TRANSFORMADAS INTEGRAIS

LAPLACE E FOURIER

Transformada integral

Em Física Matemática há pares de funções que satisfazem uma expressão na forma:

$$\boxed{\mathrm{F}(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha,t)dt}$$

$$\boxed{f(t) = \int_a^b F(\alpha)K^*(\alpha,t)d\alpha}$$

A função *F(*α*)* é denominada de transformada integral de *f(t)* pelo núcleo *K(*α*,t), e vice-versa*.

A operação também pode ser descrita como o mapeamento de uma função f(t) no espaço t para uma outra função, F(*α*), no espaço α**.**

Transformada de Laplace
Definição

$$G(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t) = \int_0^\infty G(s)e^{-st}ds$$

Núcleo

$$K(s,t) = e^{-st}$$

Para t > 0

G(s) **é a Transformada de Laplace de *f(t)* e vice-versa**

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = G(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = f(t)$$

Transformada de Fourier
Definição

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\omega t}} \boldsymbol{dt}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i\omega t}}\, \boldsymbol{d\omega}$$

Núcleo: $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{t}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\omega t}}$

Transformada de Laplace (TL)

Cálculo da TL para funções elementares

$$G(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad f(t) = \int_0^{\infty} G(s)e^{-st}ds$$

Exemplos:

$$f(t) = 1 \qquad G(s) = \frac{1}{s}$$

$$f(t) = \cos at \qquad G(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$f(t)$	$G(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},\quad 0!=1$	$\frac{1}{s^n}\quad n=1,2,3,\ldots$
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{s^n}\quad n>0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!},\quad 0!=1$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n}\quad n=1,2,3,\ldots$
$\frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n}\quad n>0$
$\delta(t-\alpha)$	$e^{-\alpha s}$
$\frac{\operatorname{sen}(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{s^2+\alpha^2}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$

$f(t)$	$G(s)$
$\frac{e^{\beta t}\operatorname{sen}(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$
$e^{\beta t}\cos(\alpha t)$	$\frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$
$\frac{\operatorname{senh}(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{s^2-\alpha^2}$
$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
$\frac{e^{\beta t}\operatorname{senh}(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{(s-\beta)^2-\alpha^2}$
$e^{\beta t}\cosh(\alpha t)$	$\frac{s-\beta}{(s-\beta)^2-\alpha^2}$

Tabela de TL de funções elementares

$f(t)$	$G(s)$
$\dfrac{e^{\beta t}\operatorname{sen}(\alpha t)}{\alpha}$	$\dfrac{1}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$
$e^{\beta t}\cos(\alpha t)$	$\dfrac{s-\beta}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$
$\dfrac{\operatorname{senh}(\alpha t)}{\alpha}$	$\dfrac{1}{s^2-\alpha^2}$
$\cosh(\alpha t)$	$\dfrac{s}{s^2-\alpha^2}$
$\dfrac{e^{\beta t}\operatorname{senh}(\alpha t)}{\alpha}$	$\dfrac{1}{(s-\beta)^2-\alpha^2}$
$e^{\beta t}\cosh(\alpha t)$	$\dfrac{s-\beta}{(s-\beta)^2-\alpha^2}$

$f(t)$	$G(s)$
$\dfrac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{\beta-\alpha}$	$\dfrac{1}{(s-\alpha)(s-\beta)}\quad \alpha\neq\beta$
$\dfrac{\beta e^{\beta t}-\alpha e^{\alpha t}}{\beta-\alpha}$	$\dfrac{s}{(s-\alpha)(s-\beta)}\quad \alpha\neq\beta$
$\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha t)-\alpha t\cos(\alpha t)}{2\alpha^3}$	$\dfrac{1}{(s^2+\alpha^2)^2}$
$\dfrac{t\operatorname{sen}(\alpha t)}{2\alpha}$	$\dfrac{s}{(s^2+\alpha^2)^2}$
$\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha t)+\alpha t\cos(\alpha t)}{2\alpha}$	$\dfrac{s^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$
$\cos(\alpha t)-\dfrac{\alpha t}{2}\operatorname{sen}(\alpha t)$	$\dfrac{s^3}{(s^2+\alpha^2)^2}$

Tabela de TL de funções elementares – cont.

