Equação de Dirac: queremos uma eq. relativística para o elétron

Ref.: Bethe-Jackiw

1. Primeira tentativa: eq. de Klein-Gordon

Podemos, heuristicamente, derivar a eq. de Schrödinger partindo de $E = \frac{p^2}{2m}$ (1). Para que $e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)/\hbar}$ seja solução com $E, \mathbf{p}$ satisfazendo (1) trocamos $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $\mathbf{p} \to \frac{\hbar}{i}\nabla$, com isso

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\psi$$

Generalizemos para o caso relativístico. ~~onde queremos~~ ~~que~~ $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

Antes disso

Notemos que podemos escrever

Caso relativístico

$$\left.\begin{array}{l} E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{p}^\mu \to \frac{\hbar}{i}\nabla \Rightarrow \mathbf{p}^j = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} \end{array}\right\} \Rightarrow p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \Downarrow p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right) \Rightarrow \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$\boxed{p_\mu \to i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \quad (1)$$

$$x^0 \equiv ct$$

ou seja, a substituição feita pode ser posta numa forma covariante! Bom!

Mais, a conservação de probabilidade também terá uma forma covariante!

DIRAC 2

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial(ct)}\frac{\rho}{c} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu}J^\mu = 0$$ onde

$$J^\mu = (\rho/c, \mathbf{J})$$

Ataquemos agora o caso relativístico: queremos uma rel. de dispersão $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ (1)! Para aplicar (DIRAC1-1) devemos decidir se tomamos a ~~~~raiz quadrada. A raiz quadrada leva a um operador não local $\Rightarrow$ trabalhamos c/ o E^2:

$$(1) \xRightarrow{\text{DIRAC1-1}} \quad -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -c^2\hbar^2\nabla^2\psi + m^2c^4\psi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}\psi - \nabla^2\psi + \underbrace{\frac{m^2c^2}{\hbar^2}}_{\mu^2}\psi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi + \mu^2\psi = 0$$

Eq. de Klein-Gordon.

Comentários:

20/05

1) A eq. de Klein-Gordon é de 2ª ordem no tempo. Em MQ não relativística (MQNR) a eq. é de 1ª ordem! A diferença agora é que $\psi(x,0)$ (sozinho) não especifica completamente a evolução, já que precisa de $\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0)$! Isso vai de encontro a ψ ter toda a informação $\Rightarrow$

2) Quantidade conservada (análogo a $\psi^*\psi$ na MQNR): da eq. de Klein-Gordon segue que

$$\left.\begin{aligned} &\psi^* \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \hbar^2\psi^*\nabla^2\psi + m^2c^2\psi^*\psi = 0 \\ &\psi \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi^* - \hbar^2\psi\nabla^2\psi^* + m^2c^2\psi^*\psi = 0 \end{aligned}\right\} \ominus \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) - \nabla\left[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right]\hbar^2 = 0$$

Definindo

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

(reais)

$$\mathbb{J} = \frac{\hbar}{i2m}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbb{J} = 0$$

em princípio poderíamos tratar ρ como sendo a densidade de probabilidade como em MQNR!

3) ρ não é positiva definida! Soluções do tipo

$\varphi_{0p} = e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)/\hbar}$ para Klein-Gordon $\Rightarrow E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4$

logo $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$ e preciso dos 2 sinais para ter um conjunto completo

Mas $\rho_{0p} = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi_{0p}^*\frac{\partial\psi_{0p}}{\partial t} - \psi_{0p}\frac{\partial\psi_{0p}^*}{\partial t}\right) = \frac{E}{mc^2}\psi^*\psi < 0$ se $E = -\sqrt{\ }$!

logo, não dá para manter a interpretação probabilística ⇒ deixo de lado! ⇒ posso interpretar ρ como densidade de carga. ?!

Exercício: Paradoxo de Klein.

4) Interação com campo E.M. no limite de baixas energias:

Campo magnético é introduzido através de substituição mínima.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P} \to \mathbb{P} - \frac{q}{c} A \\ E \to E - q\varphi \end{array}\right\} \quad \cancel{p_\mu}\, p^\mu \to \cancel{p_\mu}\, p^\mu - q \cancel{A_\mu}\, A^\mu \qquad \text{onde } A^\mu = (c\varphi, \mathbb{A})$$

do ~~da~~ do E.M. sabemos que A^μ é um quadrivetor! OK!

Neste caso a eq. de Klein-Gordon fica sendo

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\varphi\right)^2 \psi = \left(\frac{c\hbar}{i} \nabla - q\mathbb{A}\right)^2 \psi + m^2 c^4 \Psi$$

Escrevamos $\Psi = \psi'(x,t)\, e^{-i mc^2 t/\hbar}$ (preparando p/ limite NR quando $E \simeq mc^2 + \ldots$

$$\Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t^2} + 2i\hbar\left[mc^2 - e\varphi\right]\frac{\partial \psi'}{\partial t} - e\varphi\left[2mc^2 - e\varphi + i\hbar \frac{\partial \log \varphi}{\partial t}\psi'\right]$$

$$= \left(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + 2ie\hbar c \mathbb{A}\cdot\nabla + ie\hbar c(\nabla\cdot\mathbb{A}) + e^2 \mathbb{A}^2\right)\psi'$$

DIRAC5

Assimindo que: $\left\{ \begin{array}{l} \left| i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} \right| = O(e\varphi\psi') \\ |e\varphi| \ll mc^2 \end{array} \right.$ $\left| \frac{\partial \psi'}{\partial t} \right| \ll \frac{mc^2}{\hbar}$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{iq\hbar}{mc} \vec{A}\cdot\nabla + \frac{iq\hbar}{2mc} \nabla\cdot\vec{A} + \frac{q^2 A^2}{2mc^2} + e\varphi \right] \psi'$$

∴ faltou a interação de dipolo de Pauli!

<u>Exercício</u>: Eq. de Klein Gordon ⊕ $V \propto \frac{1}{r}$

—— // —— // ——

1,5 ~~2.~~ <u>Digressão</u>: <u>invariância</u> <u>relativística</u> [Pulei e mudei para DIRAC 14]

Quando mudamos de ref. ~~por~~ ~~[illegible]~~ inerciais temos que

$$x^\mu \Longrightarrow x'^\mu \underset{\text{linear}}{=} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (1) \quad (\text{simbolicamente } x' = \Lambda x)$$

Devemos separar: (i) covariância por Lorentz, que indica como quantidades mudam por trans. Lor. e.g. (1)

(ii) e invariância por Lorentz, i.e., qual o valor é o mesmo em 2 referenciais
$x^\mu x_\mu$ = inv. de Lorentz

As eq. de Maxwell são ~~invariantes~~ covariantes por trans. de Lorentz pois preservam a forma sob trans. dado que $B \to B' = \ldots$ $E \to E' = \ldots$

que derivam do fato de A^μ ser 4-vetor!

