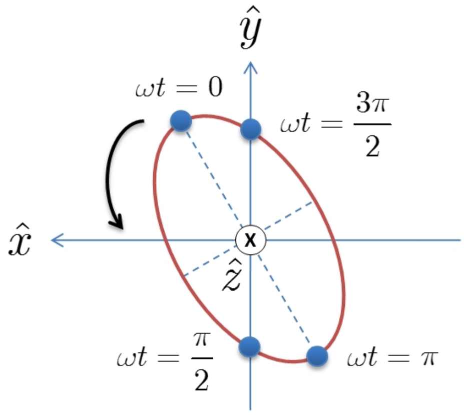
Universidade de São Paulo, EESC, Depto. de Engenharia Elétrica e de Computação
SEL413-Telecomunicações, Prof. Amílcar Careli César
Gabarito da 1ª Prova, versão 1, outubro de 2016

Questão 1 (valor 2,0): Uma linha de transmissão de impedância característica Z_0 e comprimento ℓ cm é fabricada com dielétrico cuja permissividade dielétrica relativa é ε_r. A frequência de operação é f. Se a impedância na entrada da linha é Z_e, calcular a impedância de carga Z_L. Dados: $Z_0 = 50\ \Omega$; $\ell = 150$ cm; $\varepsilon_r = 5$; $f = 200$ MHz; $Z_e = 50 + j10\ \Omega$.
Solução: A impedância na entrada da linha é $Z_e = Z_0 \left[Z_L + jZ_0 tg\left(k\ell\right)\right] / \left[Z_0 + jZ_L tg\left(k\ell\right)\right]$ e a impedância de carga é $Z_L = Z_0 \left[Z_e - jZ_0 tg\left(k\ell\right)\right] / \left[Z_0 - jZ_e tg\left(k\ell\right)\right]$, na qual $k = 2\pi/\lambda$; $\lambda = v_f/f$. Assim, $k = 2\pi f/v_f = 2\pi f/\left(c/\sqrt{\varepsilon_r}\right) = 2\pi\sqrt{\varepsilon_r} f/c$. Substituindo os valores, $k = 0,09366$ cm^{-1}, $v_f = 1,3416 \times 10^{10}$ cm·s^{-1} e $\boxed{Z_L \cong 46,5 - j9\ \Omega}$.

Questão 2 (valor 3,0): Uma onda eletromagnética propaga-se em um meio caracterizado por $(\sigma = 0;\ \mu_r = 1;\ \varepsilon_r = 2)$. O campo elétrico é $\boldsymbol{E}\left(y,t\right) = 30\pi \exp\left\{j\left[\omega t - \left(4/3\right)y\right]\right\} \widehat{z}$ V·m^{-1}, na qual ω é a frequência angular. Determinar: (Q2a, valor 1,5) a impedância intrínseca do meio, η, em ohms; (Q2b, valor 1,5) o valor médio do vetor de Poynting, em W·m^{-2}. Atenção: não deixe valores indicados nas expressões quando for possível calcular os valores numéricos.
Solução: A expressão geral do vetor complexo campo elétrico é $\boldsymbol{E}\left(y\right) = E_0 \exp\left\{-jk_y y\right\} \widehat{z}$ V·m^{-1}. O vetor complexo campo magnético é determinado a partir da equação de Maxwell $\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{E}/(-j\omega\mu)$. Como $E_x = E_y = 0$ e $\partial E_z/\partial_x = \partial E_z/\partial_z = 0$, $\boldsymbol{H} = \left(\partial E_z/\partial_y\right)/(-j\omega\mu)\widehat{x}$ e $\boldsymbol{H} = \left(-jk_y\right)/(-j\omega\mu) \exp\left\{-jk_y y\right\} \widehat{x}$. Como $k_x = k_z = 0$, então $k_y = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ e $k_y/\left(\omega\mu\right) = 1/\eta$. Assim, $\boldsymbol{H} = \left(E_0/\eta\right) \exp\left\{-jk_y y\right\} \widehat{x}$ A·m^{-1}, na qual $\eta = \eta_0\sqrt{\mu_r/\varepsilon_r}$. Substituindo os valores numéricos resulta em $\eta = 377\sqrt{1/2} = \boxed{266 \text{ ohms}}$; $\boldsymbol{H} = \left(30\pi/\eta\right) \exp\left\{-j\left(4/3\right)y\right\} \widehat{x}$ A·m^{-1}. O valor médio do vetor de Poynting é $< \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{r},t\right) >= \left(1/2\right) \boldsymbol{E}\left(y\right) \times \boldsymbol{H}^*\left(y\right)$. O vetor complexo campo elétrico é $\boldsymbol{E}\left(y,t\right) = 30\pi \exp\left\{-j\left(4/3\right)y\right\} \widehat{z}$ V·m^{-1}. Assim, $< \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{r},t\right) >= \left[E_0 \exp\left\{-jk_y y\right\} \widehat{z}\right] \times \left[1 \exp\left\{+j\left(4/3\right)y\right\} \widehat{x}\right]$ e $\boxed{< \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{r},t\right) >= \left(30\pi\right)^2 / \left(2\eta\right) \widehat{y} \text{ W·m}^{-2}}$ ou $< \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{r},t\right) >= 16,7\widehat{y}$ W·m^{-2}.

