Funções de Bessel

Coordenadas Cilíndricas circulares: ψ (ρ, φ, z)

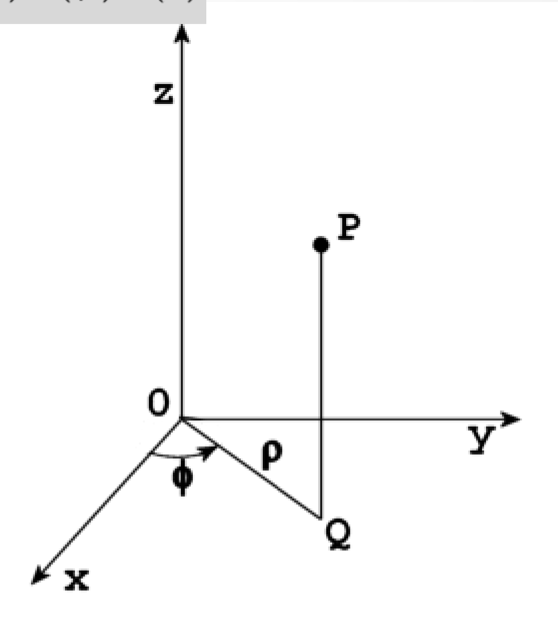
$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0;$$

$$\psi(\rho,\varphi,z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = l^2 z.$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2\Phi$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) + (n^2\rho^2 - m^2)P = 0$$



$$\rho^2\frac{d^2P}{d\rho^2} + \rho\frac{dP}{d\rho} + (n^2\rho^2 - m^2)P = 0$$

Equação de Bessel

Simplificando...

$$\rho^2 \frac{d^2P}{d\rho^2} + \rho \frac{dP}{d\rho} + (n^2\rho^2 - m^2)P = 0$$

$$n\rho = x \qquad e \qquad y(x) = P\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$Para\ n\ real$$

$$\boxed{x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0}$$

Equação de **Bessel** de ordem m

$$Para\ n = in$$

$$\boxed{x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0}$$

Equação de **Bessel Modificada**

$\Rightarrow$ **Método de Frobenius**

Bessel : $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-m^2)y=0$$

Procurar soluções do tipo Séries de Potências:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,x^{k+\alpha}$$

Equação indicial

$$k=0 \;\rightarrow\; a_0[\alpha(\alpha-1)]+\alpha-m^2]=0$$

$$a_0\neq 0 \rightarrow \alpha_1=m \text{ e } \alpha_2=-m$$

$$k=1 \rightarrow a_1[(\alpha+1)^2-m^2]=0$$

$$a_1\neq 0 \rightarrow \alpha_1=1+m \text{ e } \alpha_2=1-m$$ → **Escolhe-se $a_1=0$**