$f(t)$	$F(s)$
$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$
$\alpha f(\alpha t)$	$F\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)$
$e^{\alpha t}f(t)$	$F(s-\alpha)$
$u(t-\alpha)=\begin{cases} f(t-\alpha) & t>\alpha \\ 0 & t<\alpha \end{cases}$	$e^{-\alpha s}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
$-tf(t)$	$F'(s)$
$t^2f(t)$	$F''(s)$

Observe que nesta tabela F(s) = G(s)

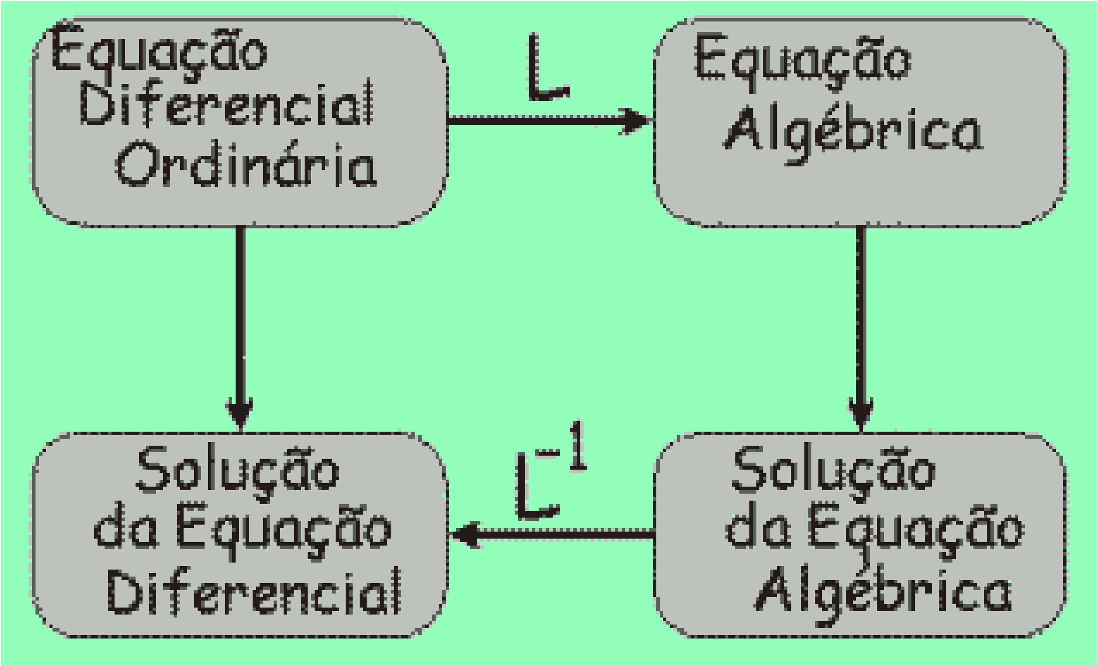
Algumas Propriedades da TL

Observe que nesta tabela F(s) = G(s)

$f(t)$	$F(s)$
$\int_0^t f(u)\,du$	$\dfrac{F(s)}{s}$
$\int_0^t \cdots \int_0^t f(u)\,du^n = \int_0^t \dfrac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\,du$	$\dfrac{F(s)}{s^n}$
$\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$	$F(s)G(s)$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(u)\,du$

Algumas Propriedades da TL – cont.

