Resolução das equações EDP

- Equação de Difusão (calor) (1D)
- Equação de ondas (corda vibrante) (1D)
- Equação de Laplace (2D)

Equação de Difusão de Calor – 1 D

A equação mais geral unidimensional é dada:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}_g=\rho c_p\frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial t}$$

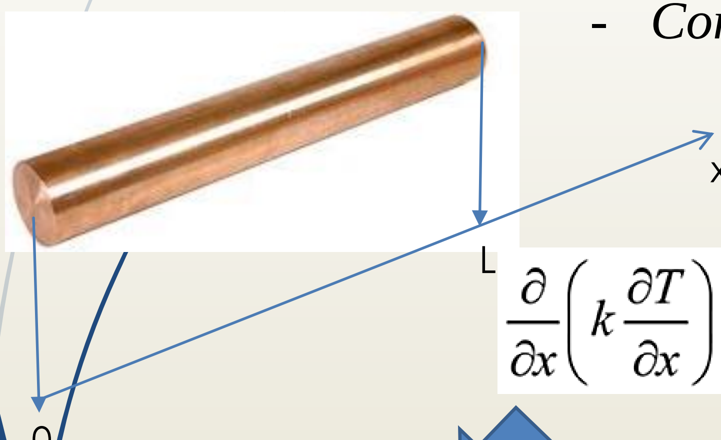
$$T = T(x,t)$$

T é a temperatura;
c_p é o calor específico;
ρ é a densidade de massa;
k é a condutividade térmica;
$\dot{q}_g$ é a taxa de geração de calor.

Problema específico

Barra longa de secção reta uniforme feita de uma material homogêneo de comprimento L.

- *Material homogêneo → k é constante em x*
- *Extremidades isoladas:* $\dot{q}_g = 0$;
- *Condição inicial → em t = 0 → T(x,0) = f(x)*
- *Condição de contorno: T(0,t) = T(L,t) = 0*



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}_g=\rho c_p\frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial t} \Rightarrow k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\rho c_p}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow a^2=\frac{k}{\rho c_p}$$

Difusividade (m^2/s)

Resolução

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Separação de variáveis: T(x,t) = X(x) Y(t)

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{dY}{dt} + \lambda^2 a^2 Y = 0$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$T = T(x,t) = X(x)\,Y(t)$$

- *Condição de contorno: T(0,t) = T(L,t) = 0 (somente x!)*
- $A = 0$
- $B \neq 0$
- $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$

$$X(x) = X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\frac{dY}{dt} + \lambda^2 a^2 Y = 0$$

$$Y(t) = Y_n(t) = C_n exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}\right)$$

Resultado:

$$T(x,t) = \sum_{n} T_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L} exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}\right)$$

- *Condição inicial → em t = 0 → T(x,0) = f(x),* *para determinar A_n!*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Série de Fourier em senos!

$$\boldsymbol{A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sin\frac{n\pi x}{L} dx}$$

Algumas possibilidades de distribuição de temperatura inicial:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{600}{L}x & para \;\; 0 \leq x < L/2 \\ 600 - \frac{600}{L}x & para \;\; \frac{L}{2} < \; x \leq L \end{cases}$

2) $f(x) = constante = 300$

etc