Relação de recorrência, $a_0 \neq 0$ e $\alpha = m$

$$a_k = -\frac{1}{(k+\alpha)^2 - m^2} a_{k-2}$$

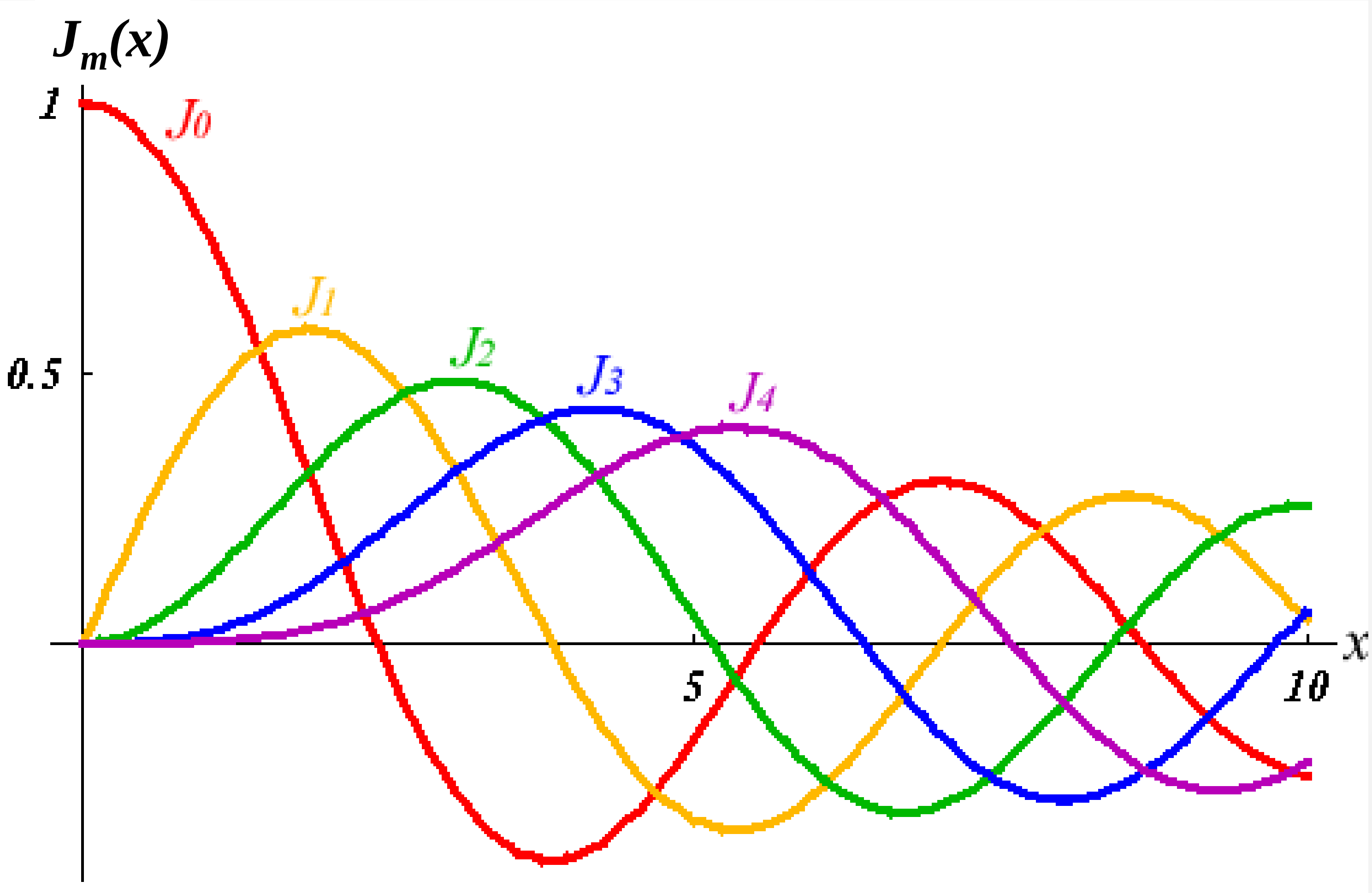
$$a_{2k} = -\frac{(-1)^m m!}{2^{2k} k!(k+m)!} a_0 \qquad a_0 = (2^m m!)^{-1}$$

$$a_{2k} = -\frac{(-1)^m}{2^{2k+m} k!(k+m)!}$$

$$\boxed{y_1(x) = J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}}$$

J_m é a função de Bessel de 1ª. espécie e ordem m

Esta série converge para todo intervalo finito; $J_m(x)$ está definida para todo valor de x real ou complexo



$J_m(x)$
1
0.5
J_0
J_1
J_2
J_3
J_4
5
10
x

A outra solução para α = - m é:

$$y_2(x) = J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$

Seriam as soluções *$J_m(x)$* e *$J_{-m}(x)$ soluções linearmente independentes?*

Para obter as soluções LI deve-se calcular o wronskiano destas soluções:

Chamamos de funções *linearmente independentes,* duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ que satisfazem

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \quad \textit{para todo } x \textit{, se e somente se } C_1 = C_2 = 0$$

em outras palavras, *não podemos escrever* $y_2(x) = Cy_1(x),\ C \neq 0.$

Se fosse possível escrever $y_2(x) = Cy_1(x)$, $C \neq 0$ as 2 soluções seriam *linearmente dependentes* e teríamos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} y_2(x) &= Cy_1(x) \\ y_2'(x) &= Cy_1'(x) \end{aligned} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

cuja solução é $\quad y_1(x)y_2'(x) = y_1'(x)y_2(x)$

$$W[y_1(x), y_2(x)] = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad (5)$$

da equação (5) vemos que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes então, $W(x) \neq 0$

$$W(J_m, J_{-m}) = -2\frac{sen(m\pi)}{\pi x}$$

- ✓ Se m = n é inteiro as soluções $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ *são linearmente dependentes pois* $W = 0$.