Utilização de TL



Exemplo: Solução de problemas de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = sen2t$$

Com y(0) = 2 e y'(0)=1

Aplica a TL na equação diferencial

$$\int_0^\infty \frac{d^2y}{dt^2}\, e^{-st}dt + \int_0^\infty y\, e^{-st}dt = \int_0^\infty sen2t\, e^{-st}dt\, sen2t$$

Ou

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

Exemplo: Solução de problemas de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = sen2t$$

Com y(0) = 2 e y'(0)=1

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s) = \int_0^{\infty} y\, e^{-st} dt$$

TL de funções elementares
f(t)=y(t) e F(s) = Y(s)

$\mathcal{L} f(t)$	$F(s)$
$\mathcal{L} f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$\mathcal{L}\, \mathrm{sen}(\alpha t)$	$\dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$$

Substitui-se os valores iniciais:

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + Y(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$$

Isola-se Y(s):

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

A ideia é escrever Y(s) em vários termos já conhecidos da Tabela de TL e calcular a transformada inversa para obter y(t):

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0!=1$	$\frac{1}{s^n} \quad n=1,2,3,\ldots$
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{s^n} \quad n>0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!}, \quad 0!=1$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n} \quad n=1,2,3,\ldots$
$\frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n} \quad n>0$
$\delta(t-\alpha)$	$e^{-\alpha s}$
$\frac{\text{sen}(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{s^2+\alpha^2}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$

Frações parciais

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Devem ser iguais

$$Y(s) = \frac{as+b}{(s^2+1)} + \frac{cs+d}{(s^2+4)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{(as+b)\times(s^2+4) + (cs+d)\times(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Expandindo o numerador de Y(s)

$$(as+b)\times(s^2+4) + (cs+d)\times(s^2+1) = (a+c)s^3 + (b+d)s^2 + (4a+c)s + (4b+d)$$

Logo:

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6$$
$$= (a+c)s^3 + (b+d)s^2 + (4a+c)s + (4b+d)$$

Comparando-se os termos, determina-se a, b, c e d:

$$a + c = 2 \qquad b + d = 1$$

$$4a + c = 8 \qquad 4b + d = 6$$

$$Y(s) = \frac{as+b}{(s^2+1)} + \frac{cs+d}{(s^2+4)}$$

$$a + c = 2$$
$$b + d = 1$$
$$4a + c = 8$$
$$4b + d = 6$$

$a = 2$
$b = 5/3$
$c = 0$
$d = -2/3$

$$Y(s) = 2\frac{s}{(s^2+1)} + \frac{5}{3}\frac{1}{(s^2+1)} - \frac{1}{3}\frac{2}{(s^2+4)}$$

Aplicando-se a TL inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} + \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)}\right\}$$

Logo, a solução y(t) para a ED com condições iniciais é:

$$y(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$$

$f(t)$	$G(s)$
$\text{sen}(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = sen2t$$

Com y(0) = 2 e y'(0)=1

Transformada de Fourier (TF)

Transformada de Fourier
Forma exponencial

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\omega t}} \boldsymbol{dt}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i\omega t}}\, \boldsymbol{d\omega}$$

TF: Em senos e cossenos

Obtidas a partir da forma exponencial e usando:

$$e^{\pm i\omega t} = cos\omega t \pm isen\omega t$$

$$f(-t) = f(t)$$
PAR

$$f(-t) = -f(t)$$
IMPAR

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} f(t)\ cos\omega t\, dt$$

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} f(t)\, sen\omega t\, dt$$

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} F(\omega)\, cos\omega t\, d\omega$$

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} F(\omega)\, sen\omega t\, d\omega$$

	$f(x)$	$\mathcal{F}(\omega)$
1.	$\begin{cases} 1 & \text{se } \lvert x\rvert < a, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > a. \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}$
2.	$\begin{cases} 1 & \text{se } a < x < b, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$	$\frac{i(e^{-ib\omega} - e^{-ia\omega})}{\sqrt{2\pi}\omega}$
3.	$\begin{cases} 1 - \frac{\lvert x\rvert}{a} & \text{se } \lvert x\rvert < a, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > a, \end{cases} \quad a > 0.$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{a\omega}{2}}{a\omega^2}$
4.	$\begin{cases} x & \text{se } \lvert x\rvert < a, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > a, \end{cases} \quad a > 0.$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a\omega\cos(a\omega) - \operatorname{sen}(a\omega)}{\omega^2}$
5.	$\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \lvert x\rvert < \pi, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > \pi, \end{cases}$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\omega^2 - 1}$
6.	$\begin{cases} \operatorname{sen}(ax) & \text{se } \lvert x\rvert < b, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > b, \end{cases} \quad a, b > 0.$	$\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\operatorname{sen}[(\omega - a)b]}{\omega - a} + \frac{\operatorname{sen}[(\omega + a)b]}{\omega + a}\right)$
7.	$\begin{cases} \cos(ax) & \text{se } \lvert x\rvert < b, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > b, \end{cases} \quad a, b > 0.$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\operatorname{sen}[(\omega - a)b]}{\omega - a} + \frac{\operatorname{sen}[(\omega + a)b]}{\omega + a}\right)$
8.	$\frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0.$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\lvert\omega\rvert}}{a}$

