



Polinômios de Legendre

Utilização de Polinômios Legendre e Associados de Legendre:

- ▶ Determinação das funções de onda dos elétrons nas órbitas de um átomo;
- ▶ Determinação das funções potenciais na geometria esfericamente simétrica, etc. (Veja livros textos de Mecânica Quântica e Eletrodinâmica);
- ▶ Em física de reatores nucleares, polinômios de Legendre tem uma importância extraordinária para as soluções de equações de transporte de nêutrons e definição das funções de espalhamento adequadas de nêutrons. (*) (**)

(*) P.F. Zweifel, **Reactor Physics**, McGraw-Hill Inc., New York (1973)

(**) Fikret Anli , Süleyman_Gungor, *Some useful properties of Legendre polynomials and its applications to neutron transport equation in slab geometry*, Appl. Math. Modelling, **31** (4) 2007, p. 727–733.

A separação de variáveis da ED de Helmholtz em coordenadas esféricas resulta nas 3 equações:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{Q}{r^2} \right) R = 0$$

Equação de Bessel Esférica

$$k^2 > 0$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2$$

Equação Associada de Legendre

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(Q - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

l inteiro e positivo

$$Q = l(l + 1)$$

Na equação de Legendre Associada fazemos uma mudança de variável:

$$x = \cos\theta$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(Q - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0$$

A equação diferencial resultante, para $Q = n^2$, é:

$$(1 - x^2) \frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left(n^2 - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) \Theta = 0$$

Para $m = 0$



Equação de Legendre

$$(1 - x^2) \frac{d^2P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + n^2 P = 0$$

Procurando solução por Séries de Potências (Método de Frobenius):

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha}$$

Relação de Recorrência

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1)-n^2}{(j+1)(j+2)} a_j$$

Para $\alpha = 0$, a_1 e a_2 não nulos

Convergência (teste da razão)

$$\frac{a_{j+2}}{a_j} = \frac{j(j+1)-n^2}{(j+1)(j+2)} x^2$$

- ▶ A equação de Legendre tem soluções limitadas no intervalo $-1 \leq x \leq +1$ ($-1 \leq \cos\theta \leq +1$), se e somente se

$$\text{▶ } n^2 = l(l+1)$$

Sendo que l pode assumir somente valores inteiros e positivos, $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

- ▶ Desta forma, a equação de Legendre admite soluções na forma de séries de potências, ou seja, na forma polinomial.

Chega-se assim ao Polinômios de Legendre:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2l - 2m)!}{m! (l - m)! (l - 2m)!} x^{l-2m}$$

Onde: $\lfloor l/2 \rfloor = l/2$ para n par e $\lfloor l/2 \rfloor = (l-1)/2$ para n ímpar

