



# **LOM 3253 - Física Matemática**

## **2<sup>a</sup>. parte**

**Prof<sup>a</sup>. Cristina Bormio Nunes**



# Bibliografia Sugerida

- ▶ W E. Boyce e R. C. DiPrima, Equações Diferenciais Elementares, Ed. LTC, 9ª edição
- ▶ Arfken e Weber, Física Matemática, Ed. Campus/Elsevier
- ▶ Butkov, E., Física Matemática, Editora **LTC**.

# Conteúdo

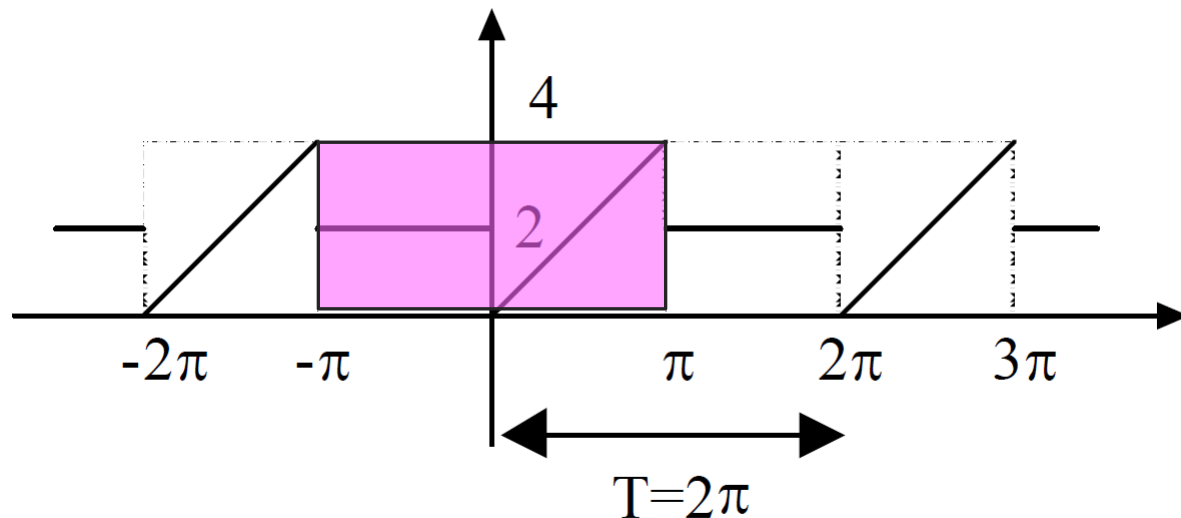
- ▶ Série de Fourier
- ▶ Equações Diferenciais Parciais
  - ▶ Equação de Difusão (calor)
  - ▶ Equação de ondas (corda vibrante)
  - ▶ Equação de Laplace
- ▶ Transformadas Integrais: Fourier e Laplace
- ▶ Funções Especiais: Polinômios de Legendre, Harmônicos Esféricos e Funções de Bessel



