Exercício 1 Um ventilador, cujo momento de inércia é 0,4 kg m^2, opera em 600 rpm (rotações por minuto). Ao ser desligado, sua velocidade angular diminui uniformemente até 300 rpm em 2 s, e continua assim até parar.

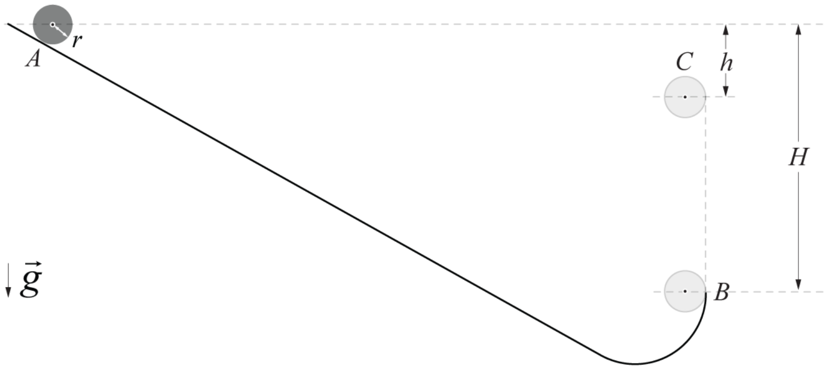
(a) Mostre que a aceleração angular instantânea do ventilador é $\alpha = -5\pi$ rad/s^2. 0,5

(b) Quantas voltas o ventilador realiza até parar? 0,75

(c) Determine a intensidade do torque que causa a aceleração. 0,75

(d) Suponha agora que a aceleração dependa do tempo t, contado a partir do desligamento, assim: $\alpha(t) = -10\pi t$ rad/s^2. Neste caso, quanto tempo leva para o ventilador parar? 1,0

Exercício 2 Na figura abaixo, um objeto de perfil circular (raio r, massa m e momento de inércia I) é colocado no ponto A da canaleta com velocidade inicial nula. Ao ser liberado, ele rola sem deslizar até ser atirado verticalmente para cima, em B, atingindo o nível máximo C antes de voltar a cair.



(a) Por que a velocidade angular do objeto em B é igual à velocidade angular em C? 0,5

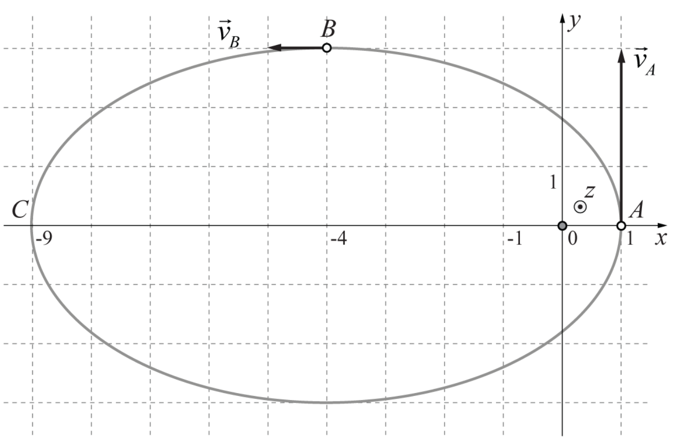
(b) Escreva a expressão da energia mecânica do objeto nos pontos A, B e C. 0,5

(c) Determine a altura h. 1,0

(d) Por que é possível utilizar o princípio da conservação da energia mecânica neste problema, apesar da presença da força de atrito? 0,5

(e) Considere os seguintes perfís possíveis para o objeto, onde cada aro tem massa $m/5$ e a massa dos raios é desprezível (ou seja, todos os perfís têm massa m). Ordeneo-os pelo momento de inércia. 0,5

Exercício 3 Na figura abaixo o corpo branco, de massa m, orbita o corpo cinza, como consequência de uma interação atrativa desconhecida entre eles. Considere o sistema de referência ilustrado.