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

Onde $x = \cos \theta$

$$P_0(x) = 1$$

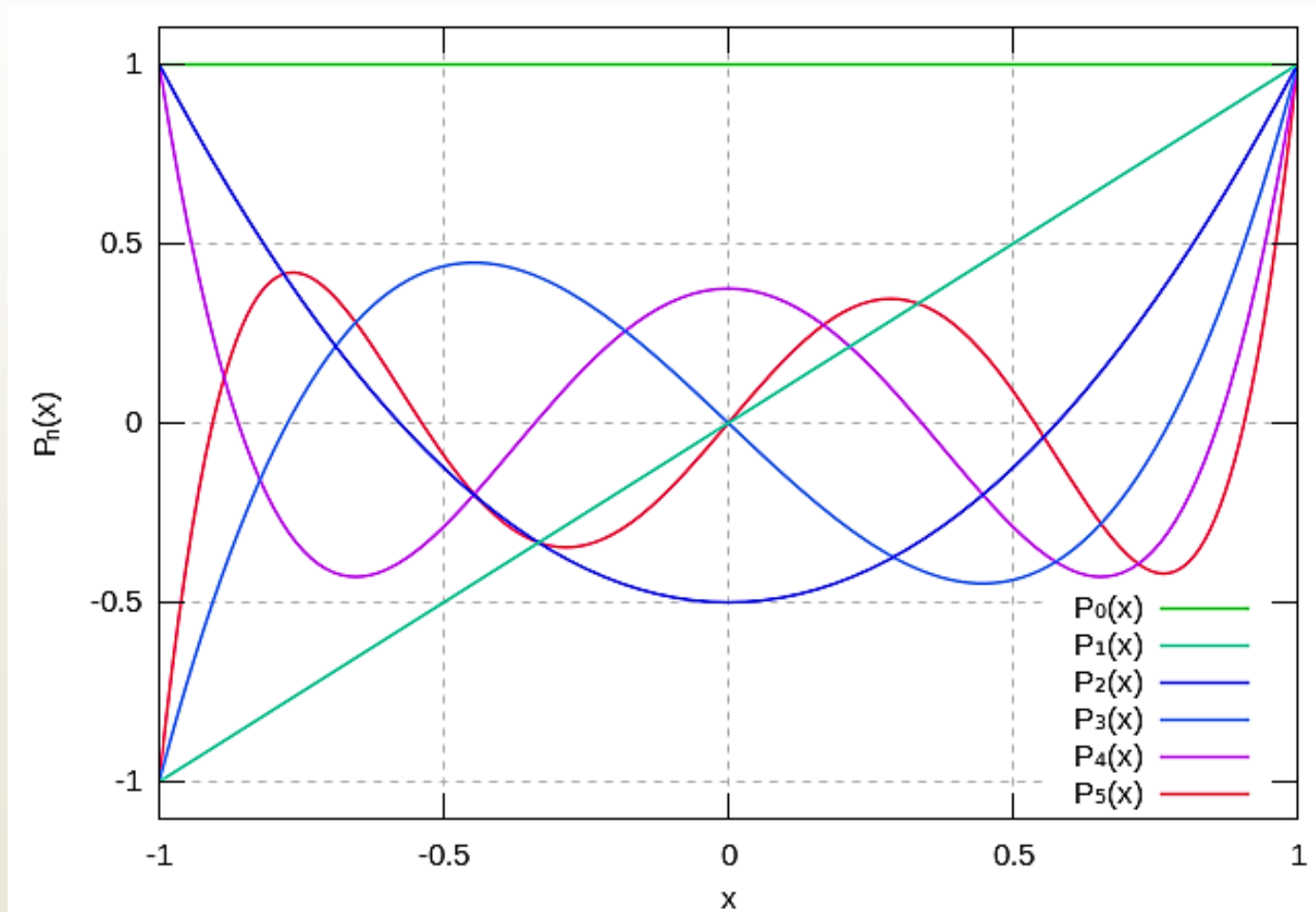
$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$



Função geratriz – $G(x,t)$

$G(x,t)$ é a função desenvolvida em série de potências para $|t| < 1$, sendo os polinômios de Legendre os coeficientes da expansão.

$$G(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$$

$$G(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$$

Relações de Recorrência obtidas a partir de $G(x,t)$

As fórmulas de recorrência podem ser obtidas pela derivação da função geratriz em relação a x e t .

$$lP_{l-1}(x) - (2l + 1)xP_l(x) + (l + 1)P_{l+1}(x) = 0$$

$$xP_l'(x) - P_{l-1}'(x) = lP_l(x)$$

$$P_l(x) - 2xP_l'(x) - P_{l+1}'(x) = P_{l-1}'(x)$$

$$(x^2 - 1)P_l'(x) = xP_l(x) - P_{l-1}(x)$$

$$P_{l+1}'(x) - xP_l'(x) = (l + 1)P_l(x)$$

Ortogonalidade dos Polinômios de Legendre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_l(x) \cdot P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{l,n} \quad \delta_{l,n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = l \\ 0 & \text{se } n \neq l \end{cases}$$

$$\bar{P}_l(x) = \left(\frac{2l+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} P_l(x)$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}_l(x) \cdot \bar{P}_n(x) dx = \delta_{l,n}$$

FORMULA DE RODRIGUES para a funções de Legendre

$$P_l(x) = \frac{1}{l! 2^l} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

Expansão de uma função em polinômios de Legendre

Seja $f(x)$ uma função definida e contínua no intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

Esta função pode ser expandida numa série de polinômios de Legendre e a série converge no intervalo.

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$$

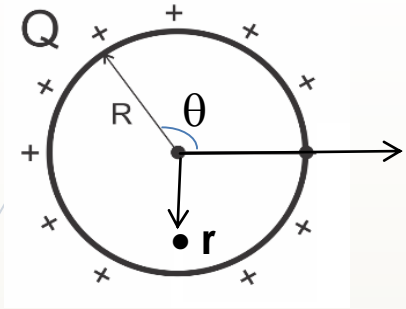
$$A_l = \left(\frac{2l+1}{2} \right) \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot P_l(x) dx$$

Observe que não tem nada a ver com a função Geratriz:

$$G(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$$

$$G(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l$$

EXEMPLO: Em eletrostática e gravitação, vemos potenciais escalares do formato: $V = \frac{K}{d}$



$$d = |\vec{R} - \vec{r}| = \sqrt{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2} = R \sqrt{1 - 2\frac{r}{R} \cos \theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

