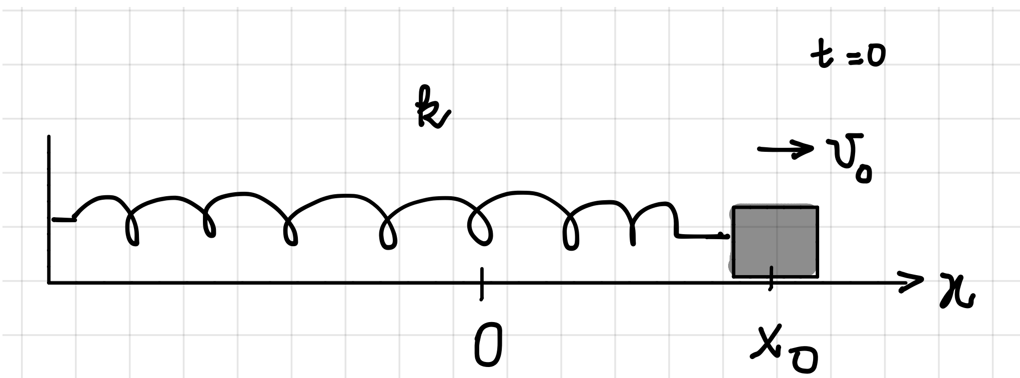
Revisão para Prova P1

Objetivos

- Reconhecer situações físicas que correspondam a movimentos de oscilação
- Reconhecer propriedades da equação diferencial que correspondam a um movimento de oscilação periódico e identificar as condições físicas presentes.
- Identificar soluções da equação diferencial compatíveis com a equação diferencial.
- Utilizar diferentes formas de representação das grandezas físicas (equações matemáticas ou gráficos) que caracterizam o movimento de oscilação.
- Determinar a evolução das grandezas físicas envolvidas no movimento (posição, velocidade, aceleração, energia), compatíveis com condições iniciais.
- Identificar as formas de energia presentes na oscilação, representar seu comportamento na forma de gráficos ou equações

Movimento harmônico Simples

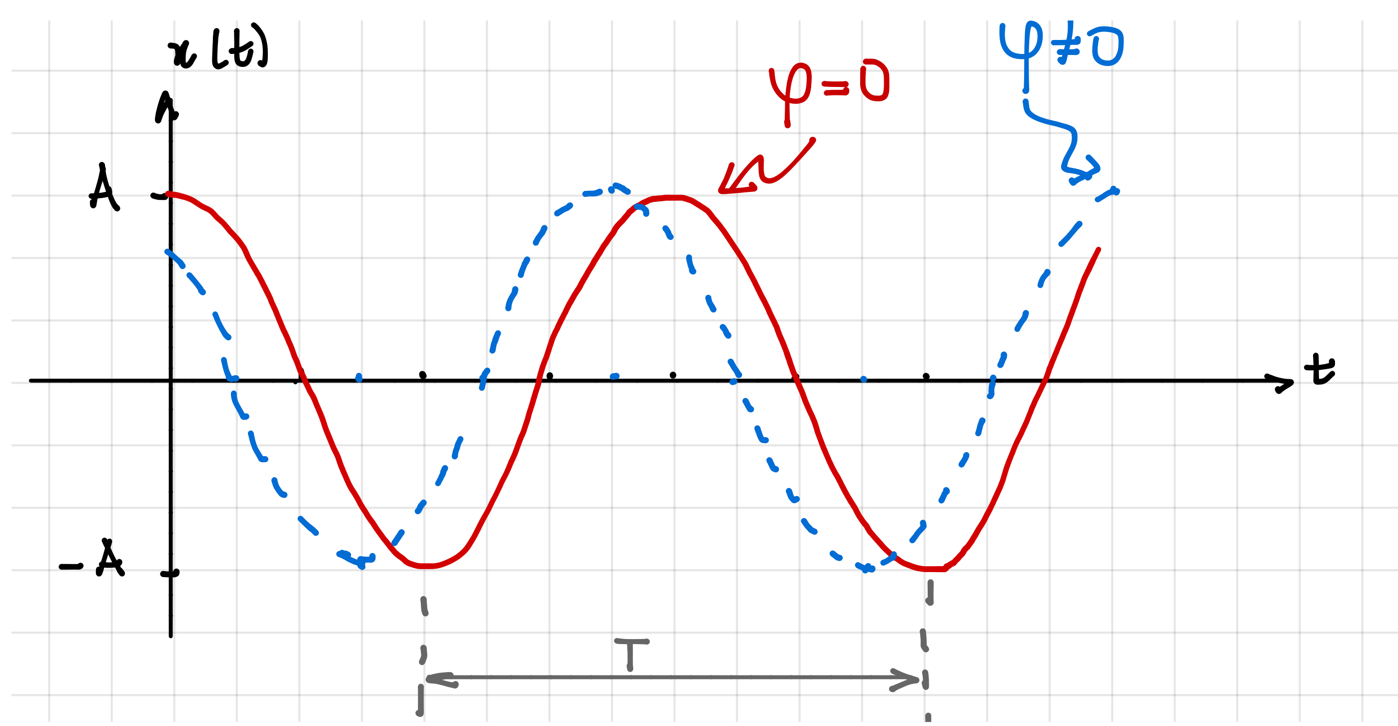
Exemplos: massa-mola, pêndulo simples, circuito LC



