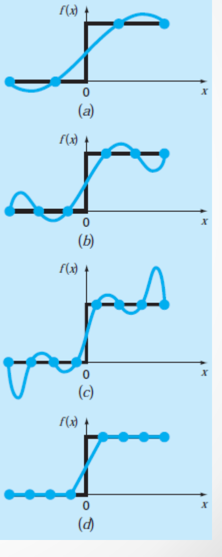
Modelagem em Engenharia C & A

Aula 10- Interpolações Avançadas

Melhorando os dados….

- Na aula 5 aprendemos a fazer uma interpolação linear - função pint(x, y, xint)
- Defeitos:
  - só funciona para uma função razoavelmente comportada – não há mudança de tendência
  - Descontinuidade entre os seguimentos
  - Interpolação linear é chamada de spline de 1o grau
- Uma primeira melhoria – garantir a continuidade da primeira diferencial



O ajuste Polinomial

- Emprega o método dos mínimos quadrados
- Nao tem vinculação com o fenômeno físico

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + e$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum x_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum x_i^2 (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)$$

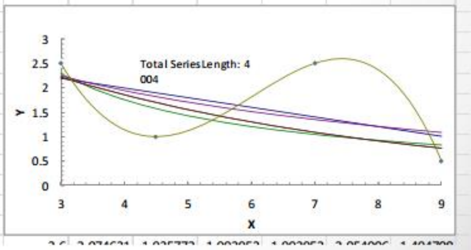
$$(n)a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 + \left(\sum x_i^2\right) a_2 = \sum y_i$$
$$\left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 + \left(\sum x_i^3\right) a_2 = \sum x_i y_i$$
$$\left(\sum x_i^2\right) a_0 + \left(\sum x_i^3\right) a_1 + \left(\sum x_i^4\right) a_2 = \sum x_i^2 y_i$$

- Ajuste: monta-se uma matriz (n+1) x (n+1)para determinação das n+1 incógnitas a partir da derivada da função polinomial de grau n desejada, em relação à cada coeficiente a ser determinado.

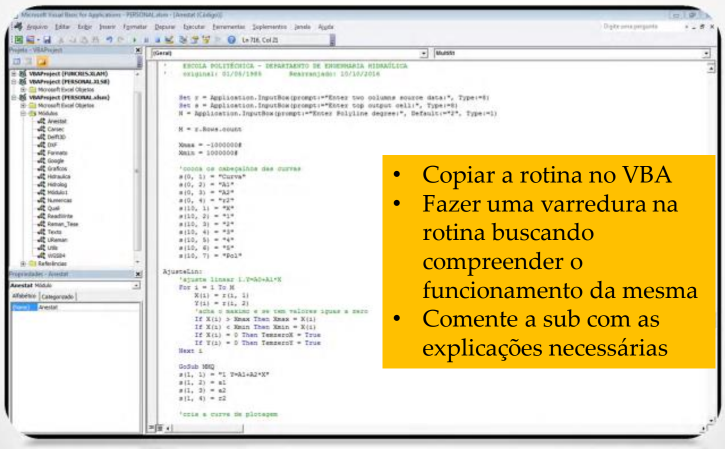
A rotina Multfit

- Permite o ajuste de 5 principais funções 'linearizáveis) – vista na aula 5!
- Permite o ajustre de polinomios de grau N definido pelo usuário
- Utiliza na solução da matriz o método da eliminação de Gauss (o excel tem um limite de aproximadamente 50 equações para solução de matrizes)
- A rotina plota as curvas ajustadas

Curva	A1	A2	r2			
1 Y=A1+A2	2.786136	-0.19764	0.259645			
2 Y=A1*X^	6.341251	-0.92633	0.330612			
3 Y=A1*ex	3.781477	-0.17792	0.365478			
4 Y=A1*A2	3.781477	0.837013	0.365478			
5 Y=A1+A2	3.40912	-1.05791	0.248246			
Polinômic	19.21004	-9.4058	1.396977	-0.02681	-0.00422	1