2. Eq. de Dirac

Para que estilo fixe a evolução temporal ⇒ eq deve ser de primeira ordem no tempo. Como ct e $\vec{x}$ têm o mesmo status em relatividade tentamos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \frac{\hbar c}{i}\sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Psi + \beta mc^2 \Psi \quad (1)$$

dimensão de energia

onde vamos "determinar" α_j e β para que uma onda plana $e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)/\hbar}$ seja solução se $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ (2). Por ora, deixamos a possibilidade de α_j e β serem matrizes.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(1) \Rightarrow \quad -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = \left(-i\hbar c\sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta mc^2\right)\left(-i\hbar c\sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta mc^2\right)\Psi$$

$$\Rightarrow -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = -\hbar^2c^2\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\Psi - i\hbar mc^3\sum_{j=1}^{3}(\alpha_j\beta + \beta\alpha_j)\frac{\partial \Psi}{\partial x_j}$$

$$+ \beta^2 m^2 c^4 \Psi \quad (3)$$

Para (3) satisfazer (2) p/ onda plana (3) deve ser eq. de Klein-Gordon.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = \delta_{jk} 2 & (1) \\ \alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0 \quad (*) & (2) \\ \alpha_j^2 = \beta^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

logo, eq $\overset{2}{(*)}$, temos que α_j e β são matrizes $(N \times N)$

Propriedade dos α_j e β:

1) A dimensão N deve ser par:

$(2) \Rightarrow \quad \alpha_j \beta = -\beta \alpha_j \xRightarrow{\det} \det \alpha_j \det \beta = \det(-1) \det \alpha_j \det \beta$

$\therefore \det(-1) = (-1)^N = +1$

logo N é par

2). $\det \overset{\alpha_j}{\beta} \neq 0$ de $(3) \Rightarrow (\det \alpha_j)^2 = (\det \beta)^2 = 1$

logo admitem inversa

3) As matrizes tem traço nulo:

~~(2) ⇒ Tr[αj β] = −Tr[β αj] =~~

$(2) \overset{\beta = \beta^{-1}}{\Rightarrow} \quad \alpha_j = -\beta \alpha_j \beta \Rightarrow Tr[\alpha_j] = -Tr[\beta \alpha_j \beta] = -Tr[\beta^2 \alpha_j] = -Tr(\alpha_j)$

$(2) \quad \beta = -\alpha_j \beta \alpha_j \xRightarrow{\text{análogo}} Tr(\beta) = Tr(-\beta)$

Em (3+1) dimensões precisamos de 4 matrizes.

Logo $N=2$, está descartado. Uma escolha é

$$\beta = \begin{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ 2\times 2}}{I} & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad e \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Exercício: se $\alpha_j \to S^{-1}\alpha_j S$ e $\beta \to S^{-1}\beta S$ as eq's (Dirac 7-13) são satisfeitas.

~~"Carga" conservado:~~

~~$\Psi^\dagger$ (Eq. Dirac) $\Rightarrow$~~ $\cancel{\Psi^\dagger i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \sum_j \Psi^\dagger \alpha_j \frac{\partial}{\partial x^j} \Psi + mc^2 \Psi^\dagger \beta \Psi}$

~~complexo conjugado~~ $\cancel{-i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar c}{i} \sum_j}$

A eq. de Dirac pode ser escrita como

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta m c^2 \right) \Psi \quad (1)$$

É natural definir o produto escalar

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int d^3x \, \Psi_1^\dagger \Psi_2$$

com isso para que $H = H^\dagger \Rightarrow \alpha_j = \alpha_j^\dagger$ e $\beta = \beta^\dagger$

, i.e., as matrizes são hermitianas!

Carga conservada

$\psi^\dagger$(Dirac 8-1) $\Rightarrow$ $$i\hbar\, \psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\hbar c}{i}\sum_j \psi^\dagger \alpha^j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi \quad ①$$

Complexo conjugado $\rightarrow$ $$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar c}{i}\sum_j \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_j}\alpha^j \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi \quad ②$$

$$① - ② \Rightarrow i\hbar\left(\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}\psi\right) = \frac{\hbar c}{i}\sum_j \left(\psi^\dagger \alpha^j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x^j}\psi^\dagger \alpha_j \psi\right)$$

i.e.,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^\dagger \psi\right) = \frac{\hbar c}{i}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\psi^\dagger \alpha^j \psi\right)$$

defino $J^j = c\,\psi^\dagger \alpha^j \psi$

$\rho = \psi^\dagger \psi$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$ ③

Oh!

Note que a densidade da quantidade conservada é $\psi^\dagger\psi \geq 0 \Rightarrow$ posso interpretá-la como probabilidade!

Forma covariante da Eq. de Dirac:

Vamos escrever a Eq. de Dirac numa notação sugestiva que indica a sua covariância. MAS ISSO DEVE SER PROVADO POSTERIORMENTE!

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar}{i} c\, \vec{\alpha} \cdot \nabla \Psi + \beta m c^2 \Psi \quad (1)$$

Ond $(\vec{\alpha} = \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$

Agora $\beta \times (1) \Rightarrow$

$$i\hbar \beta \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \beta \vec{\alpha} \cdot \nabla \Psi + m c^2 \Psi$$

Agora define:

γ^μ c/ $\gamma^0 = \beta \qquad \gamma^j = \beta \alpha^j \quad (2)$

$$i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial (ct)} + \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \Psi - mc\Psi = 0$$

$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$

$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}$

Agora $x^0 = ct$, logo

$\therefore$ $$\boxed{\left(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \Psi = 0} \quad \boxed{3}$$

As propriedades de γ^μ são:

i) $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$

De fato: $\gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0$ e $\beta^3 = \beta \Rightarrow$ ok

$\gamma^{j\dagger} = \alpha^{j\dagger} \beta^\dagger = \alpha^j \beta$ mas $\gamma^0 \gamma^j \gamma^0 = \beta \beta \alpha^j \beta = \alpha^j \beta$ ok

ii) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ c/ $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

De fato
$$\gamma^0\gamma^0 + \gamma^0\gamma^0 = \beta^2 + \beta^2 = 2$$
$$\gamma^j\gamma^j + \gamma^j\gamma^j = 2\beta\alpha^j\beta\alpha^j = -2\beta\beta\alpha^j\alpha^j = -2$$
$$\gamma^0\gamma^j + \gamma^j\gamma^0 = \beta\beta\alpha^j + \beta\alpha^j\beta = \alpha^j - \alpha^j\beta^2 = 0$$
$$\gamma^j\gamma^k + \gamma^j\gamma^k = \beta\alpha^j\beta\alpha^k + \beta\alpha^k\beta\alpha^j = -(\alpha^j\alpha^k + \alpha^k\alpha^j) = 2\delta_{jk}$$

iii) É costume definir $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$

$\gamma_0 = \gamma^0$ $\gamma_1 = -\gamma^1$ $\gamma_2 = -\gamma^2$ $\gamma_3 = -\gamma^3$

22/05/09

Reescrevamos a lei de conservação (DIRAC 9-3) na nova notação.