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

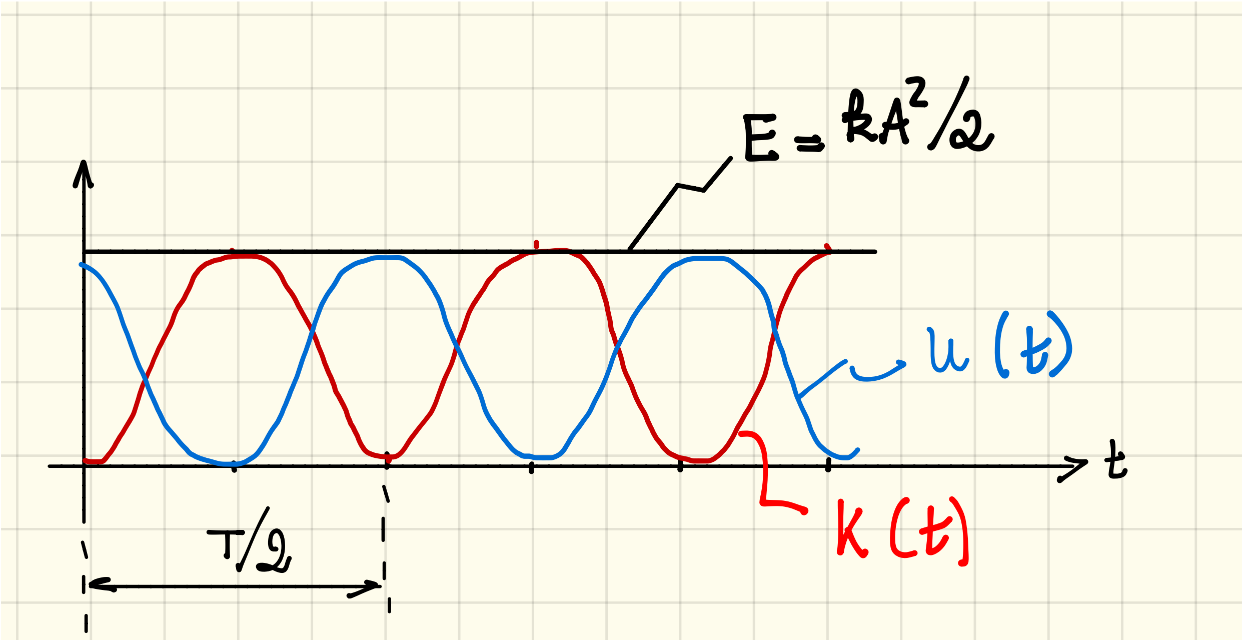


Energia mecânica

$$U(t) = \frac{kx^2(t)}{2}$$

$$K(t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$E_{mec} = \frac{1}{2}kA^2 = cte$$