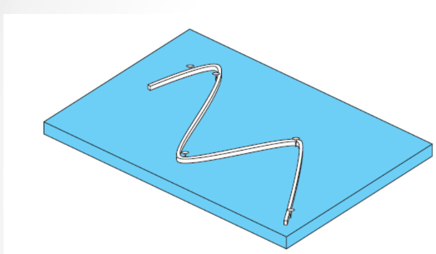


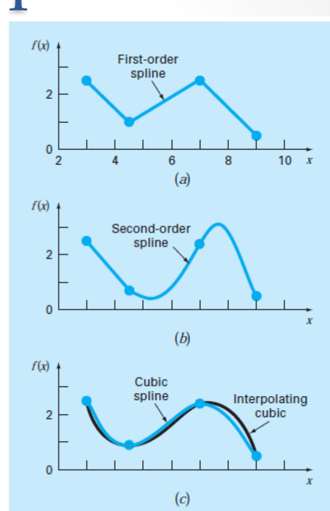
A rotina VBA



- Copiar a rotina no VBA
- Fazer uma varredura na rotina buscando compreender o funcionamento da mesma
- Comente a sub com as explicações necessárias

O termo spline



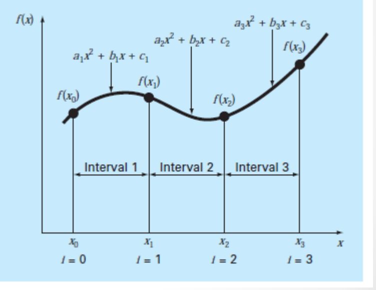


Spline de 2o grau

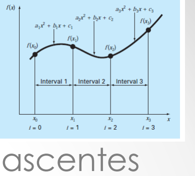
- Objetivo: ajustar um polinômio de grau 2 a cada intervalo dos dados de modo a garantir a continuidade entre os intervalos

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

- Critérios
  - O valor da função entre dois pontos adjascentes deve ser o mesmo
  - A primeira e a última função devem passar pelos pontos dados
  - A primeira derivada nos pontos interiores deve ser contínua
  - Admitir que a segunda derivada é zero nos pontos extremos



Critérios



- O valor da função entre dois pontos adjascentes deve ser o mesmo

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$
$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

- A primeira e a última função devem passar pelos pontos dados

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$
$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

- A primeira derivada nos pontos interiores deve ser contínua

$$f'(x) = 2ax + b$$

- Admitir que a segunda derivada é zero no primeiro ponto

$$a_1 = 0$$

Exemplo

	x	f(x)
0	3	2.5
1	4.5	1
2	7	2.5
3	9	0.5

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

- n = 3
- 3n incógnitas
- Precisamos de 3n equações

- Primeiro critério = 2n-2 equações
- Segundo critério = duas equações
- Terceiro critério = n-1 equações
- Quarto critério = 1 equação

- Total 3 n equações

Exemplo de tabela

	x	f(x)
0	3	2.5
1	4.5	1
2	7	2.5
3	9	0.5

$20,25 a_1 + 4,5 b_1 + c_1 = 1$

$20,25 a_2 + 4,5 b_2 + c_2 = 1$

$49 a_2 + 7 b_2 + c_2 = 2,5$

$49 a_3 + 7 b_3 + c_3 = 2,5$

$9 a_1 + 3 b_1 + c_1 = 2,5$

$81 a_3 + 9 b_3 + c_3 = 0,5$

$9 a_1 + b_1 - 9 a_2 - b_2 = 0$

$14 a_2 + b_2 - 14 a_3 + b_3 = 0$

- $a_1 = 0$

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$
$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$
$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

Resolvendo a matriz no excel

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	20.25	4.5	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	20.25	4.5	1	0	0	0
3	0	0	0	49	7	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	49	7	1
5	9	3	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	81	9	1
7	9	1	0	-9	-1	0	0	0	0
8	0	0	0	14	1	0	-14	-1	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0