Para tanto definimos
$$\bar{\Psi} = \psi^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\beta$$

De (DIRAC 9-3)
$$\rho = \psi^\dagger\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \bar{\Psi}\gamma^0\psi$$
$$j^j = c\psi^\dagger\alpha^j\psi = c\psi^\dagger\beta\beta\alpha^j\psi = c\bar{\Psi}\gamma^j\psi$$

Agora
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot J = 0 \Rightarrow \frac{\partial \overbrace{\rho}^{\bar{\Psi}\gamma^0\psi}}{\partial t} + c\nabla\cdot(\bar{\Psi}\vec{\gamma}\psi) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^0}\bar{\Psi}\gamma^0\psi + \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}\bar{\Psi}\gamma^j\psi = 0 \Rightarrow J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\psi \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu}J^\mu = 0$$

Mais sobre matrizes de Dirac:

As matrizes de Dirac (em (3+1) dimensões) são $4\times 4 \Rightarrow$ existem 16 matrizes independentes que ~~tomamos como~~ escolhemos

$$\left.\begin{array}{llll} \mathbb{1} \ (1) & \gamma^\mu \ (4) & \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \ (6) & \\ \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \ (1), & \gamma^5\gamma^\mu \ (4) & & \end{array}\right] \equiv \Gamma_n$$

notação

~~Propriedades:~~

~~1) $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$~~

As seguintes propriedades podem ser provadas (e.g. por exaustão):

(i) Todos os Γ_n satisfazem: $(\Gamma_n)^2 = \pm \mathbb{1}$

e.g., $(\sigma^{\mu\nu})^2 = -\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = -\frac{1}{4}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\nu\gamma^\mu]$

$= -\frac{1}{4}[4\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\nu\gamma^\mu] = \pm 1$

(ii) Para todos os Γ_n, exceto $\mathbb{1}$, existe uma matriz Γ^m tal que

$$\Gamma^n\Gamma^m = -\Gamma^m\Gamma^n$$

note que
$[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^5\gamma^\alpha] = 0$
$\alpha \neq \mu, \nu$ e
$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$

(iii) Dadas duas matrizes Γ_n e Γ_m $(n \neq m)$ existe uma matriz $\Gamma_k^{\neq \mathbb{1}}$ tal que $\Gamma_n\Gamma_m = \Gamma_k$

A partir destas propriedades podemos ~~mostrar que~~ os seguintes teoremas

Teorema 1: $\mathrm{Tr}[\Gamma_\ell] = 0$ (exceto para $\Gamma_\ell = \mathbb{1}$)

seja Γ_n t.q.

$$\Gamma_n\Gamma_\ell = -\Gamma_\ell\Gamma_n \Rightarrow \Gamma_\ell = -\underset{(\Gamma_n)^2}{(\pm)}\Gamma_n\Gamma_\ell\Gamma_n \overset{\mathrm{Tr}}{\Rightarrow} \mathrm{Tr}\,\Gamma_\ell = -\pm\mathrm{Tr}(\Gamma_n\Gamma_\ell\Gamma_n) = -\pm\mathrm{Tr}(\Gamma_\ell\underset{(\pm)}{\Gamma_n^2}) = -\mathrm{Tr}[\Gamma_\ell]$$

OK

Teorema 2: $\sum_{n=1}^{16} a_n \Gamma_n = 0 \quad (1) \implies a_n = 0$ para todos os n's!

$$\Gamma_m \otimes \sum_{n=1}^{16} a_n \Gamma_n = a_m \Gamma_m \Gamma_m + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{16} a_n \underbrace{\Gamma_m \Gamma_n}_{=\Gamma_j} = 0$$

$$Tr[a_m \underbrace{\Gamma_m \Gamma_m}_{(\pm 1)}] + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{16} a_n \, Tr[\Gamma_j] = 0 \implies (\pm 4) a_m = 0 \implies \boxed{a_m = 0}$$

$Tr[\Gamma_j] = 0$

Teorema 3: Qualquer matriz X pode ser escrita como

$$X = \sum_{k=1}^{16} a_k \Gamma_k$$

de fato (1) $\Rightarrow \{\Gamma_n\}$ é base, c.q.d!

$$\implies Tr[\Gamma_m X] = a_m Tr[\Gamma_m \Gamma_m] + \sum_{k\neq m} a_k Tr(\Gamma_m \Gamma_k)$$

$Tr(\Gamma_m \Gamma_k) = 0$

$$= 4(\pm) a_m \implies a_m = (\pm) \frac{1}{4} Tr(\Gamma_m X)$$

$Tr[\Gamma_m \Gamma_m]$

Exercício: Mostre que

(i) Se $[X, \gamma^\mu] = 0$ p/ $\mu = 0,1,2,3 \implies X$ é prop. to I

(ii) dado Dois conjuntos γ^μ e γ'^μ que satisfazem a álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, então existe uma matriz não singular S

tal que $\gamma'^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}$

3. Covariância da eq. de Dirac:

3.a) Quando fazemos uma mudança de referencial inercial temos que $x^\mu = (ct, \vec{x})$ transforma-se por

$$x^\mu \Longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\text{transf. linear})$$

que representamos por $x' = \Lambda x$

x^μ é um exemplo de quantidade que tem transf. ~~de~~ bem definida quando mudamos de coordenadas. O objetivo é obter eqs. ~~da~~ que ~~tenham~~ preservem a ~~mesma~~ forma numa mudança de referencial. Isso é "facilmente" alcançado quando ~~escrevemos~~ expressamos as eqs. em termos de quantidades que se transf. linearmente em mudanças de referencial. Assim uma equação:

$$x^\mu = 0 \Rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = 0 \Rightarrow x'^\mu = 0$$

Vejamos como Ψ transforma-se numa mudança de coordenadas. Comecemos por

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} = \Lambda^\lambda{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}$$

com isso

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\Psi = 0 \Rightarrow \left(i\hbar\gamma^\mu \Lambda^\lambda{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} - mc\right)\Psi = 0 \quad (1)$$

~~Note que~~ Mas $\Lambda^\lambda{}_\mu \gamma^\mu$ satisfaz a álgebra de Clifford.

$$\{\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\gamma^{\mu}, \Lambda^{\lambda'}{}_{\nu}\gamma^{\nu}\} = \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\Lambda^{\lambda'}{}_{\nu}\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\} = \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\Lambda^{\lambda'}{}_{\nu}\, 2g^{\mu\nu}$$

Mas $g'^{\lambda\lambda'} = \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\Lambda^{\lambda'}{}_{\nu}g^{\mu\nu}$

$\overset{\shortparallel}{g^{\lambda\lambda'}}$

$\therefore \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\gamma^{\mu}$ satisfaz a álgebra de Clifford. Logo existe S tal que

$$\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = S^{-1}\gamma^{\lambda}S \qquad (1)$$

De (DIRAC14-1) $\Rightarrow$ $i\hbar\, S^{-1}\gamma^{\lambda}S\dfrac{\partial}{\partial x'^{\lambda}}\psi - mc\psi = 0$

$$\Rightarrow i\hbar\,\gamma^{\lambda}\frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}}(S\psi) - mc(S\psi) = 0$$

Agora definimos que os espinores de Dirac transformam-se por

$$\Psi'(x') = S\Psi(x)$$

Com isso a eq. de Dirac é covariante!

Parentesis matemático: transf. de Lorentz formam um grupo.

$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ e S são representações distintas das transformações!

