Equação de Dirac: queremos uma eq. relativística para o elétron

Ref.: Bethe-Jackiw

1. Primeira tentativa: eq. de Klein-Gordon

Podemos, heuristicamente, derivar a eq. de Schrödinger partindo de $E = \frac{p^2}{2m}$ (1). Para que $e^{i(\mathbb{p}\cdot\mathbb{x} - Et)/\hbar}$ seja solução com $E, \mathbb{p}$ satisfazendo (1) trocamos $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $\mathbb{P} \to \frac{\hbar}{i}\nabla$, com isso

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla\right)\psi$$

Generalizamos para o caso relativístico. ~~onde que temos~~ ~~que~~ $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

Antes disso

Notemos que podemos escrever

Caso relativístico

$$\left.\begin{array}{l} E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbb{P}^\mu \to \frac{\hbar}{i}\nabla \Rightarrow \mathbb{P}^j = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbb{P}\right) \\ \downarrow \\ P_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbb{P}\right) \Rightarrow \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \end{array}$$

$$\boxed{P_\mu \to i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \quad (1) \qquad x^0 = ct$$

ou seja, a substituição feita pode ser posta numa forma covariante! Bom!

Mais, a conservação de probabilidade também tem uma forma covariante!

DIRAC 2

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot J = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial(ct)}\frac{\rho}{c} + \nabla\cdot J = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} J^\mu = 0$$ onde

$$J^\mu = (\rho/c, J)$$

Ataquemos agora o caso relativístico: queremos uma

rel. de dispersão $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ (1)! Para aplicar (DIRAC1-1)

devemos decidir se tomamos a ~~E~~ raiz quadrada. A raiz quadrada

leva a um operador não local $\Rightarrow$ trabalhamos c/ o ~~E~~ E^2:

$$(1) \xrightarrow{\text{DIRAC1-1}} -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -c^2\hbar^2\nabla^2\psi + m^2c^4\psi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}\psi - \nabla^2\psi + \underbrace{\frac{m^2c^2}{\hbar^2}}_{\mu^2}\psi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi + \mu^2\psi = 0$$

Eq. de Klein-Gordon:

<u>Comentários</u>: 20/05

1) A eq. de Klein-Gordon é de 2ª ordem no tempo. Em MQ não relativística (MQNR) a eq. de de 1ª ordem! A diferença agora é que $\psi(x,0)$ (estado) não especifica completamente a evolução já que precisa de $\partial_t\psi(x,0)$! Isso vai levar a a ter toda a informação $\Rightarrow$

2) Quantidade conservada (análogo a $\psi^*\psi$ na MQNR): da eq. de Klein-Gordon segue que

$$\left.\begin{aligned}\psi^* \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \hbar^2\psi^*\nabla^2\psi + m^2c^2\psi^*\psi = 0\\ \psi\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi^* - \hbar^2\psi\nabla^2\psi^* + m^2c^2\psi^*\psi = 0\end{aligned}\right\} \ominus \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) - \nabla\left[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right]\hbar^2 = 0$$

Definindo $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$

(real)

$\mathbb{J} = \frac{\hbar}{i2m}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbb{J} = 0$

em princípio poderíamos tratar ρ como sendo a densidade de probabilidade como em MQNR!

3) ρ não é positiva definida! Soluções do tipo

$\psi_{op} = e^{i(\mathbb{P}\cdot x - Et)/\hbar}$ para Klein-Gordon $\Rightarrow E^2 = \mathbb{P}^2c^2 + m^2c^4$

logo $E = \pm\sqrt{\mathbb{P}^2c^2 + m^2c^4}$ e preciso dos 2 sinais para ter um conjunto completo

Mas $\rho_{op} = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*_{op}\frac{\partial\psi_{op}}{\partial t} - \psi_{op}\frac{\partial\psi^*_{op}}{\partial t}\right) = \frac{E}{mc^2}\psi^*\psi < 0$ se $E = -\sqrt{\ }$!

logo, nos dá pour mandar a interpretação probabilística ⟹ deixo de lado! ⟹ posso interpretar ρ como densidade de carga.!!

Exercício: Paradoxo de Klein.

4) Interação com campo E.M. no limite de baixas energias:

Campo magnético é introduzido através de substituição mínima.

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P} &\to \mathbb{P} - \frac{q}{c} A \\ E &\to E - q\varphi \end{aligned}\right\rangle \quad p^\mu \to p^\mu - q A^\mu \qquad \text{onde } A^\mu = (c\varphi, \mathbb{A})$$

do do E.M. sabemos que A^μ é um quadrivetor! OK!

Neste caso a eq. de Klein-Gordon fica sendo

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\varphi\right)^2 \psi = \left(\frac{c\hbar}{i} \nabla - q\mathbb{A}\right)^2 \psi + m^2 c^4 \Psi$$

Escrevemos $\Psi = \psi'(x,t)\, e^{-i mc^2 t/\hbar}$ (preparando p/ limite NR quando $E \simeq mc^2 + \ldots$

$$\Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t^2} + 2i\hbar\left[mc^2 - e\varphi\right]\frac{\partial \psi'}{\partial t} - e\varphi\left[2mc^2 - e\varphi + i\hbar \frac{\partial \log \varphi}{\partial t} \psi'\right]$$

$$= \left(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + 2ie\hbar c \mathbb{A}\cdot\nabla + ie\hbar c(\nabla\cdot\mathbb{A}) + e^2 \mathbb{A}^2\right)\psi'$$