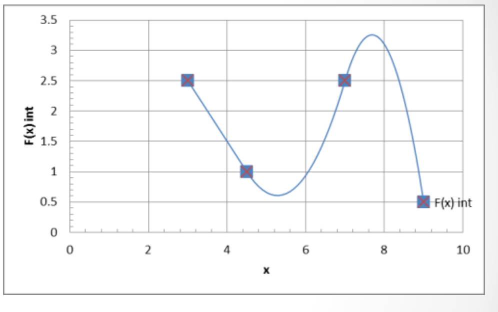
0.00
-1.00
5.50
0.64
-6.76
18.46
-1.60
24.60
-91.30

1.00
1.00
2.50
2.50
2.50
0.50
0.00
0.00
0.00

Verificando o resultado

	x	f(x)
0	3	2.5
1	4.5	1
2	7	2.5
3	9	0.5

x	F(x) int
3	2.5
3.1	2.4
3.2	2.3
3.3	2.2
3.4	2.1
3.5	2
3.6	1.9
3.7	1.8
3.8	1.7
3.9	1.6
4	1.5
4.1	1.4
4.2	1.3
4.3	1.2
4.4	1.1
4.5	1
4.6	0.9064
4.7	0.8256
4.8	0.7576
4.9	0.7024
5	0.66
5.1	0.6304
5.2	0.6136



Spline Cúbica

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- A cada 3 pontos temos uma equação com 4 incógnitas
- Extremamente eficiente para ajustar funções de engenharia
- Rotina muito rápida no exel

Critérios

- O valor das funções deve resultar o mesmo nos pontos interiores 2n-2 equações
- A primeira e a ultima função devem passar pelos pontos dados 2 equações
- A primeira derivada nos pontos intermediários devem ser iguais n-1 equações
- As segundas derivadas nos pontos intermediários devem ser iguais n-1 equações
- A segunda derivada nos nós extremos devem ser nula. 2 equações

Equações

- Admitindo $$f_i''(x) = f_i''(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f_i''(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

- Integrando 2 vezes

$$\begin{aligned} f_i(x) = {} & \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 \\ & + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) \\ & + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1}) \end{aligned}$$

- Considerando o segundo critério $f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i)$

$$\begin{aligned} & (x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) \\ & \quad + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\ & \quad = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] \\ & \quad + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \end{aligned}$$

Algorítmo de solução

- Para i=1, n

$h_i = x_i - x_{i-1}$

$g_i = f''(x_i)$

$y_i = f(x_i)$

$$\begin{aligned} & (x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) \\ & \quad + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\ & \quad = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] \\ & \quad + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \end{aligned}$$

$$h_i g_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})g_i + h_{i+1} g_{i+1} =$$

$$\frac{6}{h_{i+1}}(y_{i+1} - y_i) + \frac{6}{h_i}(y_{i-1} - y_i)$$

- Para cada quatro pontos (0,1,2,3)…n=3

$$h_1 g_0 + 2(x_2 - x_0) g_1 + h_2 g_2 = \frac{6}{h_2}(y_2 - y_1) + \frac{6}{h_1}(y_0 - y_1)$$

$$h_2 g_1 + 2(x_3 - x_1) g_2 + h_3 g_3 = \frac{6}{h_3}(y_3 - y_2) + \frac{6}{h_2}(y_1 - y_2)$$

$$h_3 g_2 + 2 h_4 g_3 + h_4 \cdot g_4 = \frac{6}{h_4}(y_4 - y_3) + \frac{6}{h_3}(y_2 - y_3)$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} h_1 & 2(x_2 - x_0) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(x_3 - x_1) & h_3 & \\ & & h_3 & 2(x_4 - x_2) & h_4 \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{h_2}(y_2 - y_1) + \frac{6}{h_1}(y_0 - y_1) \\ \frac{6}{h_3}(y_3 - y_2) + \frac{6}{h_1}(y_1 - y_2) \\ \frac{6}{h_4}(y_4 - y_3) + \frac{6}{h_3}(y_2 - y_3) \end{bmatrix}$$