Exercício: Mostre que S pode ser escrito como $e^{-i\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}$ + boost x e rot. g. ⟵ 29/05/09

Algumas propriedades interessantes:

i) Sabemos que $(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}$

Logo

Logo, $\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = \gamma^0 (\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\gamma^{\mu})^{\dagger}\gamma^0$

$$= \gamma^0 (S^{-1}\gamma^{\lambda} S)^{\dagger}\gamma^0$$

$$= \gamma^0 S^{\dagger}\gamma^0 \gamma^{\lambda} (\gamma^0 S^{\dagger}\gamma^0)^{-1}$$

Logo: $\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = S^{-1}\gamma^{\lambda} S = (\gamma^0 S^{\dagger}\gamma^0)\gamma^{\lambda}(\gamma^0 S^{\dagger}\gamma^0)^{-1}$

$$\Rightarrow S\gamma^0 S^{\dagger}\gamma^0\gamma^{\lambda} = \gamma^{\lambda} S(\gamma^0 S^{\dagger}\gamma^0)$$

Pelo teorema no exercício da página (DIRAC 13):

$$S\gamma^0 S^{\dagger}\gamma^0 = b\,I \Rightarrow \left.\begin{array}{c} S\gamma^0 S^{\dagger} = b\gamma^0 \\ \downarrow \dagger \\ S\gamma^0 S^{\dagger} = b^*\gamma^0 \end{array}\right] \quad b \equiv \text{real}$$

Normalizando S tq $\det S = 1$ (só definida a menos de constante!)

$$\Rightarrow \underbrace{\det S \;\det\gamma^0 \;\det S^{\dagger}}_{1} = \det b\gamma^0 = b^4$$

$\therefore b^4 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$

Geradores das transformações.

Consideremos uma transf. de Lorentz

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \quad (1) \quad \text{que é tal que}$$

$$\cancel{x'^{\mu} x'_{\mu} = g^{\mu\alpha} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta}}$$
$$\cancel{\parallel}$$
$$\cancel{x^{\mu} x_{\mu} = g_{\nu\beta}\, x^{\nu} x^{\beta}}$$

$$x'^{\mu} x'_{\mu} = x^{\nu} x_{\nu} \quad (2)$$

Logo, $\cancel{g^{\mu\alpha} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = g_{\nu\beta}}$ A forma infinitesimal de uma transf. de Lorentz é:

$$x'^{\mu} \longrightarrow \underbrace{\left(\delta^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\right)}_{``\Lambda^{\mu}{}_{\nu}|_{inf}} x^{\nu} \quad (3)$$

onde $\Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}$ a determinar

Substituindo (3) em (2) vem:

$$g_{\mu\alpha}\, x'^{\mu} x'^{\alpha} = g_{\mu\alpha} \left(\delta^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\right) x^{\nu} \left(\delta^{\alpha}{}_{\beta} + \Delta\omega^{\alpha}{}_{\beta}\right) x^{\beta} = g_{\nu\beta}\, x^{\nu} x^{\beta}$$

1ª ordem

$$\Rightarrow \quad g_{\mu\alpha}\left(\delta^{\mu}{}_{\nu}\delta^{\alpha}{}_{\beta} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\alpha}{}_{\beta}\right) x^{\nu} x^{\beta} = g_{\nu\beta}\, x^{\nu} x^{\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\cancel{g_{\nu\beta}} + 2\Delta\omega_{\alpha\nu}\right) x^{\nu} x^{\alpha} = \cancel{g_{\nu\beta}\, x^{\nu} x^{\beta}} \Rightarrow \Delta\omega_{\alpha\nu}\, x^{\alpha} x^{\nu} = 0$$

$\Rightarrow$ $\Delta\omega_{\alpha\nu}$ é anti-simétrico na troca $\alpha \leftrightarrow \nu$: $\Delta\omega_{\alpha\nu} = -\Delta\omega_{\nu\alpha}$

(*) Para um boost na direção x: $\Delta\omega^{01} = \Delta\beta$ e os outros zero. } verificar

(*) Para rotação ao redor do eixo z: $\Delta\omega^{1}{}_{2} = -\Delta\omega^{12} = \Delta\varphi$

Para construir uma transformação finita escrevemos $\Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} = \Delta\omega\, I^{\mu}{}_{\nu}$ matriz 4x4

DIRAC 18:

Fazendo $\Delta\omega = \frac{\omega}{N}$ uma transf. finita escreve-se

$$x'^{\nu} = \lim_{N\to\infty}\left(\delta^{\nu}{}_{\alpha} + \frac{\omega}{N} I^{\nu}{}_{\alpha}\right)x^{\nu}$$

$$= \left(e^{\omega I}\right)^{\nu}{}_{\mu} \quad (1)$$

Exercício: faça isso p/ boost ao longo do eixo x.

Façamos o mesmo para espinores: (DIRAC 15.1) impõe que

$$\Lambda^{\lambda}{}_{\nu}\gamma^{\nu} = S^{-1}\gamma^{\lambda}S \quad (2)$$

Para uma transf. infinitesimal escrevemos: $1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu} = S_{inf}$ (3)

↳ mesmos parâmetros!

(DIRAC 16.-3) + (2) + (3)

$$\Rightarrow \left(\delta^{\lambda}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\lambda}{}_{\nu}\right)\gamma^{\nu} = \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}\right)\gamma^{\lambda}\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\Delta\omega^{\alpha\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\gamma^{\lambda}} + \Delta\omega^{\lambda}{}_{\nu}\gamma^{\nu} = \cancel{\gamma^{\lambda}} + \frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}\left(\gamma^{\lambda}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\gamma^{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\omega^{\lambda\beta}\gamma_{\beta} = -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}\left(\gamma^{\lambda}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\gamma^{\lambda}\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2}\Delta\omega^{\alpha\beta}\left[\delta^{\lambda}{}_{\alpha}\gamma_{\beta} - \gamma_{\alpha}\delta^{\lambda}{}_{\beta}\right] \quad \Rightarrow^{\forall \Delta\omega^{\alpha\beta}}$$

$$\Rightarrow 2i\left[\delta^{\lambda}{}_{\alpha}\gamma_{\beta} - \gamma_{\alpha}\delta^{\lambda}{}_{\beta}\right] = \gamma^{\lambda}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\gamma^{\lambda}$$

Por inspeção $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\right]$.

Logo uma transf finita é

$$\psi'(x') = S\psi = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{4}\frac{\omega}{N}\,\Sigma_{\mu\nu}\,I^{\mu\nu}\right)^N \psi$$

$$\therefore \boxed{S = e^{-\frac{i}{4}\omega\,\Sigma_{\mu\nu}\,I^{\mu\nu}}}$$

Exercício: a) Obter S p/ boost com velocidade $\frac{v}{c} = \beta(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\gamma\,\vec{j} + \cos\delta\,\vec{k})$

(Bjorken pg 2 a)

b) Obter uma rotação ao redor do eixo y.

$x \to y\ z$

$\to z$

Agora

$$S^\dagger S = \underbrace{S^\dagger \gamma^0}_{b\gamma^0 S^{-1}} \gamma^0 S = b\gamma^0 S^{-1}\gamma^0 S = b\gamma^0 \Lambda^0{}_\nu \gamma^\nu$$

$$= b\,\mathbb{1}\,\Lambda^0{}_0 + \sum_{k=1}^{3} b\,\Lambda^0{}_k \gamma^0\gamma^k$$

Com isso

$$0 < \mathrm{Tr}(S^\dagger S) = \cancel{4b}\,\Lambda^0{}_0 \Rightarrow b\Lambda^0{}_0 > 0$$

por construção

p/ transf próprias de Lorentz $\Lambda^0{}_0 > 0 \Rightarrow b = 1$

" " impróprias " " $\Lambda^0{}_0 < 0 \Rightarrow b = -1$

ii) $\psi' = S\psi \xrightarrow{\dagger} \psi'^\dagger = \psi^\dagger S^\dagger$

$\bar\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \Longrightarrow \bar\psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 = b\,\psi^\dagger \gamma^0 S^{-1} = b\bar\psi S^{-1}$

$$\therefore \bar\psi' = b\bar\psi S^{-1}$$

Aplicação: Vimos que $J^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi$, mas isso é um vetor de verdade?

$$J'^\mu = \bar\psi'\gamma^\mu\psi' = b\bar\psi S^{-1}\gamma^\mu S\psi = b\,\Lambda^\mu{}_\lambda \bar\psi\gamma^\lambda\psi$$

$$= b\,\Lambda^\mu{}_\lambda J^\lambda$$

p/ transf própria de Lorentz J^μ é 4-vetor de fato!

