



Resolução das equações

- ▶ **Equação de Difusão (calor) (1D)**
- ▶ **Equação de ondas (corda vibrante) (1D)**
- ▶ **Equação de Laplace (2D)**

Ondas acústicas: corda (1D) e tambor (2D); ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas (3D).



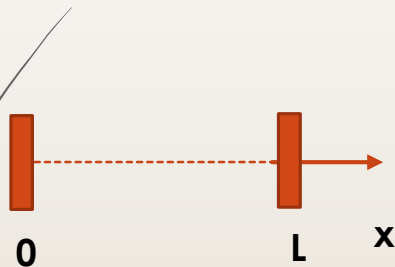
**Equação de ondas
(corda vibrante) (1D)**

Problema específico

Ondas mecânicas em uma corda elástica de comprimento L , ligeiramente esticada entre dois suportes sendo o eixo x ao longo da corda (violino, ...).

Desprezados os efeitos de amortecimento \rightarrow resistência do ar.

Deslocamento da corda $\rightarrow u(x,t)$



$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$a^2 = \frac{F}{\rho}$$

- F é a força
- ρ é a massa/unid. comp.

- **Condição inicial** \rightarrow em $t = 0$
 - $\rightarrow u(x,0) = f(x)$: posição inicial
 - $\rightarrow u'(x,0) = g(x)$ ($u' = du/dt$): velocidade inicial
- **Condição de contorno**: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ para $t \geq 0$. (parado nas extremidades em qq momento)

Resolução: dois casos

1) *Corda elástica com deslocamento inicial não nulo:*

$$u(x,0) = f(x) \text{ e } u'(x,0) = 0$$

2) *Corda elástica colocada em movimento a partir da posição de equilíbrio $u(x,0) = 0$, mas com velocidade inicial $u'(x,0) = g(x)$.*

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$


Separação de variáveis: $u(x,t) = X(x) T(t)$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda^2 a^2 T = 0$$

Caso 1

Corda elástica com deslocamento inicial não nulo: $u(x,0) = f(x)$ e $u'(x,0) = 0$


- 
- *Condição de contorno: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ para $t \geq 0$.
(parado nas extremidades em qq momento)*

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$


$$X(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda^2 a^2 T = 0$$

$$T(t) = B_1 \sin \lambda a t + B_2 \cos \lambda a t$$


$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x$$


- *Condição de contorno: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ (somente $x!$)*
- $A_2 = 0$
- $A_1 \neq 0$
- $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$


$$X(x) = X_n(x) = A_1(n) \sin \frac{n\pi}{L} x$$


Da equação em t :

$$T_n(t) = B_1(n) \sin \frac{n\pi a}{L} t + B_2(n) \cos \frac{n\pi a}{L} t$$

$$u = u(x, t) = X(x) T(t)$$


$$u_n(x, t) = \left(A_1(n) \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \times \left[B_1(n) \sin \frac{n\pi a}{L} t + B_2(n) \cos \frac{n\pi a}{L} t \right]$$

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{L} x \times \left(A_n \sin \frac{n\pi a}{L} t + B_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \right)$$


$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{L} x \times \left(A_n \sin \frac{n\pi a}{L} t + B_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \right)$$

Aplicando-se a condição inicial: $u(x, 0) = f(x)$ e $u'(x, 0) = 0$

$$u_n'(x, t) = \sin \frac{n\pi}{L} x \times \frac{n\pi a}{L} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t - B_n \sin \frac{n\pi a}{L} t \right)$$

$u'(x, 0) = 0$

$$u_n'(x, 0) = \sin \frac{n\pi}{L} x \times \frac{n\pi a}{L} (A_n \cdot 1 - B_n \cdot 0) = 0 \quad \rightarrow \quad A_n = 0$$

$$u_n(x, t) = B_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Solução geral é a superposição linear de todos $u_n(x, t)$

$$u(x, t) = \sum_n u_n(x, t) = \sum_n B_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Resultado para as condições:
 $u(x,0) = f(x)$ e $u'(x,0) = 0$

$$u(x, t) = \sum_n u_n(x, t) = \sum_n B_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Só falta aplicar a condição: $u(x,0) = f(x)$

$$f(x) = \sum_n B_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$



Coeficientes B_n são os coeficientes de Fourier e dependem da forma de $f(x)$.