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

- ✓ Se m = ν não é inteiro as soluções $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ *são linearmente independentes.*

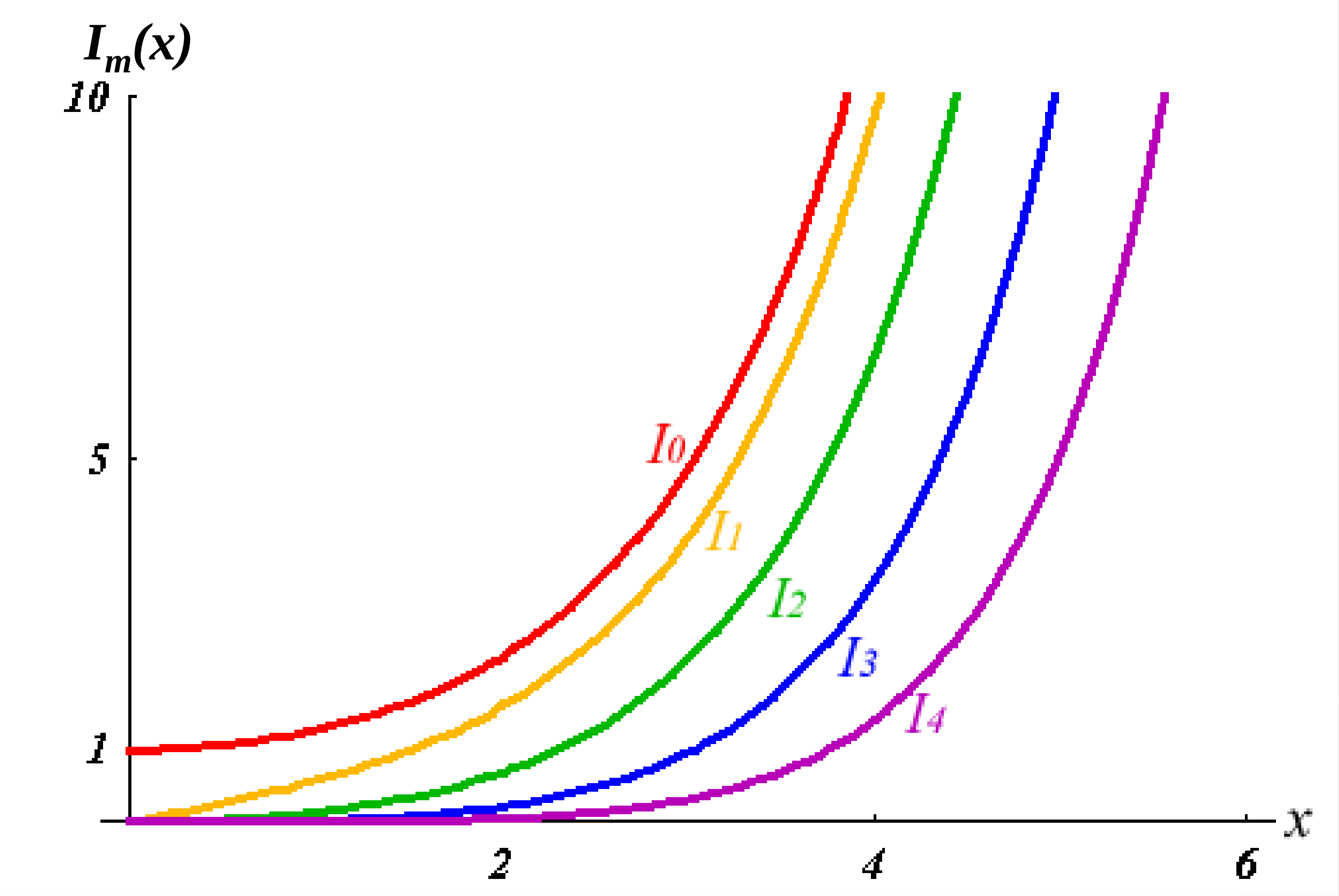
Bessel Modificada:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+m^2)y=0$$

$$\boxed{I_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}}$$

Função de Bessel modificada de 1a. Espécie e ordem m

$$I_\nu(x)=(-i)^\nu J_\nu(ix)$$



$I_m(x)$
10
5
1
I_0
I_1
I_2
I_3
I_4
2
4
6
x

Função Geratriz para n inteiro

Bessel :

$$G_{Bessel}(x,t) = exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

Bessel Modificada:

$$G_{\,Bessel\,Mod} = exp\left[\frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)\, t^n$$

Relações de recorrência para as funções de Bessel

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \qquad (\frac{dG}{dt})$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x) \qquad (\frac{dG}{dx})$$