Exercício: para transf. próprias de Lorentz mostre que

i) $\bar{\Psi}\Psi$ é escalar

ii) $\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$ é tensor de 2ª ordem

PG DIRAC 18.

---

4. Limite não relativístico:

Antes de mais nada introduzimos um campo eletromagnético através de

$$p^\mu \to p^\mu - \frac{q}{c}A^\mu \;, \text{ i e, } \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial ct} \to i\hbar\dfrac{\partial}{\partial ct} - \dfrac{q}{c}\phi \\[2ex] \dfrac{\hbar}{i}\nabla \to \dfrac{\hbar}{i}\nabla - \dfrac{q}{c}\mathbb{A} \end{cases}$$

$$p^\mu = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla\right)$$

Com isso a eq. de Dirac é escrita como

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[c\vec{\alpha}\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\mathbb{A}\right) + \beta mc^2 + q\phi\right]\Psi$$

Para o limite não relativístico é conveniente utilizar a representação (DIRAC 8-2) ~~and~~ e escrevemos $\Psi = \begin{bmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{bmatrix}$

$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{q}{c}\mathbb{A}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{bmatrix} = c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\begin{bmatrix}\tilde{\chi}\\ \tilde{\varphi}\end{bmatrix} + e\phi\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{bmatrix} + mc^2\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}\\ -\tilde{\chi}\end{bmatrix}$$

No limite NR mc^2 é a maior energia e por isso fatoramos

$$\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{bmatrix} = e^{-i\frac{mc^2 t}{\hbar}}\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix}$$

DIRAC 19

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = mc^2 e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix} + e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix}$$

$$= e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}\left\{c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\begin{bmatrix}\chi\\ \varphi\end{bmatrix} + e\phi\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix} + mc^2\begin{bmatrix}\varphi\\ -\chi\end{bmatrix}\right. \Longrightarrow$$

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\chi + e\phi\,\varphi \qquad (1)$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = c\,\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}\,\varphi + e\phi\,\varphi - 2mc^2\chi \qquad (2)$$

No limite NR o último termo de (2) deve ser maior que $e\phi$ ou $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi$

$$\Longrightarrow \chi = \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2mc}\varphi \quad (3)$$ logo χ é menor que φ por um fator $\frac{v}{c}$.

Substituindo (3) em (1) segue

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2mc}\varphi + e\phi\varphi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\;\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2m}\varphi + e\phi\varphi$$

mas $\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\;\vec{\sigma}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\wedge\vec{b}$

$$\vec{\pi}\cdot\vec{\pi} = \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

$$\vec{\pi}\wedge\vec{\pi} = \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\wedge\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) = -\frac{\hbar}{i}\nabla\wedge\left(A\cdot\right)\frac{q}{c} - \frac{\hbar}{i}\frac{q}{c}\vec{A}\wedge\left(\nabla\cdot\right)$$

$$= -\frac{\hbar}{i}\frac{q}{c}\left[(\nabla\wedge A) - A\wedge\nabla(\cdot) + A\wedge\nabla\cdot\right] = -\frac{\hbar}{i}\frac{q}{c}\vec{B}$$

$$i\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\wedge\vec{\pi} = -\frac{\hbar q}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

Portanto

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} - \frac{q\hbar}{2mc} \vec{\sigma}\cdot\vec{B} + e\phi \right] \varphi \quad (1)$$ que é a

eq. de Pauli! Mais, ~~comparando vemos que g = ?~~

$$-\frac{q\hbar \vec{\sigma}\cdot\vec{B}}{2mc} = -2 \frac{q}{2mc} \vec{S}\cdot\vec{B} \Rightarrow \boxed{g=2}$$

~~5. Soluções da Eq. de Dirac livre:~~ 8/6/9

6. SPIN:

Sob rotações, no caso de funções de onda...

$$|\psi\rangle \longrightarrow D(R)|\psi\rangle = |\psi'\rangle \qquad |r\rangle \longrightarrow D(R)|r\rangle = |Rr\rangle$$

$$\langle r|\psi\rangle \longrightarrow \langle r|D(R)|\psi\rangle = \langle R^{-1} r|\psi\rangle$$

$$\therefore \psi'(r) = \psi(R^{-1}r) \longrightarrow \psi'(r) = (1 + i\delta\theta L_3)\psi(r)$$

Como os espinores transformam segundo

$$\psi'(x') = S\psi(x) \longrightarrow \psi'(Rx) = S_R\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = S_R\psi(R^{-1}x)$$

Agora a parte $\psi(R^{-1}x) = e^{+i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}/\hbar}\psi(x)$, analisemos S_R.

Vimos que $S = e^{-\frac{i}{4}\omega\,\sigma_{\mu\nu} I^{\mu\nu}}$ na página (DIRAC 18:.)

rotação no Eixo $\qquad I^{\mu\nu}$

x $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

y $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

z $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Agora escrevemos a rotação como $\theta\vec{n}$ o que leva a que o expoente de $e^{-\frac{i}{4}\omega I^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}$ seja escrito

$$-\frac{i}{4}\theta\left[2n_x\sigma_{23} - 2n_y\sigma_{13} + 2n_z\sigma_{12}\right] = \underline{EXP}$$

Definindo $\Sigma^k = \frac{1}{2}\epsilon^{kij}\sigma_{ij} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma^1 = \sigma_{23} \\ \Sigma^2 = -\sigma_{13} \\ \Sigma^3 = +\sigma_{12} \end{cases}$

permite escrever

$$\underline{EXP} = -i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}$$

Explicitamente na representação de Dirac para as matrizes γ^μ:

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^1 = \frac{i}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^2\sigma^3 + \sigma^3\sigma^2 & 0 \\ 0 & \underbrace{-\sigma^2\sigma^3 + \sigma^3\sigma^2}_{-2i\sigma^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}$$

e analogamente $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ [vl fica independente da representação note que $\vec{\Sigma} = i\gamma^5\vec{\alpha}$ $\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$]

Logo $\psi'(x) = e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}}\, e^{i\theta\,\vec{n}\cdot\frac{\vec{L}}{\hbar}}\, \psi(x)$

comutam.

Isso permite concluir que o momento angular total é

$$\mathbb{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}.$$

7. <u>Conservação de momento angular</u>

Vejamos se $\vec{L}$ é conservado

$$i\hbar\frac{dL_k}{dt} = [L_k, H] = [\epsilon_{klm}x_l p_m, c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2]$$

$$= \epsilon_{klm}p_m c i\hbar \alpha_l$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = c\,\vec{\alpha}\wedge\vec{p} \neq 0$$ logo apenas o mom. ang. orbital não é conservado

Será que o spin é conservado?

$$i\hbar \frac{d\vec{\Sigma}\frac{\hbar}{2}}{dt} = \left[\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}, c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right] = -c\,\vec{\alpha}\wedge\vec{p}$$

exercício

Logo

$$i\hbar \frac{d\vec{J}}{dt} = \left[\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} + \vec{L}, H\right] = 0 \quad \therefore \quad \vec{J}$$ é a quantidade conservada!