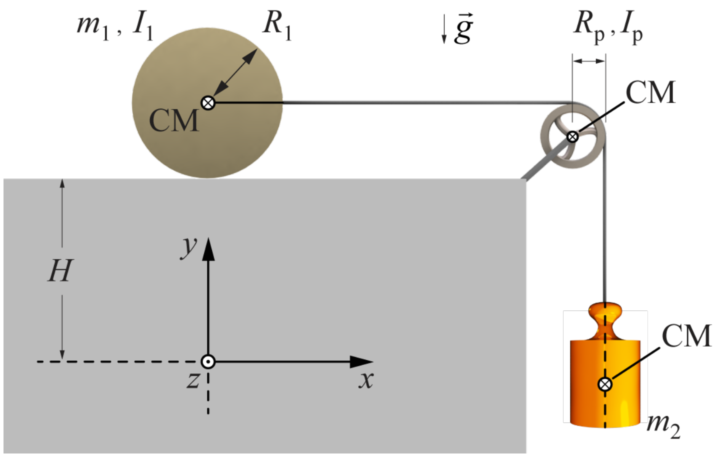
(a) O momento angular externo do corpo branco no ponto A da trajetória é $\vec{L}_A = 3m\hat{k}$. Mostre que $\vec{L}_B = \vec{L}_A$. 0,5

(b) A relação entre $\vec{L}_A$ e $\vec{L}_B$ é válida para quaisquer dois pontos da órbita. Sabendo disso, o que se pode dizer sobre a força entre os dois corpos? 0,5

(c) Determine o *vetor* de velocidade do corpo branco no ponto C da trajetória. 0,5

(d) Esboce os vetores $\vec{r}$ (posição), $\vec{a}$ (aceleração) e $\vec{L}_B$, bem como os versores da base polar ($\hat{r}$ e $\hat{\theta}$), no ponto B da trajetória. 0,5

Exercício 4 Considere a situação apresentada na figura abaixo. Inicialmente, a polia e os corpos 1 e 2 estão em repouso, quando então o corpo 1 é liberado sob a ação da gravidade. Existe atrito entre o corpo 1 e a superfície.



(a) Esboce as forças que agem sobre a polia e os corpos 1 e 2. Atenção para o ponto de aplicação das forças. 0,5

(b) Escreva as equações de movimento (segunda lei de Newton), de rotação e de translação, dos três corpos (não precisa resolvê-las). Dica: para as equações de rotação, utilize o centro de massa de cada corpo como sistema de referência. 0,5

(c) Suponha que o corpo 1 não deslize, assim como o cabo não desliza sobre a polia. Neste caso, escreva as condições de não-deslizamento que relacionam a aceleração linear a dos copos 1 e 2 com as acelerações angulares α_1, do corpo 1, e α_p, da polia. 0,5

(d) Determine o *vetor* momento angular *interno* do corpo 1 (ie, com relação ao seu centro de massa) em função do tempo, supondo que a tenha sido dado. 0,5

(e) Determine o *vetor* momento angular *externo* do corpo 1, com relação ao sistema de referência ilustrado na figura, em função do tempo. 1,0

Formulário

$\vec{L} \doteq \vec{r}\times\vec{p} = I\vec{\omega}$	$\lvert\vec{L}\rvert = mrv\,\mathrm{sen}\,\phi = mr_\perp v = mrv_\perp$	$\vec{L} = \vec{L}_{\mathrm{int}} + \vec{L}_{\mathrm{ext}}$, $\vec{L}_{\mathrm{ext}} = \vec{R}\times\vec{P}$
$\vec{\tau} \doteq \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = I\vec{\alpha}$	$\lvert\vec{\tau}\rvert = rF\,\mathrm{sen}\,\phi = r_\perp F = rF_\perp$	$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}$, $\hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}$
$K = \dfrac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega_{\mathrm{CM}}^2$	$U = mgz_{\mathrm{CM}}$	$I = \sum_i m_i r_i^2$
$\omega \doteq \dfrac{d\theta}{dt}$	$\bar{\omega} \doteq \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$\alpha \doteq \dfrac{d\omega}{dt}$
$\bar{\alpha} \doteq \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$	$\vec{r} = r\hat{r}$	$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$

Resolução

Exercício 1

(a) A velocidade angular do ventilador decresce uniformemente, de modo que a aceleração angular equivale à aceleração angular média, que por sua vez pode ser calculada a partir dos dados do exercício:

$$\alpha \doteq \frac{d\omega}{dt} \equiv \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_4 - \omega_0}{2},$$

onde

$$\omega_0 \equiv \omega(t=0) = 600 \frac{\text{rotações}}{\text{min}} \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rotação}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 20\pi \text{ rad/s} \quad \text{e}$$
$$\omega_4 \equiv \omega(t=4) = 300 \frac{\text{rotações}}{\text{min}} \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rotação}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 10\pi \text{ rad/s}.$$

Assim, $\alpha = -5\pi$ rad/s^2.