Oscilador Amortecido

Força dissipativa $\rightarrow$ $F_{diss} = -bv$

Força resultante = Força da mola + Força dissipativa $\Rightarrow$ $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\dfrac{dx}{dt}$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \gamma = \frac{b}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma\frac{dx}{dt}$$

3 situações possíveis

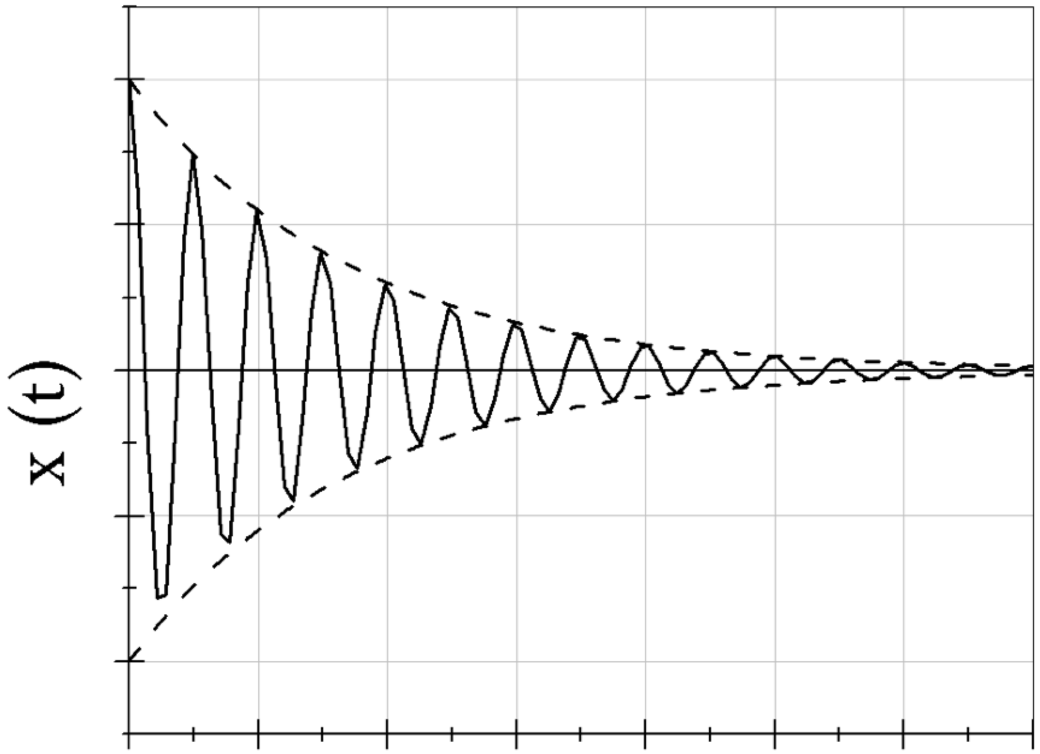
- $\omega_0 > \dfrac{\gamma}{2}$ — Amortecimento sub-crítico ou fraco
- $\omega_0 = \dfrac{\gamma}{2}$ — Amortecimento crítico
- $\omega_0 < \dfrac{\gamma}{2}$ — Amortecimento super-crítico

Amortecimento Fraco ou sub-crítico $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$

Solução da equação diferencial: $x(t) = \underbrace{Ae^{\frac{-\gamma t}{2}}}_{\mathcal{A}(t)} cos(\omega t + \varphi)$ $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma}{4}^2$