8. Soluções de Dirac para partícula livre:

Procuremos soluções da forma $\psi = e^{i p^\mu x_\mu/\hbar}\, w$ (1)
↳ constante

$$\psi = e^{-iEt/\hbar}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}\, w$$

substituindo em $\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi = 0$ $\Rightarrow$ $\left(p_\mu \gamma^\mu - mc\right) w = 0$ (2)

Para existir solução $\underbrace{(2)}_{\not{p} - mc\ \text{em}}$ não deve ter inversa. Formalmente a inversa de $(\not{p} - mc)$ é $\frac{1}{p_\mu p^\mu - m^2c^2}\underbrace{(\gamma^\mu p_\mu + mc)}_{\text{(verifique!)}}$. Logo

para a inversa não existir e termos soluções não nulas de (2) devemos ter $p_\mu p^\mu - m^2c^2 = 0$ i.e

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow \begin{array}{l} E_+ = +\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \\ E_- = -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \end{array}$$

Exercício: verifique que as soluções são:

Para E_+:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z/(E_+ + mc^2) \\ c(p_x + ip_y)/(E_+ + mc^2) \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c(p_x - ip_y)/(E_+ + mc^2) \\ -cp_z/(E_+ + mc^2) \end{pmatrix}$$

Para E_-

$$w_3 = \begin{pmatrix} -cp_z/(-E_- + mc^2) \\ -c(p_x + ip_y)/(-E_- + mc^2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} -c(p_x - ip_y)/(-E_- + mc^2) \\ cp_z/(-E_- + mc^2) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(os w's não estão normalizados)

Interpretação: (por isso ~~...~~ escolhemos o ref. c/ $\vec{p}=0$)

solução	energia	spin
w_1	$E>0$	$+\hbar/2$
w_2	$E>0$	$-\hbar/2$
w_3	$E<0$	$\hbar/2$
w_4	$E<0$	$-\hbar/2$

Note que não podemos diagonalizar H e $\vec{\Sigma}$ ao mesmo tempo já que vimos que não comutam!

Agora definamos o operador helicidade:

$$H = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{\Sigma}\cdot\hat{p} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix}$$

escrevendo $\alpha = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\beta = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ temos

$$w_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_+ + mc^2}\,\alpha \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_+ + mc^2}\,\beta \end{pmatrix}$$

Agora

$$H w_1 = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,\alpha \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\ \vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{E_+ + mc^2}\,\alpha \end{pmatrix} \overset{\vec{p} \text{ na direção } \hat{z}}{=} \alpha w_1$$

10/6/09

---

9. Solução do átomo de Hidrogênio por Dirac:

Aqui vamos adotar $\hbar = c = 1$

$$H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + m\beta - \frac{Ze^2}{r}$$

O momento angular total é $\vec{J} = \vec{L} + \frac{\vec{\Sigma}}{2}$

O operador $K = \beta\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{L} + 1\right)$ comuta com H. De fato,

$$\left[\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + m\beta - \frac{Ze^2}{r}, \beta\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}+1\right)\right]:$$

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{p}, \beta] = p_k[\alpha_k, \beta] = 2\,p_k\,\alpha_k\,\beta = 2\,\vec{p}\cdot\vec{\alpha}\,\beta$$

DIRAC 26

$$\left[\beta,\ \beta(\vec{\Sigma}\cdot\vec{L})\right] = \vec{\Sigma}\cdot\vec{L} - \underbrace{\beta\,\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}\,\beta}_{\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}} = 0$$

$$= L_k \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}$$

$$\left[\vec{\alpha}\cdot\vec{p},\ \beta\,\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}\right] =$$

$$\beta\,\vec{\Sigma}\cdot\vec{L} = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_k L_k & \\ & \sigma_k L_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_k L_k & \\ & -\sigma_k L_k \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & P_z & P_x - iP_y \\ 0 & 0 & P_x + iP_y & -P_z \\ P_z & P_x - iP_y & 0 & 0 \\ P_x + iP_y & -P_z & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} L_z & L_x - iL_y & 0 & 0 \\ L_x + iL_y & L_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_z & -(L_x - iL_y) \\ 0 & 0 & -(L_x + iL_y) & +L_z \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -P_z L_z - (P_x - iP_y)(L_x + iL_y) \ldots & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3037-7099

Hagi

RB 11 10 17 (30) (40) (11) 15 16 19

Acndido

Fisioden,

Mariana 30~~32~~-4451

Por outro lado

$$K^2 = \beta(\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}+1)\,\beta(\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}+1)$$

$$= (\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}+1)(\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}+1)$$

$$= (\vec{\Sigma}\cdot\vec{L})^2 + 2\,\vec{\Sigma}\cdot\vec{L} + 1$$

Mas $(\vec{\Sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\Sigma}\cdot\vec{B}) = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\cdot\vec{B} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \end{pmatrix}$

$$= \vec{A}\cdot\vec{B} + i\,\vec{\Sigma}\cdot\vec{A}\wedge\vec{B}$$

$$\vec{L}\wedge\vec{L} = (\underbrace{L_yL_z - L_zL_y}_{iL_x};\ \underbrace{L_zL_x - L_xL_z}_{iL_y},\ \underbrace{L_xL_y - L_yL_x}_{iL_z}) = i\vec{L}$$

$$\therefore \boxed{K^2 = \vec{L}^2 + \vec{\Sigma}\cdot\vec{L} + 1}$$

Sabemos também que

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\vec{\Sigma}}{2} \Rightarrow \vec{J}^2 = L^2 + \vec{\Sigma}\cdot\vec{L} + 3/4 \Rightarrow$$

$\therefore K^2 = \vec{J}^2 + 1/4 \Rightarrow$ autovalor de K^2: $j(j+1) + 1/4 = (j+1/2)^2 \Rightarrow \underbrace{\pm 1, \ldots}_{\text{autovalor de } K}$

Dirac 28

Queremos os autovalores de

$$H\Psi = E\Psi \quad , \text{ i.e., } \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + m\beta - \frac{Ze^2}{r}\right)\Psi = E\Psi$$

Multiplicando à esquerda por $m\beta \Rightarrow$

$$m^2\Psi = m\beta\left(E - \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \frac{Ze^2}{r}\right)\Psi$$

$$= \left(E + \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \frac{Ze^2}{r}\right) m\beta\Psi$$

$$= \left(E + \vec{\alpha}\cdot\vec{p}\,) + \frac{Ze^2}{r}\right)\left(E - \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \frac{Ze^2}{r}\right)\Psi$$

Logo

$$m^2\Psi = \left[\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)^2 - \overbrace{\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right)^2}^{\vec{p}^{\,2}} + \vec{\alpha}\cdot\vec{p}\,\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{r}\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right]\Psi$$

Agora $\left[\vec{p}, \frac{1}{r}\right] = \frac{\hbar}{i}\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = i\hbar\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$m^2\Psi = \left(E^2 + \frac{(Ze^2)^2}{r^2} + 2E\frac{Ze^2}{r} - \vec{p}^{\,2} + i\,\vec{\alpha}\cdot\hat{r}\,\frac{Ze^2}{r^2}\right)\Psi$$

$$\Rightarrow (E^2 - m^2)\Psi = \left[p^2 - 2\frac{Ze^2}{r}E + \frac{1}{r^2}\left(-(Ze^2)^2 - i\vec{\alpha}\cdot\hat{r}\, Ze^2\right)\right]\Psi$$