# Séries de Fourier

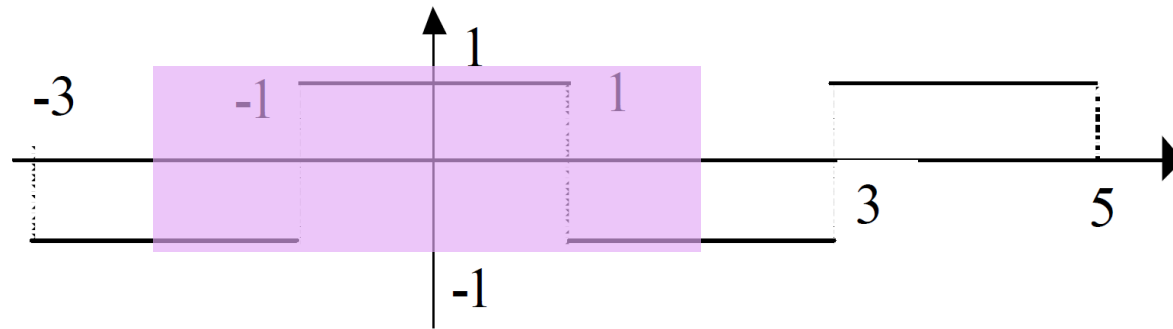
# Funções Periódicas

- As **funções periódicas** podem ser definidas como aquelas funções  $f(t)$  para as quais:
- $f(t) = f(t + T)$
- A menor constante  $T$  que satisfaz  $f(t)$  é chamada **período** da função  $f(t)$ . Por iteração :
- $f(t) = f(t + nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