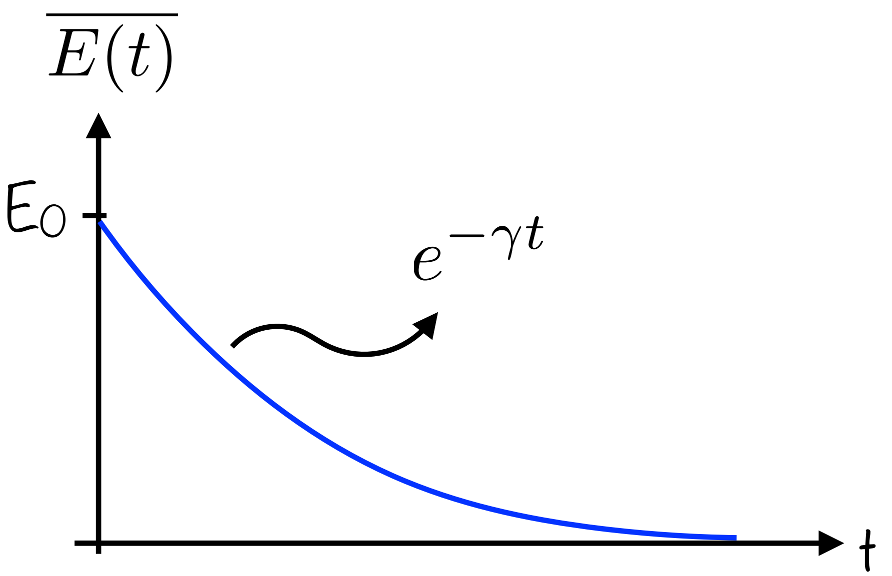
Movimento oscilatório

- ✓ com frequência angular $\omega < \omega_0$
- ✓ Amplitude que decresce exponencialmente com o tempo



Energia média

$$\overline{E(t)} = \frac{kA^2}{2}e^{-\gamma t} = E_0 e^{-\gamma t}$$



Amortecimento super crítico $\omega_0 < \frac{\gamma}{2}$

Solução da equação diferencial:

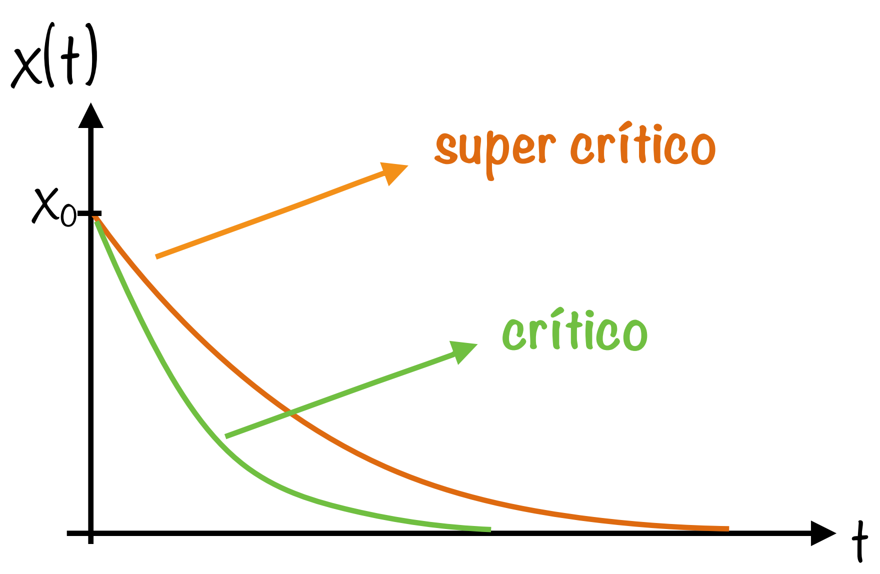
$$x(t) = e^{\frac{-\gamma t}{2}}\left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Amortecimento crítico $\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$

Solução da equação diferencial:

$$x(t) = e^{\frac{-\gamma t}{2}}(a + bt)$$



Não há mais movimento oscilatório

Oscilador Forçado Amortecido

Força dissipativa $\rightarrow$ $F_{diss} = -bv$

Força externa periódica $\rightarrow$ $F(t) = F_0 \cos \omega t$

Equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

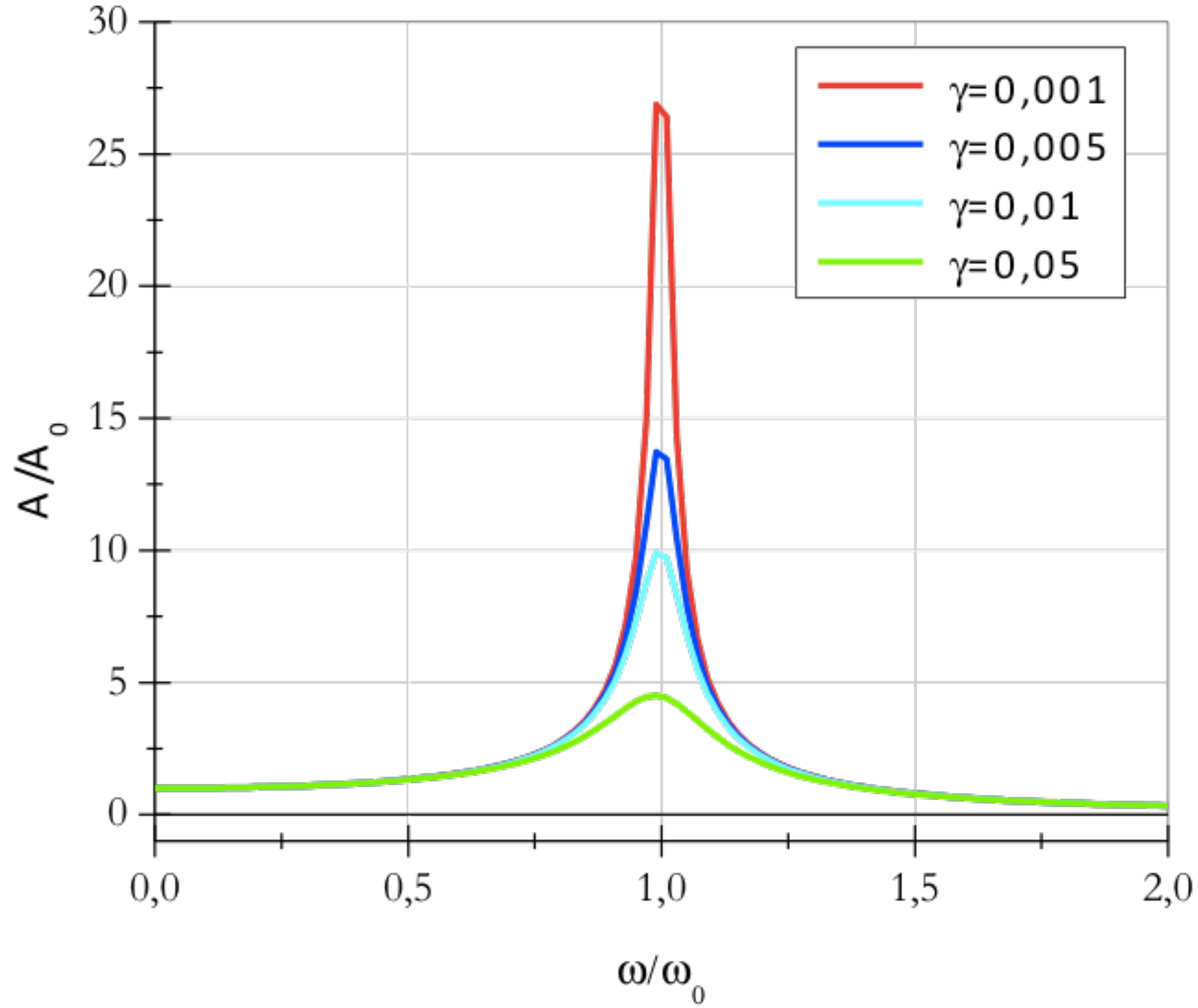
Solução estacionária da equação diferencial: $x(t) = A(\omega) cos[\omega t + \varphi(\omega)]$