Mas $p^2 = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2}$

$$(E^2 - m^2)\Psi = \left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(L^2 - (Ze^2)^2 - i\vec{\alpha}\cdot\hat{r}\, Ze^2\right) - 2E\frac{Ze^2}{r}\right]\Psi$$

Agora $K^2 - \beta K = L^2 + \vec{\Sigma}\cdot\vec{L} + 1 - \vec{\Sigma}\cdot\vec{L} - 1 = L^2$

$\cancel{L^2 - (Ze^2)^2 - i\vec{\alpha}\cdot\hat{r}\, Ze^2}$

$$\vec{L}^2 - (Ze^2)^2 - i\vec{\alpha}\cdot\vec{r}\, Ze^2) = K^2 - \beta K - i\vec{\alpha}\cdot\hat{r}\, Ze^2 - (Ze^2)^2$$

Agora definimos $\lambda = -\beta K - i\vec{\alpha}\cdot\hat{r}\, Ze^2$

que satisfaz $\lambda^2 = K^2 - (Ze^2)^2$

$$\text{e } [H, \lambda] = 0$$

DIRAC 25,1

Adotando ~~[illegible]~~ [Ref. Pizza]

$$H = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta - \frac{Ze^2}{r}$$

O momento angular total $\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$ é conservado. Além disso a paridade também é

$$\mathcal{P} = \gamma^0 R_P = \beta R_P$$

↑ operador [illegible], etc

Logo, escolhemos diagonalizar $H, \vec{J}, J_z$ e $\mathcal{P}$. Escrevemos

$$\Psi_{Ejm} = \begin{pmatrix} U_{jm} \\ V_{jm} \end{pmatrix}.$$

Para que $\mathcal{P}\Psi_{Ejm} = \pm\Psi_{Ejm} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{jm}(-\vec{r}) \\ V_{jm}(-\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{jm}(-\vec{r}) \\ -V_{jm}(-\vec{r}) \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} U_{jm}(\vec{r}) \\ V_{jm}(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

logo U e V devem ter paridades opostas.

~~Podemos escrever V_{jm} e U_{jm} em termos de~~ Dirac 25,2

$$\cancel{\mathcal{Y}^{\pm}_{jm}(\pm\hat{r}, s) = \sum_{m} \langle j\, m}$$

A eq. de autovalores de H escreve-se

$$\left[\frac{\hbar c}{i}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\nabla \\ \vec{\sigma}\cdot\nabla & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{Ze^2}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{Ze^2}{r} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} U_{jm} \\ V_{jm} \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} U_{jm} \\ V_{jm} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Para espinores de 2 componentes existe apenas 2 configurações c/ $j\,m$ dados: $l = j \pm 1/2$ e cada um c/ paridade $(-1)^l$:

$$|j m l \tfrac{1}{2}\rangle = \sum_{m_l m_s} |l m_l \tfrac{1}{2} m_s\rangle\langle l m_l \tfrac{1}{2} m_s | j m l \tfrac{1}{2}\rangle$$

Em geral os U e V ~~para~~ dados ~~j m~~ podem ser.

p/ $l = j - 1/2$

$$\varphi^{-}_{jm} = \sqrt{\frac{l + 1/2 + m}{2l+1}}\, Y_{l\, m-1/2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sqrt{\frac{l+1/2-m}{2l+1}}\, Y_{l\, m+1/2}$$

e

~~p/ l=j+~~

$$\varphi^{+}_{jm} = \sqrt{\frac{l+1/2-m}{2l+1}}\, Y_{l\, m-1/2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \sqrt{\frac{l+1/2+m}{2l+1}}\, Y_{l\, m+1/2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

p/ $l = j + 1/2$

Como U_{jm} e V_{jm} têm paridade oposta $\Rightarrow$

$$\Psi^{(1)}_{jm} = \begin{pmatrix} \varphi^{-}_{jm} & g_1 \\ \varphi^{+}_{jm} & i f_1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \Psi^{(2)}_{jm} = \begin{pmatrix} \varphi^{+}_{jm} & g_2 \\ \varphi^{-}_{jm} & i f_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

por conveniência

Analisemos inicialmente as soluções do tipo I: de (25,1-4) segue

$$\begin{cases} c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,(\varphi^{+}_{\ell m}\, i f_1) + \left(mc^2 - \frac{Ze^2}{r} - E\right)\varphi^{-}_{jm} g_1 = 0 \\ c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,(\varphi^{-} g_1) + \left(-mc^2 - \frac{Ze^2}{r} - E\right)\varphi^{+}_{jm}\, i f_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Para simplificar precisamos ligar $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$ c/ $\vec{L}$!

$$1 = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})}{r^2}$$

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\;\vec{\sigma}\cdot\vec{r}}{r^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}}{r^2}\left[\vec{r}\cdot\vec{p} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{r}\wedge\vec{p})\right] = (\vec{\sigma}\cdot\hat{r})\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\vec{\sigma}\cdot\vec{L}\right]$$

Por outro lado:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{L} = \left[\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right]\frac{1}{\hbar} \quad \text{onde } \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

o que leva a

Agora

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{L}\,\varphi^{\pm}_{jm} = \hbar\left[j(j+1) - \left(j \pm \tfrac{1}{2}\right)\left(j \pm \tfrac{1}{2} + 1\right) - \tfrac{3}{4}\right]\varphi^{\pm}_{jm}$$

$$= \hbar\left[\mp j - \tfrac{1}{4} \mp \tfrac{1}{2} - 3/4\right]\varphi^{\pm}_{jm} = \hbar\left[\mp\left(j + \tfrac{1}{2}\right) - 1\right]\varphi^{\pm}_{jm}$$

Também temos

$$\underbrace{\left(\vec{\sigma}\cdot\hat{r}\right)}_{\text{escala ímpar}}\varphi^{\pm}_{jm} = -1\,\varphi^{\mp}_{jm}$$

Logo (25,3)-2 implica que

$$-c\hbar\frac{\partial}{\partial r}f_1 - \frac{c\hbar}{r}\left(j + \tfrac{1}{2} + 1\right)f_1 + \left(mc^2 - \frac{Ze^2}{r} - E\right)g_1 = 0$$

e

$$c\hbar\frac{\partial}{\partial r}g_1 + c\hbar\left(1 - (j + 1/2)\right)g_1 - \left[mc^2 + \frac{Ze^2}{r} + E\right]f_1 = 0$$

Agora definimos

$$F_1 = rf_1 \quad \text{e} \quad G_1 = rg_1$$

$$\frac{\partial}{\partial r}f_1 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F_1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial F_1}{\partial r} - \frac{F_1}{r^2}$$

Logo

$$\hbar c\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+1/2}{r}\right] F_1 - \left[mc^2 - \frac{Ze^2}{r} - E\right) G_1 = 0$$

$$\hbar c\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+1/2}{r}\right) G_1 - \left[mc^2 + \frac{Ze^2}{r} + E\right] F_1 = 0$$

Analogamente

$$\hbar c\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+1/2}{r}\right] F_2 - \left[mc^2 - \frac{Ze^2}{r} - E\right] G_2 = 0$$

$$\hbar c\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+1/2}{r}\right] G_2 - \left[mc^2 + \frac{Ze^2}{r} + E\right] F_2 = 0.$$