- Para os pontos 1 e 2 $g_0 = 0$ e $g_3 = 0$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 2(x_2 - x_0) & h_2 \\ 2(x_3 - x_1) & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{h_2}(y_2 - y_1) + \frac{6}{h_1}(y_0 - y_1) \\ \frac{6}{h_3}(x_3 - x_2) + \frac{6}{h_2}(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

- Resolvendo a matriz

$$f_1(x) = \frac{g_1}{6(x_1 - x_0)}(x_1 - x_0)^3 + \left[\frac{y_0}{x_1 - x_0}\right](x_1 - x) + \left[\frac{y_1}{x_1 - x_0} - \frac{g_1(x_1 - x_0)}{6}\right](x - x_0)$$

$$f_i(x) = \frac{g_i}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \frac{y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{g_i(x_i - x_{i-1})}{6}\right)(x - x_{i-1})$$

Fórmulas de recorrência

- Mudança de variável

$$g_i = f_i''(x) \qquad h_i = (x_i - x_{i-1}) \qquad y_i = f(x_i)$$

$$x \le x_i \qquad f_i(x) = \frac{g_i}{6h_i}(x - x_{i-1})^3 + \frac{y_{i-1}}{h_i}(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{g_i h_i}{6}\right)(x - x_{i-1})$$

- Resolver a matriz para achar g

$$h_i g_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1}) g_i + h_{i+1} g_{i+1} = \frac{6}{h_{i+1}}(y_{i+1} - y_i) + \frac{6}{h_i}(y_{i-1} - y_i)$$