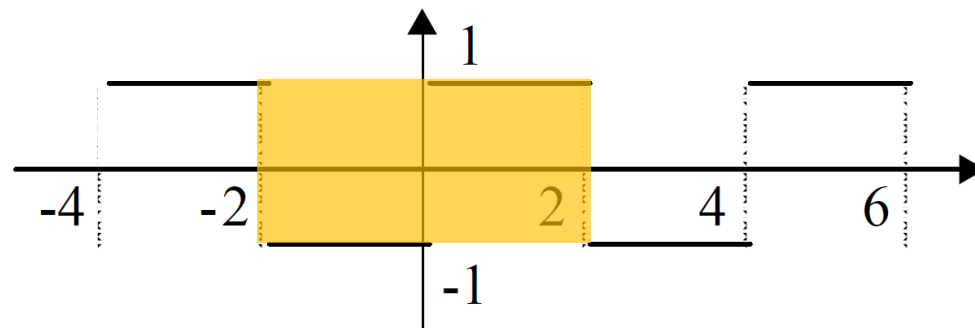


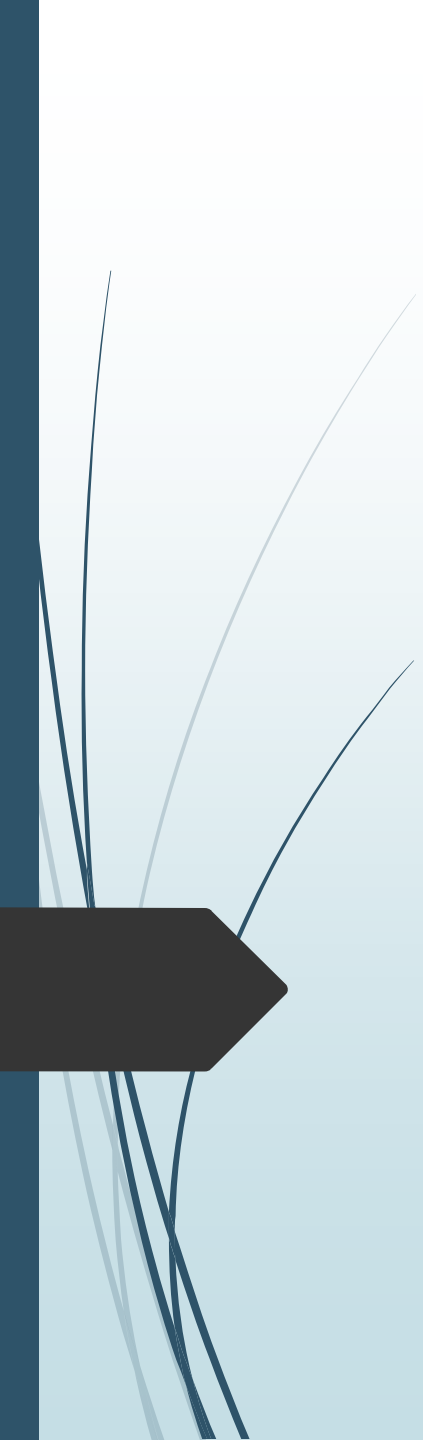
# Propriedades de Paridade

**função par se  $f(-x) = f(x)$ .**



**função ímpar se  $f(-x) = -f(x)$ .**

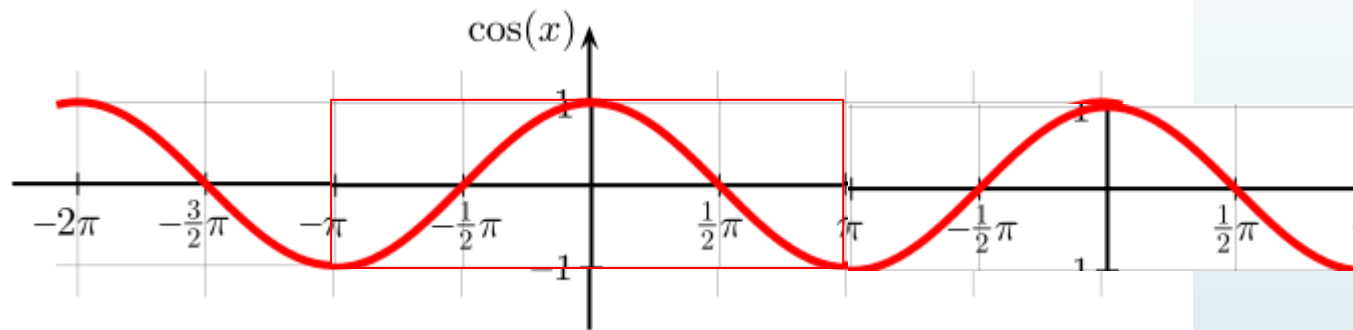




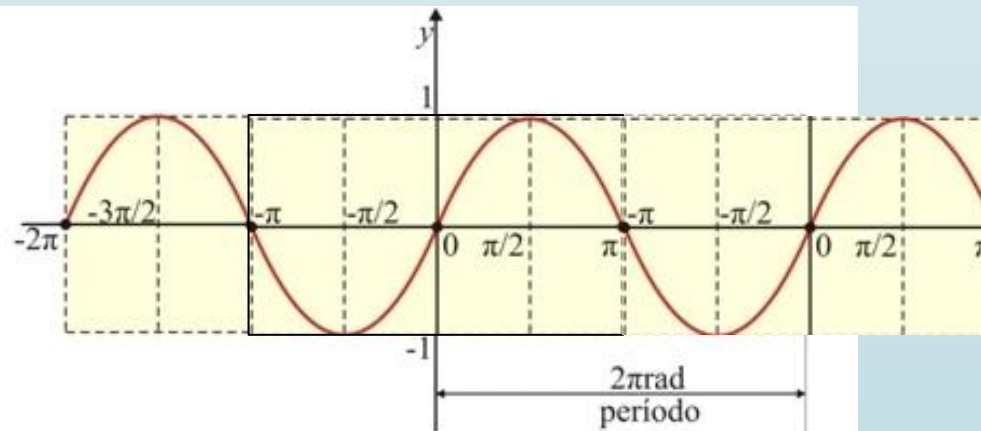
Funções seno e  
cosseno são funções  
periódicas!

# Propriedades de Paridade

**função par se  $f(-x) = f(x)$ .**



**função ímpar se  $f(-x) = -f(x)$ .**

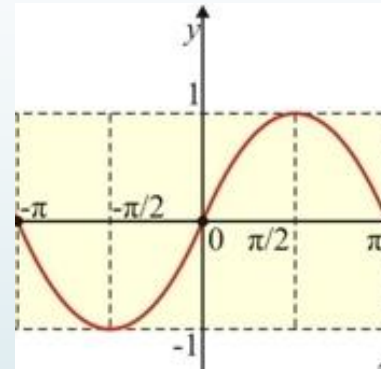




# Integração de funções pares e ímpares em intervalos simétricos

► Se a função for ímpar

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0$$



► Se a função for par

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

# Relações de ortogonalidade

$$a) \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \cos mx \, dx = 0 \quad (\text{para todos os } n, m)$$

$$b) \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & (\text{se } n \neq m) \\ 2\pi & (\text{se } n = m = 0) \\ \pi & (\text{se } n = m \neq 0) \end{cases}$$

$$c) \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \text{sen } mx \, dx = \begin{cases} 0 & (\text{se } n \neq m) \\ \pi & (\text{se } n = m) \end{cases}$$