Questão 3 (valor 2,5): O campo elétrico de uma onda é $\boldsymbol{E}(z) = E_0\left[\widehat{x} + \widehat{y}j2\exp\left(-j\pi/3\right)\right]\exp\left(jk_z z\right)$ V·m^{-1}. Determinar a polarização da onda (linear; circular ou elíptica, mão esquerda ou direita). Dica: Determine com atenção a direção de propagação da onda. Atenção: (1) Utilizar o referencial onda propagando em direção ao observador para determinar se é mão esquerda ou mão direita; (2) indicar (escrever) explicitamente (de forma inequívoca) a polarização; (3) justificar a resposta (indicar as contas para alcançar o resultado); (4) faça um desenho, se necessário, para explicitar a resposta.
Solução: A expressão instantânea do campo elétrico é $\overline{E}(z,t) = \text{Re}\left\{\overline{E}(z)\exp\left(j\omega t\right)\right\}$ V·m^{-1} ou $\overline{E}(z,t) = \text{Re}\left\{E_0\left[\widehat{x} + \widehat{y}j2\exp\left(-j\pi/3\right)\right]\exp\left(jk_z z\right)\exp\left(j\omega t\right)\right\}$.
Como $j\exp\left(-j\pi/3\right) = \exp\left(j\pi/2\right)\exp\left(-j\pi/3\right) = \exp\left(\pi/6\right)$,
$\overline{E}(z,t) = E_0\left[\widehat{x}\cos\left(\omega t + k_z z\right) + \widehat{y}2\cos\left(\omega t + k_z z + \pi/6\right)\right]$ V·m^{-1}.
Em $z = 0$, $\overline{E}(z,t) = E_0\left[\widehat{x}\cos\left(\omega t\right) + \widehat{y}2\cos\left(\omega t + \pi/6\right)\right]$ V·m^{-1}. Para $\omega t = 0$, $\overline{E}_1 = E_0\left(\widehat{x} + 1,732\widehat{y}\right)$; $\omega t = \pi/2$, $\overline{E}_2 = E_0\left(0\widehat{x} - \widehat{y}\right)$; $\omega t = \pi$, $\overline{E}_3 = E_0\left(-\widehat{x} - 1,732\widehat{y}\right)$; $\omega t = 3\pi/2$, $\overline{E}_4 = E_0\left(0\widehat{x} + 1\widehat{y}\right)$. Note que a onda propaga-se no sentido negativo de z. A onda é elipticamente polarizada mão direita, $\boxed{\text{EPMD}}$.