Tabela de TF

	$f(x)$	$\mathcal{F}(\omega)$
9.	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{1+a^2x^2}, \quad a>0.$	$e^{-\frac{\lvert\omega\rvert}{a}}$
10.	$\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{ax}{2}}{ax^2}, \quad a>0.$	$\begin{cases} 1-\frac{\lvert\omega\rvert}{a} & \text{se } \lvert\omega\rvert<a, \\ 0 & \text{se } \lvert\omega\rvert>a. \end{cases}$
11.	$e^{-a\lvert x\rvert}, \quad a>0.$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}$
12.	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{se } x>0, \\ 0 & \text{se } x<0, \end{cases} \quad a>0.$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+i\omega}$
13.	$\begin{cases} 0 & \text{se } x>0, \\ e^{ax} & \text{se } x<0, \end{cases} \quad a>0.$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a-i\omega}$
14.	$\lvert x\rvert^n e^{-a\lvert x\rvert}, \quad a>0, n>0.$	$\frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(a-i\omega)^{n+1}}+\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}\right)$
15.	$e^{-\frac{a}{2}x^2}, \quad a>0.$	$\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$

Tabela de TF - continuação

Alguns problemas são difíceis de solucionar diretamente. Pode ser mais fácil resolver o problema transformado e aplicar a transformada inversa na solução.

Exemplo:

A representação de um sinal no domínio do tempo (do espaço, ...) está presente, naturalmente, no nosso dia a dia. Porém, certas operações tornam-se muito mais simples e esclarecedoras se trabalharmos no domínio da frequência, domínio este, conseguido a partir das Transformadas de Fourier (TF).

$$t \to f$$

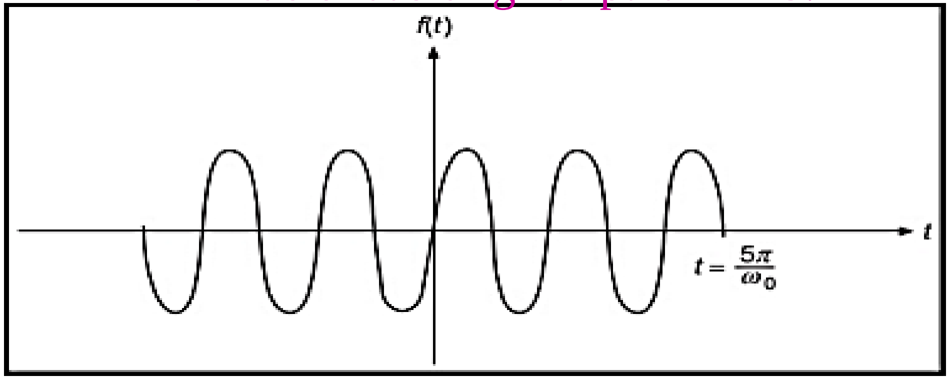
$$x \to k$$

Exemplo

Imagine um trem de ondas $sen\omega_0 t$: $f(t) = \begin{cases} sen\omega_0 t & para \quad |t| < \dfrac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 & para \quad |t| > \dfrac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$

Considere que esta onda passe por um filtro de abertura finita.

Trem de ondas original para N = 5.