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J_n'(x)$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_n'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] \quad = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] \quad = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

Relações de recorrência para as funções de **Bessel Modificadas**

$$I_{\nu+1}(x) - I_{\nu-1}(x) = 2I'_{\nu}(x)$$

$$I'_{\nu}(x) = I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} I_{\nu}(x)$$

$$I'_{\nu}(x) = I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} I_{\nu}(x)$$

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_{\nu}(x)$$

Segunda solução para equação de Bessel (para ν = m inteiro)

$$W(J_m, J_{-m}) = -2\frac{sen(m\pi)}{\pi x} = 0$$

Funções de Bessel de segunda espécie ou Funções de Neumann

$$y_2(x) = N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sen(\nu\pi)}$$

$N_\nu(x)$ é solução da equação de Bessel para ν não inteiro, pois é uma combinação linear de J_ν e $J_{-\nu}$, que são soluções LI .

E para $\nu \to n$ (n inteiro) também é solução (questão de fé!!!! ☺).

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sen(\nu\pi)}$$

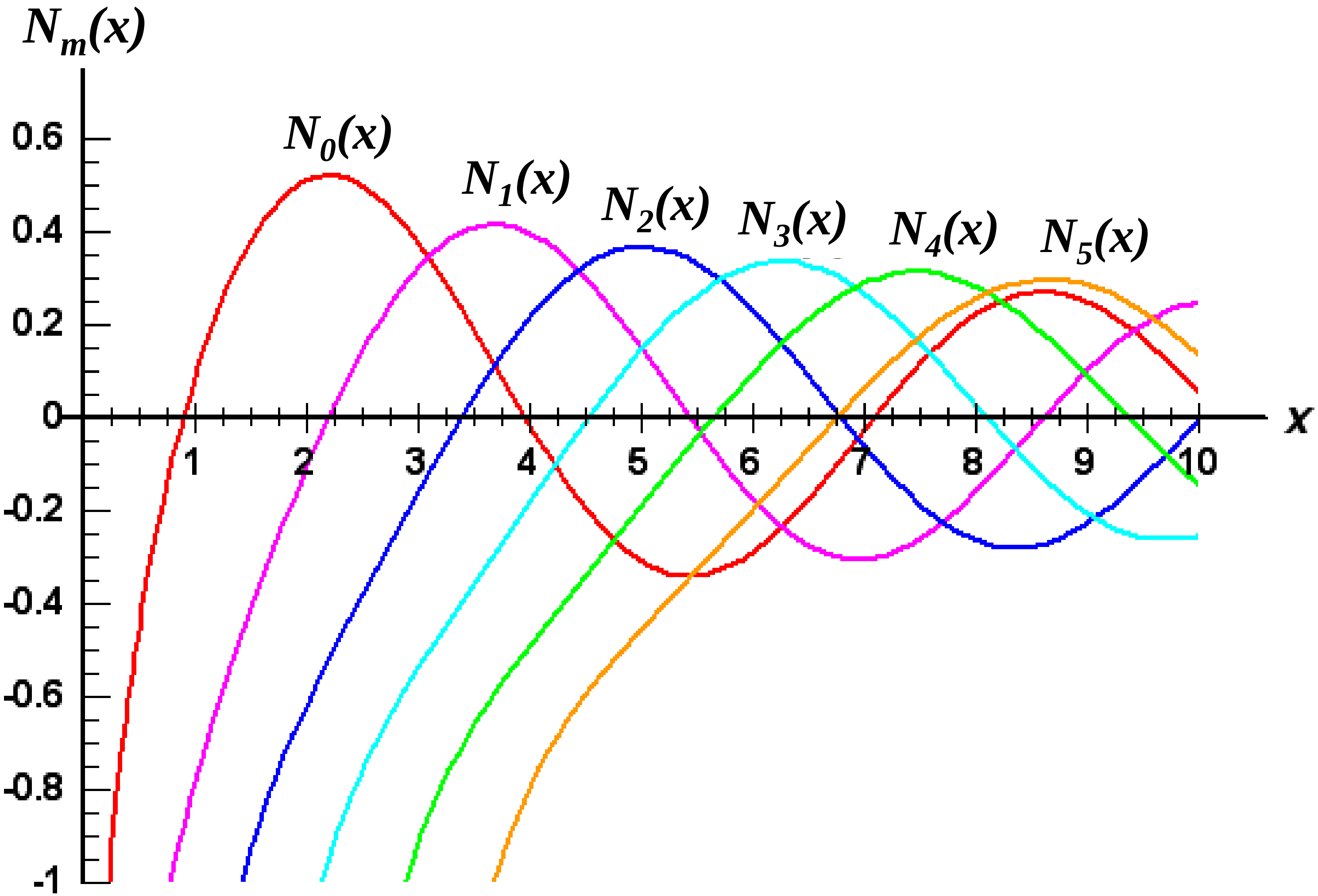
$N_\nu(x)=Y_\nu(x)$

Pode ser mostrado que para qualquer valor de ν inteiro ou não, que:

$$W(J_n\,, N_n) = \frac{2}{\pi x}$$ e $$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x)$$

Assim, a solução mais geral da equação de Bessel será:

$$y\,(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x)$$



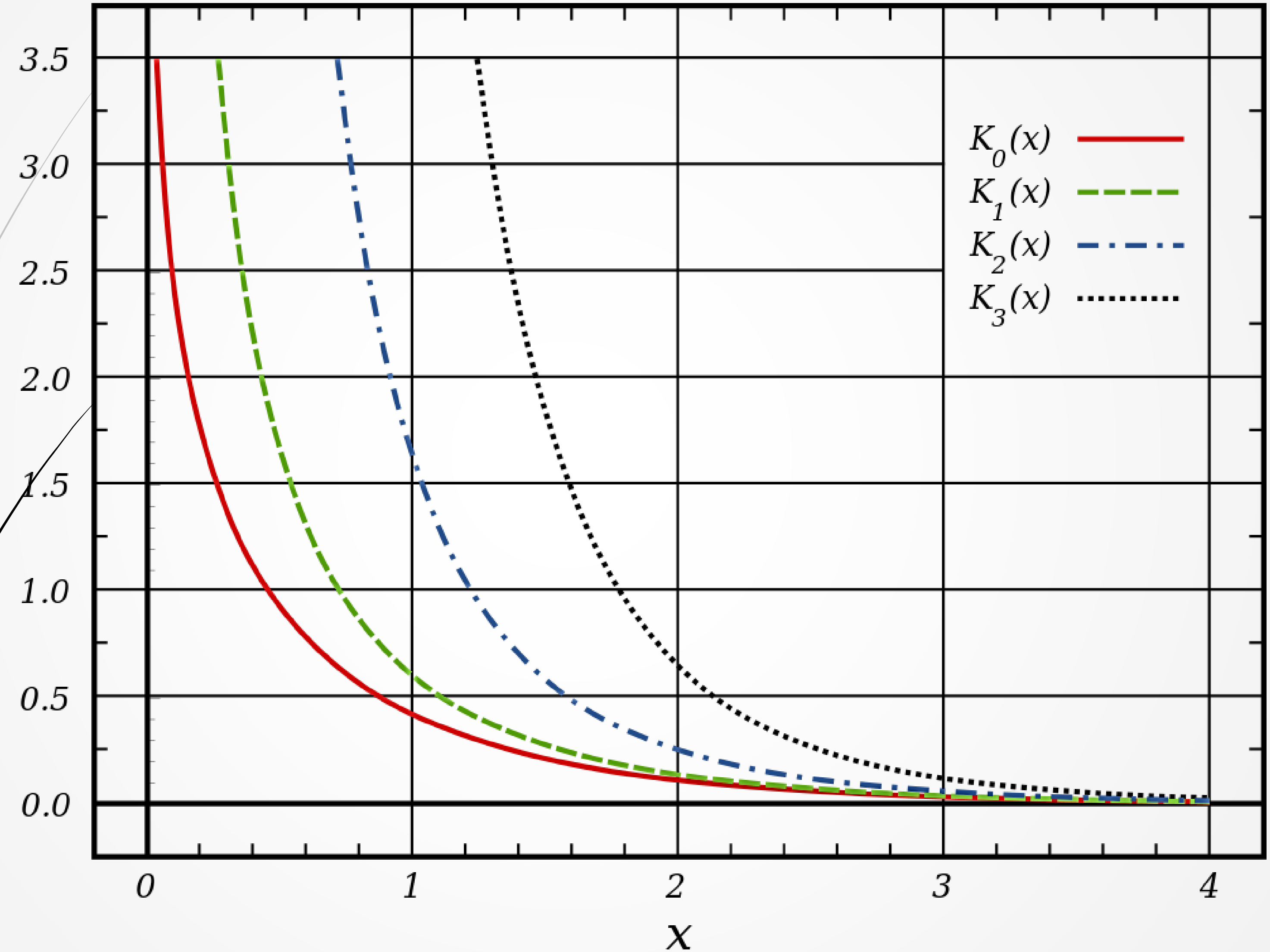
$N_m(x)$
$N_0(x)$
$N_1(x)$
$N_2(x)$
$N_3(x)$
$N_4(x)$
$N_5(x)$
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x