Agora $\gamma/$ $\lambda = j+1/2$ $\left\{ \begin{array}{l} F_1^{(\lambda)} = F_2^{(-\lambda)} \\ G_1^{(\lambda)} = G_2^{(-\lambda)} \end{array} \right\}$

o que permite escrever

$$\hbar c\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\right] F_i^{(\lambda)}(r) - \left[mc^2 - \frac{Ze^2}{r} - E\right] G_i^{\lambda} = 0$$

$$\hbar c\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\lambda}{r}\right] G_i^{(\lambda)} - \left[mc^2 + \frac{Ze^2}{r} + E\right] F_i^{(\lambda)}$$

c/ $i=1 \Leftrightarrow \lambda = j+1/2$ $\quad i=2 \Leftrightarrow \lambda = -(j+1/2)$

Dirac 25,6

Para obter o espectro discreto queremos que

$$\int d^3x\, \psi^\dagger \psi < \infty \Rightarrow \psi \to 0 \text{ para } r \to \infty$$

Mais ainda F e G devem ser não divergentes na origem

Agora definimos

$$G_i^{(\lambda)} \equiv \left(K_i^{(\lambda)} + I_i^{(\lambda)}\right) \sqrt{mc^2+E}$$

($E < mc^2$ p/ estados ligados)

$$F_i^{(\lambda)} \equiv \left(K_i^{(\lambda)} - I_i^{(\lambda)}\right] \sqrt{mc^2 - E}$$

O que leva a [para facilitar $G_i^{(\lambda)} \equiv G$ e $F_i^{(\lambda)} \equiv F$]

$$\hbar c \sqrt{mc^2-E}\left[\frac{\partial K}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}(K-I)\right] - \left[mc^2 - E - \frac{Ze^2}{r}\right](K+I)\sqrt{mc^2+E} = 0$$

$$\hbar c \sqrt{mc^2+E}\left[\frac{\partial K}{\partial r} + \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\lambda}{r}(K+I)\right] - \left[mc^2 + \frac{Ze^2}{r} + E\right](K-I)\sqrt{mc^2-E} = 0$$

o que leva a

$$2\frac{dK}{dr} - \frac{2\lambda I}{r} - \left[mc^2 - E - \frac{Ze^2}{r}\right)\frac{(K+I)}{\hbar c}\sqrt{\frac{mc^2+E}{mc^2-E}} - \left[mc^2+E+\frac{Ze^2}{r}\right]\frac{K-I}{\hbar c}\sqrt{\frac{mc^2-E}{mc^2+E}} = 0$$

$$\frac{dK}{dr} - \frac{K}{2}\left[\sqrt{\frac{mc^2+E}{mc^2-E}}\left(mc^2-E-\frac{Ze^2}{r}\right) + \sqrt{\frac{mc^2-E}{mc^2+E}}\left(mc^2+E+\frac{Ze^2}{r}\right)\right]\frac{1}{\hbar c}$$

$$= \frac{\lambda I}{r} + \frac{I}{2}\left[\sqrt{\frac{mc^2+E}{mc^2-E}}\left(mc^2-E-\frac{Ze^2}{r}\right) - \sqrt{\frac{mc^2-E}{mc^2+E}}\left(mc^2+E+\frac{Ze^2}{r}\right)\right]\frac{1}{\hbar c}$$

$$\frac{dK}{dr} - \frac{K}{\hbar c}\left(\sqrt{m^2c^4-E^2} - \frac{E}{\sqrt{m^2c^4-E^2}}\frac{Ze^2}{r}\right) = \left(\lambda - \frac{mc^2 Ze^2}{p\hbar c}\right)\frac{I}{r}$$

e analogamente

$$\frac{dI}{dr} + \frac{I}{\hbar c}\left(\sqrt{m^2c^4-E^2} - \frac{E}{\sqrt{m^2c^4-E^2}}\frac{Ze^2}{r}\right) = \left(\lambda + \frac{mc^2 Ze^2}{p\hbar c}\right)\frac{K}{r}$$

Esses eq's podem ser limitadas levando a

$P = \sqrt{m^2c^4 - E^2}$ $\quad \boxed{\hbar = c = 1}$ (25,3)

$$r\frac{d^2K}{dr^2} + \frac{dK}{dr} + \left(2Ze^2E - p - p^2r - \frac{\gamma^2}{r}\right)K = 0$$

onde $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - Z^2e^4}$

Agora $K = e^{-\frac{x}{2}} x^{\gamma} M$ onde $x = 2pr$

$\Downarrow$

$$x\frac{d^2M}{dx^2} + (2\gamma + 1 - x)\frac{dM}{dx} - \left(\gamma - \frac{Ze^2E}{p}\right)M = 0$$

que devemos comparar c/ a ~~Equação~~ eq. p/ a hipergeométrica

$$x\frac{d^2F}{dx^2} + (b - x)\frac{dF}{dx} - aF = 0 \Rightarrow F(a|b|x)$$

p/ $|x| \to 0$ $\quad F(a|b|0) = 1$

$\therefore$ ~~$M = F\left(\gamma - \frac{Ze^2E}{p} \middle| 2\gamma+1 \middle| x\right)$~~ $\quad$ p/ $|x| \to \infty$ $\quad M \propto \frac{e^z}{\Gamma(c)}$

$\Rightarrow$ p/ finito $a = -n_r$

Logo $M = F\left(\gamma - \frac{Ze^2E}{p} \middle| 2\gamma + 1 \middle| x\right)$

(25,9)

pl M an bien convergencia pl $|x|\to 0 \Rightarrow \gamma > 0$

$$\gamma = \sqrt{\underbrace{(j+1/2)^2}_{\geq 1} - \underbrace{Z^2 e^4}_{\left(\frac{Z}{137}\right)^2}} \Rightarrow Z < 137 \;!$$

pl $M \to 0$ pl $|x| \to \infty$.

$$\gamma - \frac{Z e^2 E}{\rho} = -n' \quad c/ \; n' \geq 0, \text{ladino}$$

$$\text{pl} \begin{cases} n' > 0 \Rightarrow \text{+ } \rho_0 \text{ i e } (2) \\ n = 0 \Rightarrow \rho_0' \Rightarrow x = j + 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_{nj} = m \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{\left[n - (j+1/2) + \sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2} \right]^2} \right]^{1/2}$$

~~$\gamma + n' - Ze^2E =$~~

$$-\frac{Ze^2E}{\rho} = -n - \gamma \Rightarrow \frac{(Ze^2)^2 E^2}{m^2 - E^2} = (-n-\gamma)^2$$

$$\left(Z^2 e^4 + (n+\gamma)^2\right) E^2 = m^2 (n+\gamma)^2$$

$$E^2 = \frac{m^2}{1 + \frac{Z^2 e^4}{(n+\gamma)^2}}$$

~~CNPq : GDE → 1 parecer.~~

25/10

DISCUTIR ESPECTRO:

$$E_{nj} = m\left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left[n-(j+1/2)+\sqrt{(j+1/2)^2 - Z^2\alpha^2}\,\right]^2}\right]^{-1/2}$$

No limite NR $\qquad n \equiv n' + j + 1/2$ OK

$$E_{nj} = m - m\,\frac{Z^2\alpha^2}{2n^2}\Bigg[1 + \underbrace{\frac{Z^2\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right)}_{\text{obtida na estrutura fina!}} \cdots\Bigg]$$