Exemplo $f(t) = \begin{cases} sen\omega_0 t \quad para \quad |t| < \dfrac{N\pi}{\omega_0} \\ \\ 0 \qquad\qquad para \quad |t| > \dfrac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\frac{N\pi}{\omega_0}} sen\omega_0 t\ \boldsymbol{sen\omega t\ dt}$$

Fazendo a integral, ou usando a tabela de TF obtém-se:

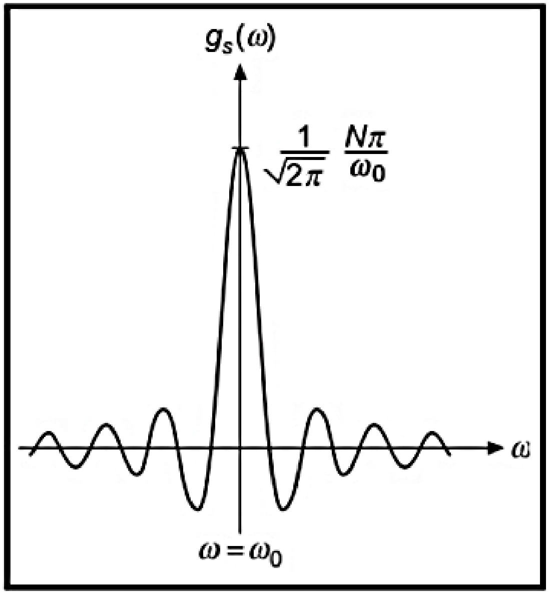
$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin[(\omega_0 - \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 + \omega)} \right].$$

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin[(\omega_0 - \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 + \omega)}\right].$$

Para $\omega \approx \omega_0$ $\Rightarrow$ $$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm\frac{1}{N}, \pm\frac{2}{N},$$

Somente o primeiro termo é importante pois o denominador é pequeno.

Somente o máximo central é relevante e a dispersão em frequências pode ser dada por:



$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{N}$$

Se N for grande, pulso longo, a dispersão da frequência será pequena.
Por outro lado, se o pulso for limitado, N pequeno, a distribuição será mais larga e os máximos secundários mais importantes.

Princípio da Incerteza

Análogo clássico do Princípio da Incerteza da MQ.

Se tivemos tratando de ondas eletromagnéticas, sendo h a constante de Planck:

$$E = \frac{h\omega}{2\pi} \Rightarrow \Delta E = \frac{h\Delta\omega}{2\pi}$$

ΔE representa a incerteza na energia do pulso.

Há também uma incerteza no tempo, pois a onda de N ciclos leva $2N\pi/\omega_0$ segundos para passar ($|t| < \frac{N\pi}{\omega_0}$).

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2N\pi}{\omega_0}$$

$$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{h\Delta\omega}{2\pi} \cdot \frac{2N\pi}{\omega_0}$$

com

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{N} \Rightarrow \Delta E \cdot \Delta t = h$$

Pelo Princípio da Incerteza: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi} = \hbar/2$

Transformada de Fourier de Derivadas

$$\boldsymbol{F(\omega)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(t)}\, \boldsymbol{e^{i\omega t} dt}$$

$$\boldsymbol{F_1(\omega)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\frac{df}{dt}}\, \boldsymbol{e^{i\omega t} dt}$$

$$\boldsymbol{F_1(\omega)} = -\, i\omega \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \boldsymbol{e^{i\omega t} dt} = -\boldsymbol{i}\omega F(\omega)$$

$$\boxed{\boldsymbol{F_n(\omega) = (-i\omega)^n F(\omega)}}$$

Linearidade

$$\mathcal{F}\{c1\ g(t) * c2\ h(t)\} = c1\mathcal{F}\{\ g(t)\} + \ c2\mathcal{F}\{h(t)\} = \ c1\ G(\omega) + c2\ H(\omega)$$

Derivada $F_n(\omega) = (-i\omega)^n F(\omega)$

Convolução

$$g(t) * h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{F}\{g(t) * h(t)\} = G(\omega)F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t) * h(t)]\ e^{i\omega t}\ dt$$

Translação

$$\mathcal{F}\{\ g(t-a)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-a) e^{i\omega t} dt = e^{-i\omega a} G(\omega)$$