(b) Como a aceleração é constante, podemos utilizar a equação de Torricelli para encontrar o deslocamento angular do ventilador, desde $\omega_0 = 20\pi$ rad/s até $\omega = 0$:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta \quad \Rightarrow \quad 0 = (20\pi)^2 - 10\pi\Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = 40\pi.$$

Como cada volta corresponde a 2π rad, a quantidade de voltas dadas pelo ventilador até parar é $(40\pi)/(2\pi) = 20$.

(c) Pela segunda lei de Newton para rotações, $\tau = I\alpha$, onde τ é o módulo do torque, I é o momento de inércia do ventilador e α, o módulo da aceleração angular. Assim, o torque responsável pela aceleração do ventilador é:

$$\tau = 0{,}4\,\text{kg}\,\text{m}^2 \cdot 5\pi \text{ rad/s}^2 = 2\,\text{N}\,\text{m}.$$

(d) Neste caso, como a aceleração não é constante, temos de integrar $\alpha(t)$ e usar a condição inicial $\omega_0 = 20\pi$ rad/s:

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha(t) \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{d\omega}{dt'}\,dt' = \int_0^t \alpha(t')\,dt' \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \int_{\omega(0)}^{\omega(t)} d\omega = -10\pi \int_0^t t'\,dt' \quad \Rightarrow \quad \omega(t) - \omega(0) = -5\pi t^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \omega(t) = 5\pi(4 - t^2).$$

Assim, o ventilador parará no instante $t_?$ tal que $\omega(t_?) = 0$, ou seja, quando a condição $5\pi(4 - t_?^2) = 0$ for válida. Isso ocorre para $t_? = 2$ s, que é a resposta procurada. A solução $t_? = -2$ não tem significado físico.

Exercício 2

(a) Entre B e C o torque sobre o objeto (com relação ao seu centro de massa) é nulo, pois ele não está em contato com a canaleta. Como consequência, seu momento angular interno é conservado:

$$L_C = L_B \quad \Rightarrow \quad I\omega_C = I\omega_B \quad \Rightarrow \quad \omega_C = \omega_B.$$

(b) Colocando a origem do sistema de referência no nível A, orientado para cima, teremos:

$$E_A = 0$$
$$E_B = -mgH + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2$$
$$E_C = -mgh + \frac{1}{2}I\omega_C^2.$$

(c) Como o objeto rola sem deslizar, vale a condição de não-deslizamento $v_B = \omega_B r$. Utilizando essa informação e o resultado $\omega_B = \omega_C$ [item(a)] nas expressões da energia mecânica [item (b)], obtemos:

$$\begin{aligned} E_A &= 0 \\ E_B &= -mgH + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right) v_B^2 \\ E_C &= -mgh + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2} v_B^2. \end{aligned}$$

Como a força de atrito e a força normal não realizam trabalho, e a força gravitacional é conservativa, a energia mecânica é conservada. Assim, $E_A = E_B = E_C$. Podemos obter h a partir de $E_A = E_C$:

$$E_A = E_C \quad \Rightarrow \quad 0 = -mgh + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2} v_B^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2g}\frac{I}{mr^2} v_B^2.$$

Falta determinar v_B, o que pode ser feito da equação $E_A = E_B$:

$$E_A = E_B \quad \Rightarrow \quad 0 = -mgH + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right) v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = \frac{2mgH}{m + I/r^2}.$$

Deste modo,

$$h = \frac{H}{1 + mr^2/I}.$$

(d) Podemos utilizar o princípio de conservação da energia mecânica porque as forças não conservativas não realizam trabalho: a força de atrito não realiza trabalho porque não há deslizamento (ou seja, $d\vec{r} = \vec{0}$ na integral do trabalho) e a força normal, porque age perpendicularmente ao deslocamento. Resta apenas a força gravitacional, que é conservativa.