Questão 4 (valor 2,5): Uma onda eletromagnética de frequência f propaga em região de alumínio ($\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$ e condutividade $\sigma = 3,8 \times 10^7$ S·m^{-1}). Calcular a profundidade de penetração no alumínio. Dados: $f = 825$ MHz (bandas A e B da telefonia celular).
Solução: A permissividade relativa complexa é $\varepsilon_{rc} = \varepsilon_r \left[1 - j\sigma / (2\pi f \varepsilon_r \varepsilon_0)\right]$. O vetor propagação é $k = j\left[2\pi f / \left(3 \times 10^8\right)\right] \sqrt{\varepsilon_{rc}} = k_R + jk_I$. A constante de atenuação é $\mathrm{Re}(k) = k_R$. A profundidade de penetração é $d_p = 1/k_R$. Substituindo os valores, $\varepsilon_{rc} = 1 - j8,28 \times 10^8$; $k = (3,52 + j3,52) \times 10^5$ m^{-1}; $k_R = 3,52 \times 10^5$ m^{-1}; $\boxed{d_p = 2,84 \times 10^{-6} \text{ m}}$.
Tabela de correspondência entre as provas.

P1	P2	P3	P4
Q1	Q4	Q3	Q2
Q2	Q1	Q4	Q3
Q3	Q2	Q1	Q4
Q4	Q3	Q2	Q1

Dados das outras provas

Prova **P2**
Q2: Dados: $Z_0 = 50\ \Omega$; $\ell = 150$ cm; $\varepsilon_r = 6$; $f = 200$ MHz; $Z_e = 60 + j20\ \Omega$.
Substituindo os valores, $k = 0.102604$ cm^{-1}, $v_f = 1,2248 \times 10^{10}$ cm·s^{-1} e $\boxed{Z_L = 73 + j8,8\ \Omega}$.
Q1: Dados: $f = 1800$ MHz (bandas C e D da telefonia celular).
Substituindo os valores numéricos, $\varepsilon_{rc} = 1 - j3,79 \times 10^8$; $k = (5,19 + j5,19) \times 10^5$ m^{-1}; $k_R = 5,19 \times 10^5$ m^{-1}; $\boxed{d_p = 1,93 \times 10^{-6} \text{ m}}$.
Prova **P3**
Q3: Dados: $Z_0 = 50\ \Omega$; $\ell = 150$ cm; $\varepsilon_r = 7$; $f = 200$ MHz; $Z_e = 70 + j10\ \Omega$.
Substituindo os valores, $k = 0,1108$ cm^{-1}, $v_f = 1,1339 \times 10^{10}$ cm·s^{-1} e $\boxed{Z_L = 38 + j11,8\ \Omega}$.
Q2: Dados: $f = 2450$ MHz (faixa forno de micro-ondas e WiFi).
Substituindo os valores numéricos, $\varepsilon_{rc} = 1 - j2,79 \times 10^8$; $k = (6,06 + j6,06) \times 10^5$ m^{-1}; $k_R = 6,06 \times 10^5$ m^{-1}; $\boxed{d_p = 1,65 \times 10^{-6} \text{ m}}$.
Prova **P4**
Q4: Dados: $Z_0 = 50\ \Omega$; $\ell = 150$ cm; $\varepsilon_r = 8$; $f = 200$ MHz; $Z_e = 80 + j30\ \Omega$.
Substituindo os valores, $k = 0,1185$ cm^{-1}, $v_f = 1,061 \times 10^{10}$ cm·s^{-1} e $\boxed{Z_L = 40,2 - j28,4\ \Omega}$.
Q3: Dados: $f = 5800$ MHz (frequência de RFID usada pelo sistema de cobrança de pedágio "Sem-Parar").
Substituindo os valores numéricos, $\varepsilon_{rc} = 1 - j1,178 \times 10^8$; $k = (9,32 + j9,32) \times 10^5$ m^{-1}; $k_R = 9,32 \times 10^5$ m^{-1}; $\boxed{d_p = 1,07 \times 10^{-6} \text{ m}}$