É possível mostrar estas relações usando :

- $\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$
- $\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$
- $\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$
- $\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

# Definição de Série de Fourier

- Uma série formada por senos e cossenos é chamada de série trigonométrica assume a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

- Se a função converge uniformemente no intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ , a série convergirá uniformemente para todos os valores de  $x$
- Se os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \quad (n > 0)$$

- Os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes de Fourier e a série  $f(x)$  é denominada de **Série de Fourier** de período  $2\pi$ .

# O período $2\pi$ não é obrigatório na teoria das séries de Fourier.

- A substituição de  $x$  por  $(2\pi/T)t$  fornece uma série com período  $T$ :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$\omega = 2\pi/T$  é denominada **freqüência angular fundamental** da função  $f(t)$

a série de Fourier resultante deverá reproduzir  $f(t)$  no intervalo

$$-T/2 < t < T/2$$

Em muitas aplicações, quando  $x$  representa uma distância, usar o período  $2L$  é mais conveniente.

Troca-se  $\pi \rightarrow L$  e  $n \rightarrow n\pi/L$  em:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \quad (n > 0)$$

$$f(x) = a_0 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

# Séries em Cossenos ou Senos

## ► Cosseno

$$f(x) = a_0 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} dx,$$

## ► Seno

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = 0$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

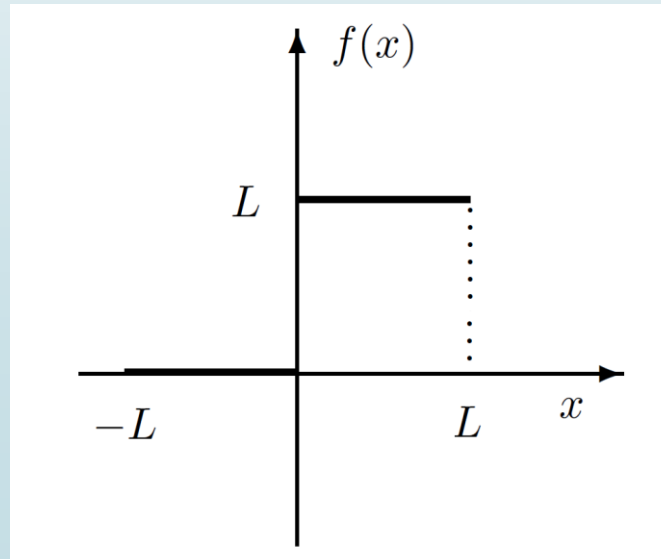
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx,$$

# Exemplo 1:

- Desenvolva a série de Fourier para a onda quadrada:

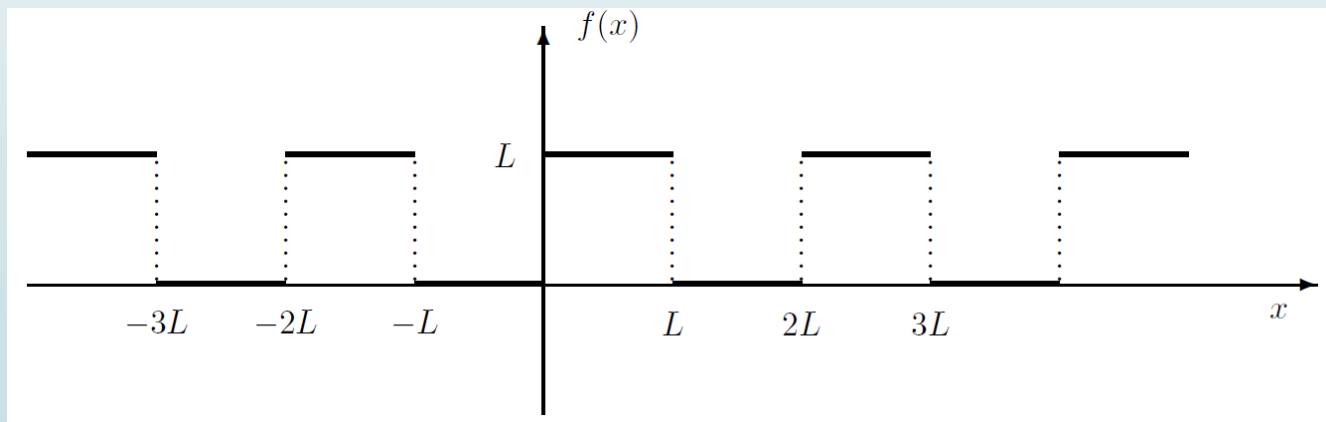
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -L \leq x \leq 0 \\ L & \text{se } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$f(x + 2L) = f(x)$$