(e) Quanto mais afastados os aros estiverem do centro, maior será o momento de inércia. Assim, como o perfil 4 é o que tem mais aros afastados do centro, I_4 é o maior deles. Inversamente, o perfil 3 é o que tem mais aros concentrados próximo ao centro, de modo que I_3 é o menor deles. Seguindo o mesmo raciocínio, mas agora comparando apenas os perfís 1 e 2, concluimos que $I_2 < I_1$. Então,

$$I_3 < I_2 < I_1 < I_4.$$

Exercício 3

(a) Observando a ilustração, podemos identificar que, no ponto B da trajetória, $\vec{r}_B = -4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ e $v_B = -\hat{\imath}$. Logo,

$$\vec{L}_B \doteq m\vec{r}_B \times \vec{v}_B = m(-4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \times (-\hat{\imath}) = -3m\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = 3m\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = 3m\hat{k} = \vec{L}_A.$$

(b) Como o momento angular externo é conservado, $\vec{\tau} \doteq d\vec{L}/dt = 0$, ou seja, o torque exercido sobre o corpo em órbita é nulo. Mas como $\vec{r}$ varia ao longo da trajetória e $\vec{F} \neq \vec{0}$, então o torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ só pode ser nulo se $\vec{r} \parallel \vec{F}$, ou seja, se a força for central. Em outras palavras, essa situação só é possível se o vetor da força de interação entre os corpos for paralelo à reta que liga os dois corpos. Como foi dito que é uma interação atrativa, podemos ainda afirmar que $\vec{F}$ aponta na direção do corpo na origem do sistema de referência.

(c) Como o momento angular externo é conservado, sabemos que $\vec{L}_C \doteq m\vec{r}_C \times \vec{v}_C = 3m\hat{k}$. Mas podemos deduzir, da ilustração, que $\vec{r}_C = -9\hat{\imath}$. Assim,

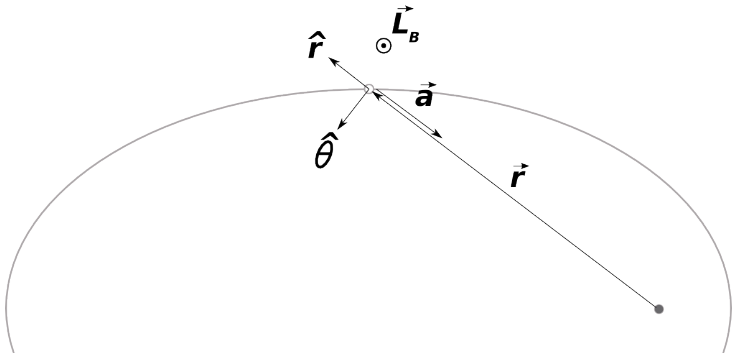
$$m(-9\hat{\imath}) \times \vec{v} = 3m\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \hat{\imath} \times \vec{v} = -\frac{1}{3}\hat{k} = -\frac{1}{3}\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath} \times \left(-\frac{1}{3}\hat{\jmath}\right),$$

de onde concluimos que $\vec{v} = -\frac{1}{3}\hat{\jmath}$. Alternativamente, podemos notar que $\vec{r}_C \perp \vec{v}_C$. Deste modo,

$$|\vec{L}_C| = m|\vec{r}_C| \cdot |\vec{v}_C| \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}_C| = \frac{|\vec{L}_C|}{m|\vec{r}_C|} = \frac{3m}{9m} = \frac{1}{3}$$

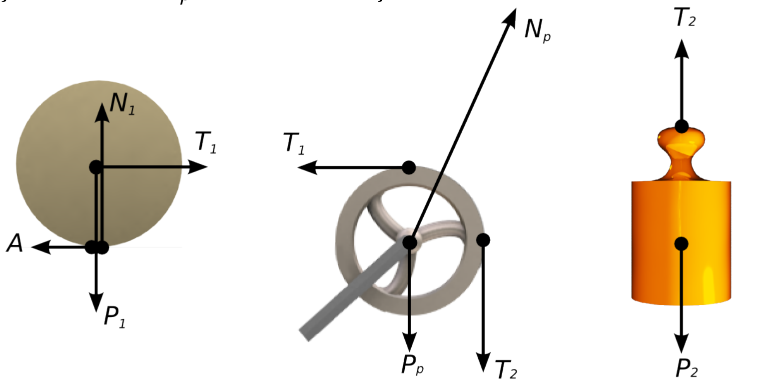
e sua orientação pode ser deduzida pela regra da mão direita.

