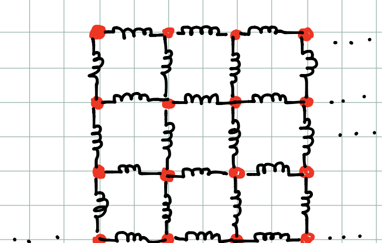
Essa equação é semelhante à obtida para o pêndulo simples, e também não é linear.

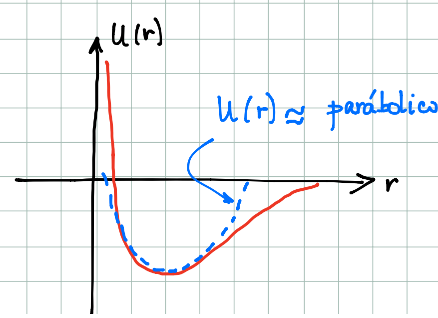
Para pequenas amplitudes → $\theta \cong 0$ $\quad \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\Omega^2\theta \quad$ $\Omega^2 = \dfrac{mgd}{I_0}$ = frequência angular

2- Moléculas e átomos em sólidos.

Em um sólido, podemos fazer um modelo simples, em que átomos vizinhos interagem por meio de potencial do tipo parabólico.

$$U(r) \cong a\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{b}{r}\right)^{6}\right]$$





Existem técnicas experimentais que permitem determinar a frequência natural de oscilação dos átomos, w_0.

Se a amplitude de oscilação é pequena, o potencial de interação entre os átomos pode ser aproximado por um potencial harmônico, como mostrado pela curva pontilhada no gráfico.

Sabemos que $w_0^2 = \frac{k}{m_{red}}$ onde $m_{RED} \Rightarrow$ massa reduzida

$k =$ "constante da mola" $=$ constante de interação

Podemos obter estimativas sobre o valor de k.