Segunda solução para equação de Bessel Modificada (para ν = m inteiro)

$$y_2\,(x) = K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{sen(\nu\pi)}$$

Funções de Bessel Modificada de segunda espécie

K_ν (x) é solução da equação de Bessel para <u>ν não inteiro</u>, pois é uma combinação linear de J_ν e $J_{-\nu}$, que são soluções LI .



3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
x
K0(x)
K1(x)
K2(x)
K3(x)

Resumo

Equação de Bessel de ordem m

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

1ª. espécie

$$y_1(x) = J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

2ª. espécie

$$y_2(x) = N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sen(\nu\pi)}$$

$$y\,(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x)$$

Equação de Bessel Modificada de ordem m

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

1ª. espécie

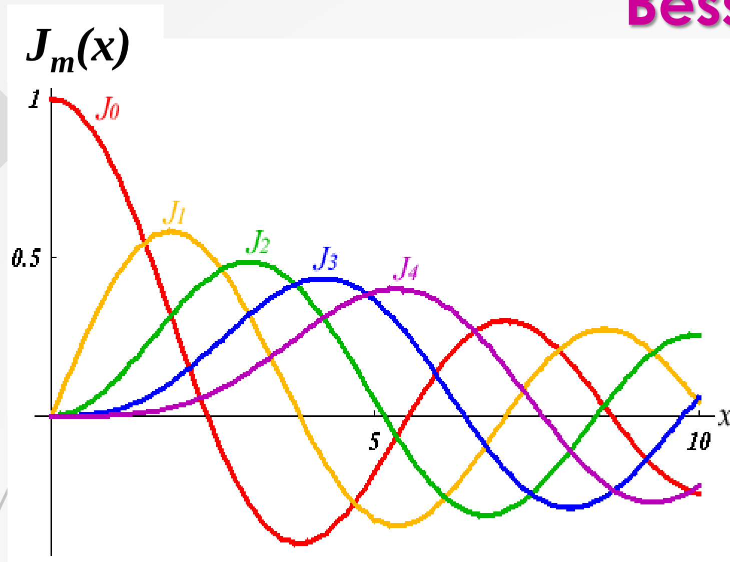
$$y_1(x) = I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

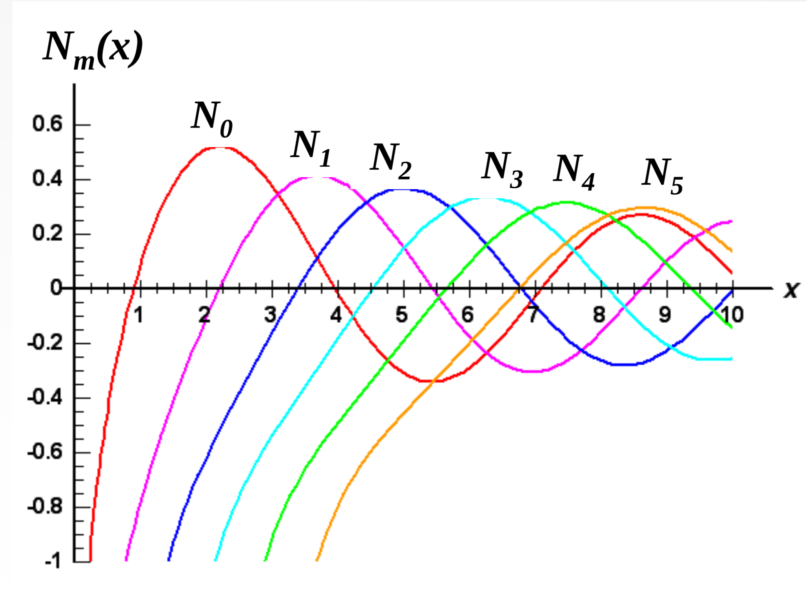
2ª. espécie

$$y_2\,(x) = K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{sen(\nu\pi)}$$

$$y\,(x) = CI_\nu(x) + DK_\nu(x)$$

Bessel





Bessel Modificada