► Série de Fourier para a onda quadrada:

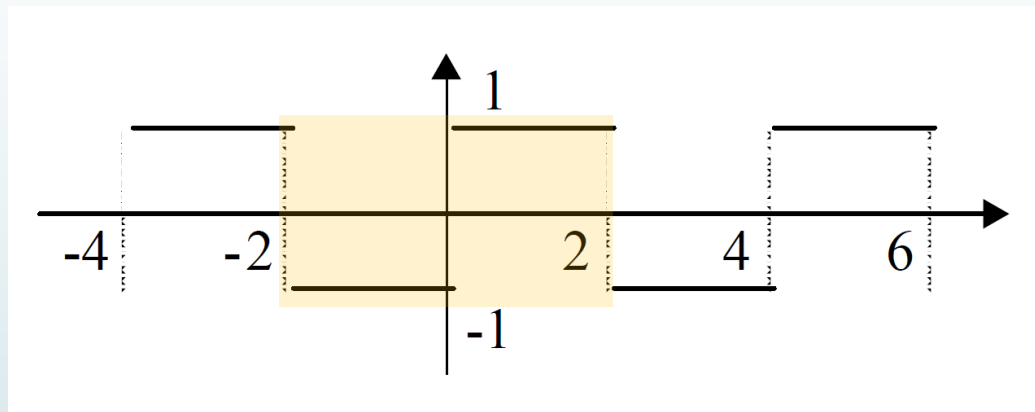
$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Sen} \left[ \frac{(2n+1)\pi x}{L} \right]}{(2n+1)}$$





## Exemplo 2:

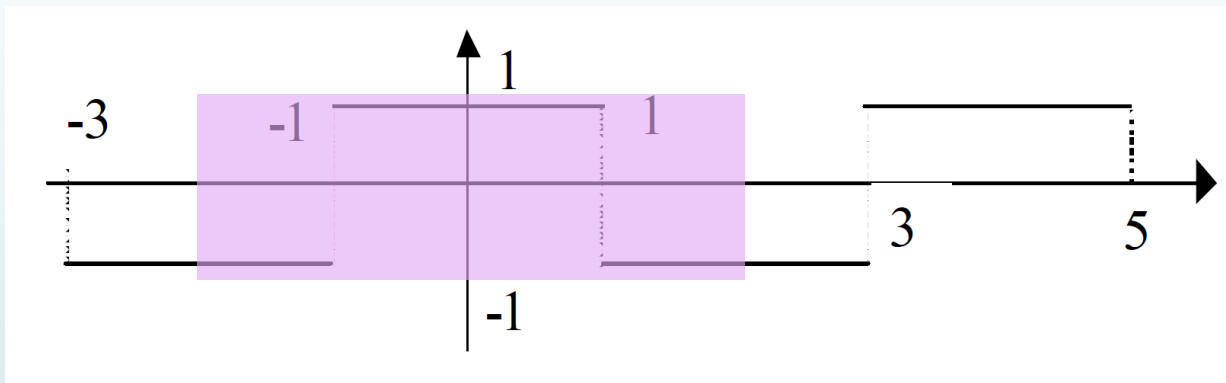
- Desenvolva a série de Fourier para a função ímpar:



$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \text{sen} \frac{\pi}{2} t + \frac{1}{3} \text{sen} \frac{3\pi}{2} t + \frac{1}{5} \text{sen} \frac{5\pi}{2} t + \dots \right).$$

## Exemplo 3:

- Desenvolva a série de Fourier para a função par:

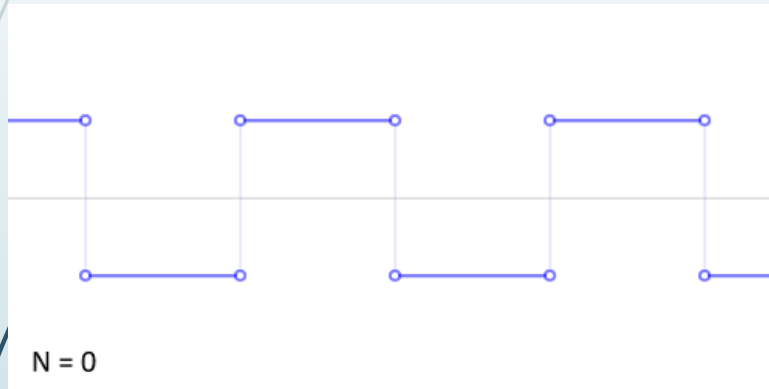


$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{2} t - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} t + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} t - \dots \right)$$

# Vantagens da Representação de Fourier

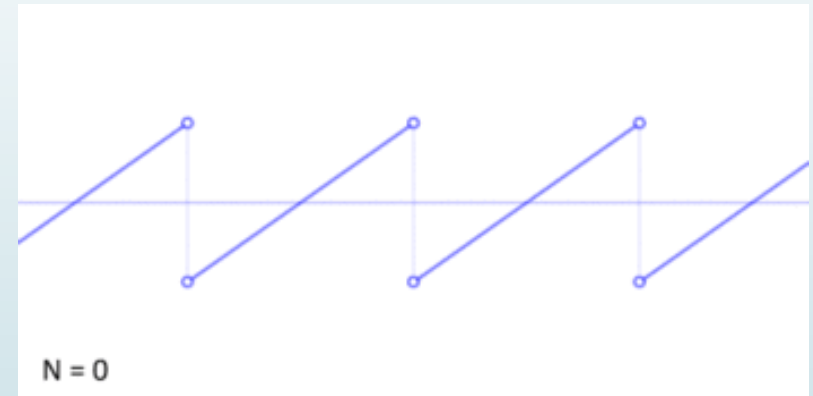
- Expansão de funções descontínuas
- Expansão de funções periódicas

Onda quadrada



$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{(2N+1)\pi t}{2}}{(2N+1)}$$

Onda dente de serra



$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\text{sen} Nt}{N}$$

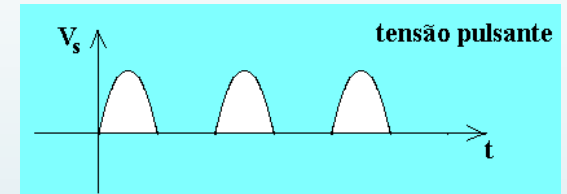
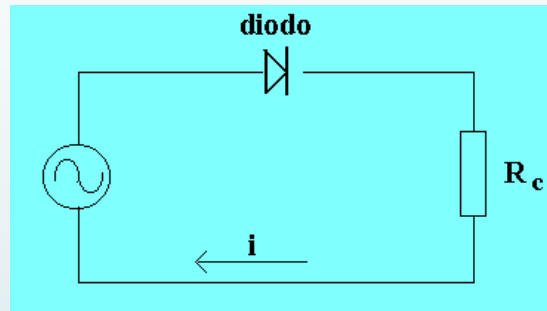
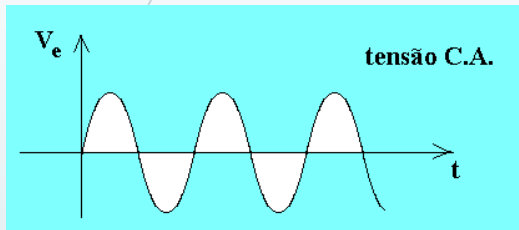