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Análise

$$u(x, t) = \sum_n u_n(x, t) = \sum_n B_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Para um valor fixo de n a função é periódica no tempo cujo período é $T_n = 2L/na$, pois:

$$\cos \frac{n\pi a}{L} t = \cos \omega_n t \quad \rightarrow \quad \omega_n = \frac{n\pi a}{L}$$

$$\rightarrow \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

↓

São as frequências naturais da corda, ou seja, as frequências no qual a corda vibra livremente.

Análise (cont.)

$$u(x, t) = \sum_n u_n(x, t) = \sum_n B_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x$$

O fator dependente da posição $\sin \frac{n\pi}{L} x$ representa o padrão de deslocamento que ocorre na corda ao vibrar em uma dada frequência.

Cada padrão de deslocamento é chamado de **modo natural de vibração** e é periódico em x com período $\rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$ que é o comprimento de onda do modo de frequência $\omega_n = \frac{n\pi a}{L}$

$$\text{Vetor de onda} = k = 2\pi/\lambda$$

Resumindo...

Em t: $\omega_n = \frac{n\pi a}{L}$; $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \rightarrow T_n = \frac{2L}{na}$

Em x: $k_n = \frac{n\pi}{L}$; $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$

$$u(x, t) = \sum_n u_n(x, t) = \sum_n B_n \cos \omega_n t \sin k_n x$$

com $f(x) = \sum_n B_n \sin \frac{n\pi}{L} x$

Caso 2

Corda elástica colocada em movimento a partir da posição de equilíbrio.

*Condição inicial: $u(x,0) = 0$,
 $u'(x,0) = g(x)$.*

- *Condição de contorno: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ para $t \geq 0$.
(parado nas extremidades em qq momento)*

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$X(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda^2 a^2 T = 0$$

$$T(t) = B_1 \sin \lambda a t + B_2 \cos \lambda a t$$

- *Como as equações diferenciais são as mesmas e as condições de contorno são as mesmas o resultado antes de aplicar as condições iniciais são as mesmas do caso 1:*

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{L} x \times \left(A_n \sin \frac{n\pi a}{L} t + B_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \right)$$

- *Aplicando-se a primeira condição inicial, $u(x, 0) = 0$:*

$$B_n = 0$$

$$u_n(x, t) = A_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi a}{L} t$$

Solução geral é a superposição linear de todos $u_n(x, t)$

$$u(x, t) = \sum_n u_n(x, t) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi a}{L} t$$


- *Aplicando-se a segunda condição inicial:*
 $u'(x,0) = g(x)$.

$$u(x, t) = \sum_n u_n(x, t) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi a t}{L}$$

$$u'(x, t) = \sum_n u_n'(x, t) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \times \frac{n\pi a}{L} \times \cos \frac{n\pi a t}{L}$$

- $u'(x,0) = g(x)$ ou seja para $t = 0$.

$$u'(x, 0) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \times \frac{n\pi a}{L} = g(x)$$


$$u'(x, 0) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \times \frac{n\pi a}{L} = g(x)$$

- *Reescrevendo como:*

$$g(x) \frac{L}{\pi a} = \sum_n n A_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

- *Chamando de:*

$$g(x) \frac{L}{\pi a} = f(x)$$

$$n A_n = B_n$$

$$f(x) = \sum_n B_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

- *Ou seja:*

$$n A_n = \frac{2}{L} \frac{L}{\pi a} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Finalmente

$$u(x, t) = \sum_n u_n(x, t) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi a}{L} t$$

com

$$A_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Equação de ondas (corda vibrante) (1D)



$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Separação
de variáveis

$$u(x,t) = X(x) T(t)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$X(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda^2 a^2 T = 0$$

$$T(t) = B_1 \sin \lambda a t + B_2 \cos \lambda a t$$

Mesmas condições de contorno para os dois casos: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ para $t \geq 0$. (parado nas extremidades em qq momento)

Muda a condição inicial

- *Corda elástica com deslocamento inicial não nulo: $u(x,0) = f(x)$ e $u'(x,0) = 0$*

$$u(x,t) = \sum_n B_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

- *Corda elástica colocada em movimento a partir da posição de equilíbrio. Condição inicial: $u(x,0) = 0$, $u'(x,0) = g(x)$.*

$$u(x,t) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi a}{L} t$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$