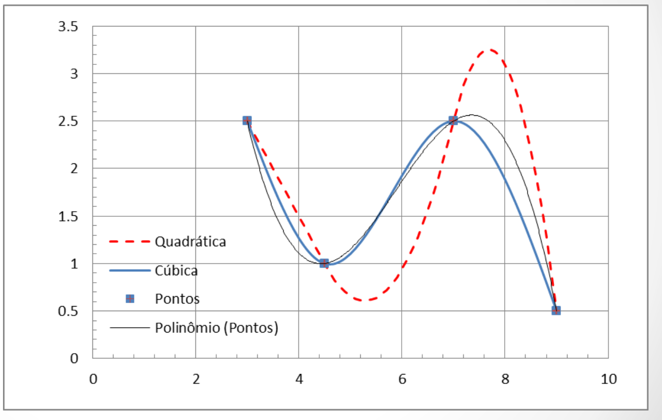
Resolvendo na planilha

	xk	yk	h
0	3	2.5	
1	4.5	1	1.5
2	7	2.5	2.5
3	9	0.5	2

	1	2	3	4	G	B
0	1	0	0	0	-2.665E-16	0
1	1.5	8	2.5	0	1.67908745	9.6
2	0	2.5	9	2	-1.5330798	-9.6
3	0	0	0	1	0	0

Conferindo o resultado

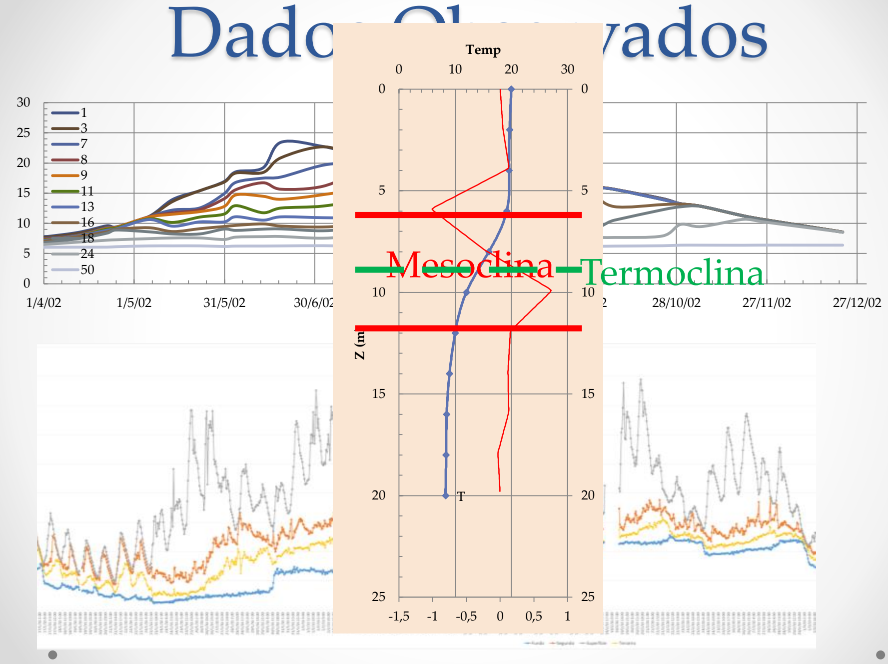
dx	0.1	
3	2.5	2.5
3.1	2.358209	2.35821
3.2	2.217538	2.217538
3.3	2.079106	2.079106
3.4	1.944031	1.944031
3.5	1.813435	1.813435
3.6	1.688435	1.688435
3.7	1.570152	1.570152
3.8	1.459704	1.459704
3.9	1.358211	1.358211
4	1.266793	1.266793
4.1	1.186569	1.186569
4.2	1.118659	1.118659
4.3	1.06418	1.06418
4.4	1.024254	1.024254
4.5	1	1
4.55	0.994049	0.994049
4.6	0.992136	0.992136
4.65	0.994099	0.994099
4.7	0.999777	0.999777
4.8	1.02164	1.02164
4.9	1.056439	1.056439
5	1.10289	1.10289
5.1	1.159707	1.159707
5.2	1.225605	1.225605
5.3	1.299301	1.299301



Exercício

- A temperatura da água em um lago ou no oceano leva a um comportamento denominado ‘estratificação’ no qual as camadas mais ‘frias’ ficam mais pesadas, em função do comportamento da massa específica com a temperatura.
- Isto faz com que as camadas do fundo fiquem isoladas em relação à superfície e nao recebem oxigênio da atmosfera. Esta é hoje a grande barreira para licenciamento ambiental dos reservatórios de baragens para usos múltiplos como geração de energia e abastecimento de água

Dados Observados



O problema

- Considerando o perfil de temperatura fornecido de um lago de barragem que é determine a profundidade da termoclina

	Z	T
0	0	20
1	2	19.7
2	4	19.6
3	6	19.2
4	8	15.6
5	10	12
6	12	10
7	14	9
8	16	8.5
9	18	8.4
10	20	8.3

Rotina VBA

Spline Cubica.txt - Notepad

File Edit Format View Help

```
'Calcula a Spline entre os limites dados para um dado dx
Sub Spline_Sub()

    Dim i As Integer, j As Integer, n As Integer
    Dim xint As Single
    Dim x As Range, y As Range, output As Range, dx As Single
    ReDim Ax(1, 1) As Variant, AAx(1, 1) As Variant
    ReDim B(1) As Single, gx(1) As Single, h(1) As Single

    Set x = Application.InputBox(prompt:="Valor s de X", Type:=8)
    Set y = Application.InputBox(prompt:="Valor s de Y", Type:=8)
    Set output = Application.InputBox(prompt:="Celula inicial das colunas de saída", Type:=8)
    dx = Application.InputBox(prompt:="Passo de cálculo")


    n = x.Rows.Count


    'calcula os coeficientes da equação
    ReDim Ax(1 To n, 1 To n) As Variant
    ReDim AAx(1 To n, 1 To n) As Variant
    ReDim B(1 To n) As Single
    ReDim gx(1 To n) As Single
    ReDim h(1 To n) As Single


    For i = 1 To n
        For j = 1 To n
            Ax(i, j) = 0
        Next j
        B(i) = 0
        gx(i) = 0
    Next i


    h(1) = 0
```

Ln 1, Col 1