Escalonamento $\mathcal{F}\{\ g(ct)\} = \dfrac{G(\omega)}{|c|}$

Algumas Propriedades da TF

Exemplo: ED Fluxo de Calor

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\psi \to \psi(x,t) \to \Psi(k,t)$$

Transformada em x, fazendo ω = k.

$$\boldsymbol{g(k)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)\, e^{ikx} dx}$$

$$\boldsymbol{\Psi(k,t)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\psi(x,t)\, e^{ikx} dx}$$

Aplica a TF na EDP: $$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Aplica a TF inversa para $\Psi(k,t)$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\alpha^2 k^2 \Psi \quad \Rightarrow \quad \Psi(k,t) = C exp(-\alpha^2 k^2 t)$$

$$\boldsymbol{\psi(x,t)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(k,t)\, \boldsymbol{e^{-ikx}\, dk}$$

$$\boldsymbol{\psi(x,t) = \frac{C}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{2t}}\, exp\left(\frac{x^2}{4\alpha^2 t}\right)}$$

EXTRA

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

O seu valor pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\,rdrd\theta = \int_{0}^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} d\theta = \pi.\end{aligned}$$

Sinais ... Ondas...

- Distribuição de elétrons em um átomos pode ser obtida de uma transformada de Fourier da amplitude de raios X espalhados.

- Na Mecânica Quântica, a origem Física das relações de Fourier é a natureza ondulatória da matéria e a descrição que fazemos em termos de ondas (k).

Funções periódicas são representadas por séries de Fourier;

Funções não-periódicas oscilantes são representadas por transformadas de Fourier (espectro do sinal);

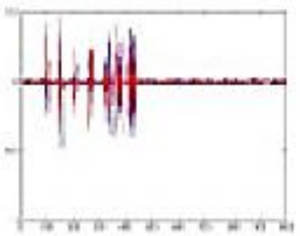
A TF decompõe um sinal em suas componentes elementares
seno e cosseno

Sinal

Fenómeno variável no tempo e/ou espaço.

Descrito quantitativamente.

> "***Os sinais são funções de uma ou mais variáveis independentes e, tipicamente contêm informação acerca do comportamento ou natureza de um fenómeno físico.***"



Exemplos:

F(t) -> Som

F(x,y) -> Imagem

F(x,y,t) -> Vídeo

Aplicações da TF:

- Física
- Química
- Teoria dos números
- Análise combinatória
- **Processamento de sinais**
- Teoria das probabilidades
- Estatística
- Criptografia
- e outras áreas.

Fontes

http://www.dsc.ufcg.edu.br/~pet/ciclo_seminarios/tecnicos/2010/TransformadaDeFourier.pdf

FÍSICA MATEMÁTICA - MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ENGENHARIA E FÍSICA, **GEORGE ARFKEN,** Ed. **CAMPUS ELSEVIER.**

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ELEMENTARES E PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO, William E. Boyce, Richard C. DiPrima, 9ª. Ed., Editora LTC.

Exercícios para TL

1) Mostrar que: $\mathcal{L}\{e^{\beta t}\sin\alpha t\} = \frac{\alpha}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$

2) Mostrar que: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$

3) Usando o método das frações parciais mostre que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{ae^{-at}-be^{-bt}}{(a-b)} \text{ com a} \neq \text{b}$$

4) Encontre a solução da ED do oscilador harmônico simples usando TL, sendo m a massa do oscilador, a mola é ideal e tem constante elástica k, desprezando o atrito. As condições iniciais são: $X(0)=X_0$ e $X'(0)=0$

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + kX = 0, \qquad X(t)$$

Exercícios para TF

1) Na Tabela de Transformadas de Fourier demonstrei as propriedades 1 e 13.

   Dica: Use a definição integral.

Dicas para resolver os exercícios de TL

Nos exercícios 1 e 2,

usar a definição integral da TL.

No exercício 3 seguir a mesma sistemática de resolução usada em “Frações parciais” resolvido em sala.

No exercício 4 seguir a mesma sistemática do exemplo dado em aula, ou seja, aplica-se a TL na equação diferencial e determina-se a TL. Depois reescrever a TL de forma a identificar termos que aparecem na Tabela de funções elementares.