# Aplicações

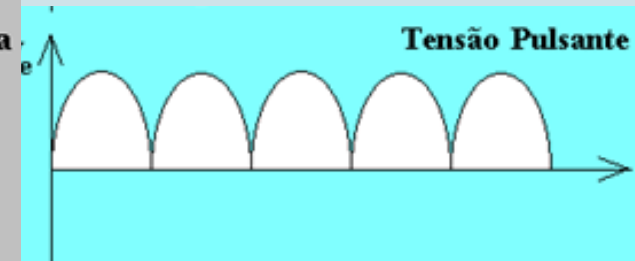
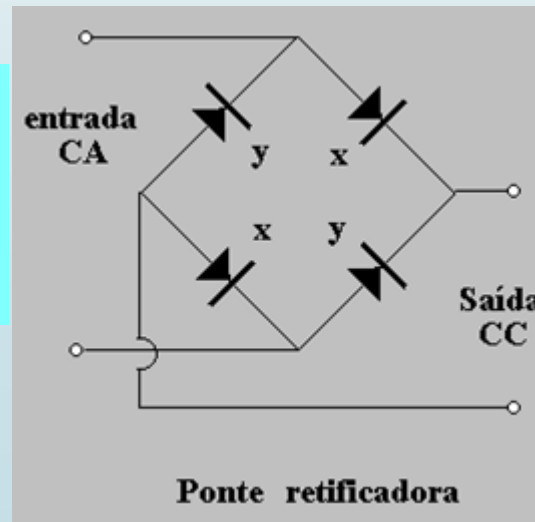
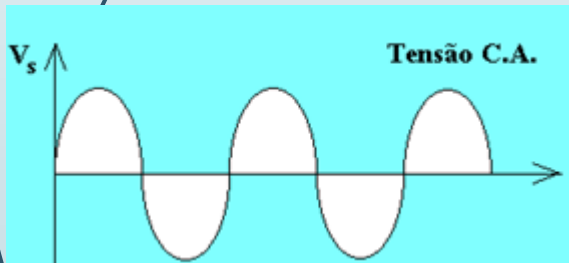
- ▶ Onda quadrada em altas frequências  $\gg$  circuitos elétricos projetados para lidar com pulsos que sobem abruptamente.
- ▶ Retificador de onda completa (AC  $\rightarrow$  DC)
- ▶ Série Infinita, Função Zeta de Riemann

# Retificador de onda

## Retificador de meia onda



## Retificadores de onda completa.



# A onda passada pelo retificador de onda completa resulta em:

$$f(t) = -\operatorname{sen}\omega t \quad \text{para} \quad -\pi < \omega t < 0$$

$$f(t) = \operatorname{sen}\omega t \quad \text{para} \quad 0 < \omega t < \pi$$

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega t}{4n^2 - 1}$$

A frequência original  $\omega$  foi eliminada. A oscilação de frequência mais baixa é  $2\omega$ . As componentes de alta frequência caem com  $4n^2$ , mostrando que o retificador de onda completa faz um bom trabalho na aproximação da corrente contínua, dependendo da aplicação.

# Função Zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

$$f(x) = x^2 \quad -\pi < x < \pi$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

Para  $x = \pi$ :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

# Lista de exercícios

► Esboce o gráfico das funções por 3 períodos e encontre a série de Fourier:

► A)  $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{para } 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad f(x+2\pi)=f(x)$

► B)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -2 \leq x \leq -1 \\ x & \text{para } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{para } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad f(x+4)=f(x)$

► C)  $f(x) = L - x \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{em senos, período } 2L$