Fazendo:

$$h = \frac{r}{R}$$



$$V = \frac{K}{R} (1 - 2hx + h^2)^{-1/2}$$



$$V = \frac{K}{R} \sum_{l=1}^{\infty} h^l P_l(x)$$

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$$



$$V = K \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l P_l(\cos \theta)}{R^{l+1}}$$

$$h = \frac{r}{R}$$

Equação de Laplace - Coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \psi = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\phi(\varphi)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

Associada de Legendre

Polinômios de Legendre Associados - $m \neq 0$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(Q - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

$$x = \cos \theta$$



$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left(n^2 - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) \Theta = 0$$

$$\text{com } Q = n^2 = l(l + 1)$$

Procurar soluções do tipo:

$$\Theta(x) = A(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} f(x)$$

$$(1 - x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - 2(m + 1)x \frac{df}{dx} + (l - m)(l + m + 1)f = 0$$

Para $m = 0$ a equação diferencial acima é a Equação de Legendre e a solução é $f(x) = P_l(x)$.

Se diferenciarmos a equação acima m vezes

$$\left[(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2(m + 1)x \frac{d}{dx} + [l - m)(l + m + 1)] \frac{d^m P_l}{dx^m} = 0 \right]$$

Ou seja: $f(x) = \frac{d^m P_l}{dx^m}$

$$\Theta_l^m(x) = A(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \times \frac{d^m P_l}{dx^m} = AP_l^m(x)$$

Na parte angular podemos escrever:

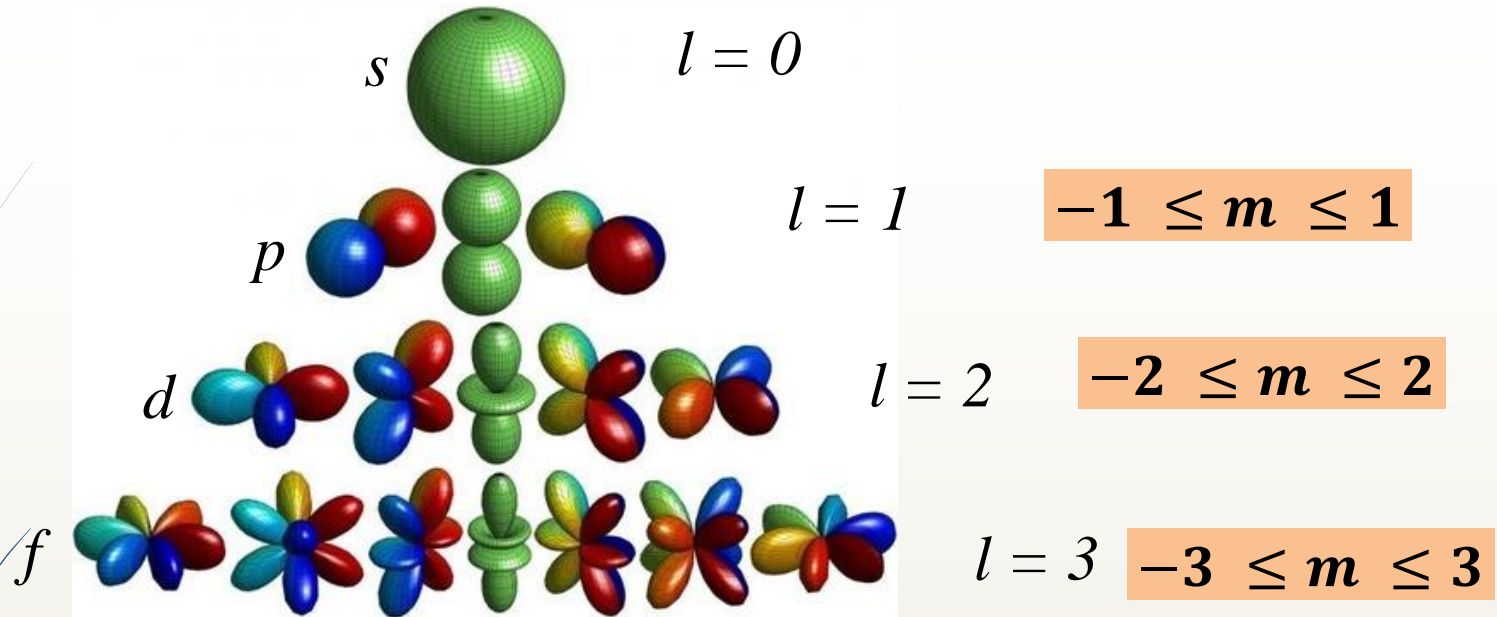
$$\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi) = A_l^m P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$



Harmônicos Esféricos

$$A_l^m = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]$$

Orbitais dos elétrons



Padrões de radiações emitidas por antenas

Distribuição de campo elétrico ao redor de uma molécula, que é a soma de monopolos, dipolos, quadrupolos, etc