(d)



Exercício 4

(a) $\vec{P}_p$, $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ são as forças-peso da polia e dos corpos 1 e 2, respectivamente. $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ são as trações no cabo. $\vec{A}$ é a força de atrito e $\vec{N}_p$ e $\vec{N}_1$ são as forças-normais.



(b) Para as equações de rotação, é mais útil descrevê-las no sistema de referência do centro de massa de cada corpo. Ou seja, é a descrição da variação do momento angular interno que nos interessa.

$$\begin{aligned}
\text{Corpo 1}: \quad & T_1 - A = m_1 a \\
& N_1 - P_1 = 0 \\
& R_1 A = I_1 \alpha_1 \\
\text{Corpo 2}: \quad & P_2 - T_2 = m_2 a \\
\text{Polia}: \quad & \vec{N}_p + \vec{P}_p + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0} \\
& (T_2 - T_1) R_p = I_p \alpha_p
\end{aligned}$$

(c) Para que não haja deslizamento entre o corpo 1 e a superfície horizontal, qualquer deslocamento linear s do centro de massa do corpo 1 deve ocorrer concomitantemente com um deslocamento angular θ tal que $s = R_1\theta$. Derivando essa expressão duas vezes, obtemos a relação desejada: $a = R_1\alpha_1$. Analogamente, para a polia encontramos: $a = R_p\alpha_p$. Resumindo,

$$a = R_1\alpha_1 = R_p\alpha_p. \tag{1}$$

(d) $L_{1,\text{int}}(t) = I_1\omega_1(t)$. Como a é constante, $\alpha_1 = a/R_1$ (condição de não-deslizamento) também é constante. Logo, $\omega_1(t) = \omega_1(0) + \alpha t = at/R_1$, pois $\omega_1(0) = 0$ (condição inicial dada). Deste modo, $L_{1,\text{int}}(t) = I_1 at/R_1$. Pela regra da mão direita, o momento angular do corpo 1 aponta no sentido $-\hat{k}$ do sistem de referência ilustrado. Então,

$$\vec{L}_{1,\text{int}} = -\frac{I_1}{R_1} a t \hat{k}.$$

(e) $\vec{L}_{1,\text{ext}}(t) = m_1\vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t)$, onde $\vec{r}_1$ e $\vec{v}_1$ são a posição e a velocidade do centro de massa do corpo 1. Como a é constante, podemos escrever $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_1(0) + \vec{v}_1(0)t + \frac{1}{2}at^2$ e $\vec{v}_1(t) = \vec{v}_1(0) + \vec{a}t$.

Identificando as condições iniciais $\vec{r}_1(0) = (H + R_1)\hat{j}$ e $\vec{v}_1(0) = \vec{0}$, bem como $\vec{a} = a\hat{\imath}$, teremos $\vec{r}_1(t) = \frac{1}{2}at^2\hat{\imath} + (H + R_1)\hat{j}$ e $\vec{v}_1 = at\hat{\imath}$. Assim,

$$\vec{L}_{1,\text{ext}}(t) = m_1 \left[\frac{1}{2}at^2\hat{\imath} + (H + R_1)\hat{j}\right] \times \left(at\hat{\imath}\right) = -m_1(H + R_1)at\hat{k}.$$

Alternativamente, podemos observar que $H + R_1$ é a componente de $\vec{r}_1(t)$ perpendicular a $\vec{v}_1(t)$, de modo que $|\vec{L}_{1,\text{ext}}| = m_1(H + R_1)|\vec{v}_1(t)|$. Mas a é constante e $\vec{v}_1(0) = \vec{0}$, de modo que $|\vec{v}_1(t)| = at$. Por conseguinte, $|\vec{L}_{1,\text{ext}}| = m_1(H + R_1)at$ e sua orientação pode ser obtida pela regra da mão direita.