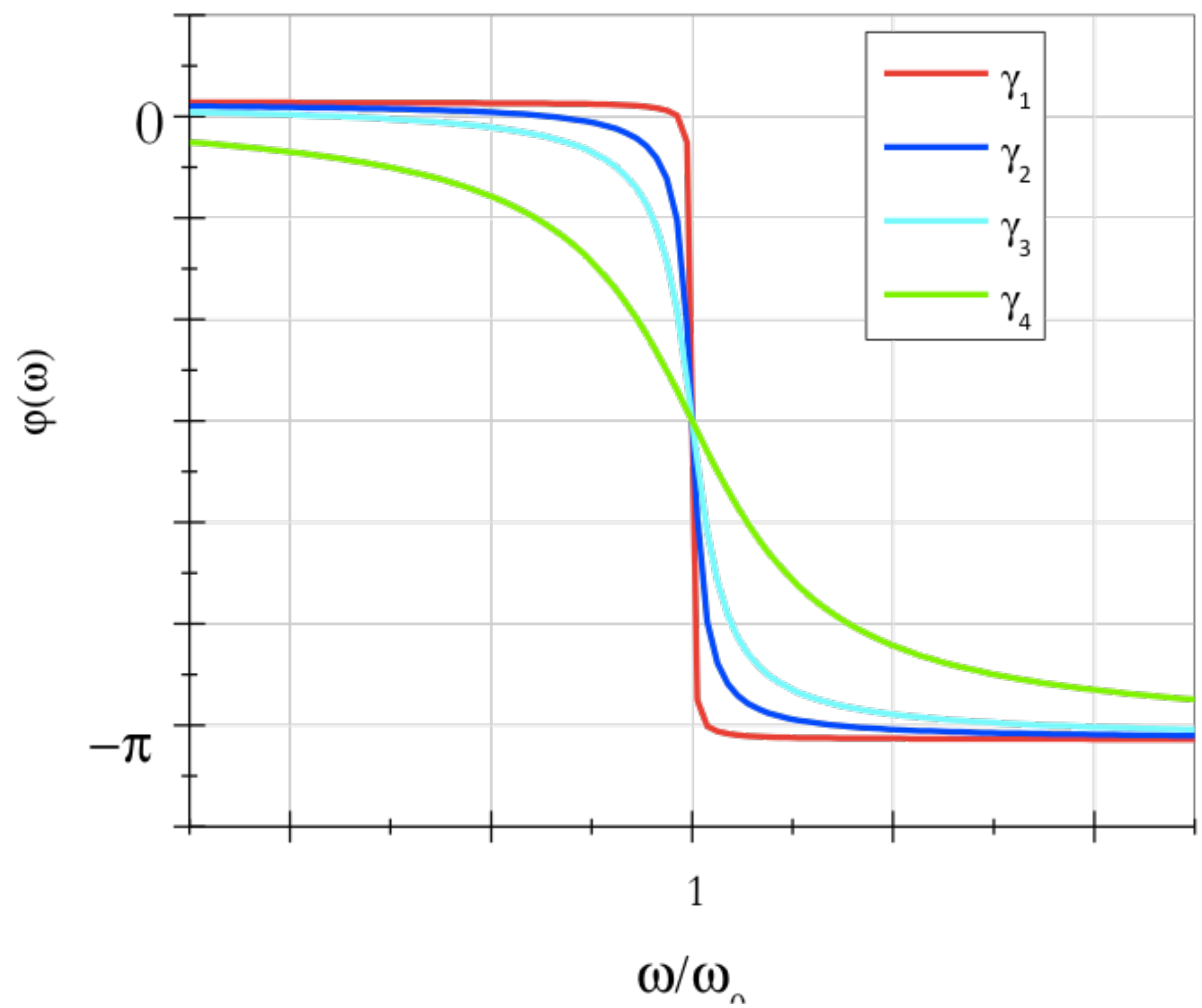
$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = arctan[-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}]$$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = arctan[-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}]$$





$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}$$

$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$$

$$A(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

$$A(\omega \to \infty) \to 0$$

Ressonância

Para amortecimento fraco: $\omega_{ress} \approx \omega_0$ → $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$

$$x(t) = A(\omega_0) cos[\omega_0 t - \frac{\pi}{2}]$$

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}$$

→

$$x(t) = A(\omega_0) sen[\omega_0 t]$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A(\omega_0) cos[\omega_0 t]$$

$$\overline{P}_{fornecida}(\omega) = \overline{F(t)v(t)} = \frac{\gamma m \omega^2 A^2(\omega)}{2}$$

- ✓ Amplitude atinge o valor máximo
- ✓ fase $=-\pi/2$
- ✓ a força externa está em fase com a velocidade
- ✓ A potencia transferida pelo motor é máxima quando $\omega \approx \omega_0$