

# Teorema de Transporte de Reynolds e Leis Integrais

## **EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO**

# Equação da Quantidade de Movimento na forma integral

2ª Lei de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} \Big|_{sist} = m \vec{a} \Big|_{sist} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{sist} = \frac{dm\vec{v}}{dt} \Big|_{sist}$$

$$\left( \text{pois } \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}, \text{ e } \frac{dm}{dt} = 0 \right)$$

∴ 2ª lei de Newton: “a “soma das forças externas que atuam no sistema = taxa de variação temporal da quantidade de movimento  $\chi$  no sistema” :

$$\sum \vec{F}_{ext} \Big|_{sist} = \frac{d\chi}{dt} \Big|_{sist}$$

Como  $m\vec{v} = \vec{\chi}$ , pode-se usar no Teorema de Transporte de Reynolds:

$$N = \vec{\chi} = m\vec{v} \quad e \quad \eta = \frac{N}{m} = \frac{\vec{\chi}}{m} = \vec{v}$$

que é a **Equação Integral da Quantidade de Movimento**:

$$\left. \frac{dm\vec{v}}{dt} \right|_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v}\rho dV + \int_{SC} \vec{v}\rho\vec{v}\cdot\vec{n}dS$$

Para usar o TTR, o volume de controle deve ser coincidente com o sistema em um dado instante, então as forças que atuam no sistema e as forças que atuam no volume de controle são iguais, neste instante:

$$\vec{F}_{ext} \Big|_{sist} = \vec{F}_{ext} \Big|_{VC}$$

O que gera a Equação Geral da Quantidade de Movimento:

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{ext}}_{sistema} = \underbrace{\sum \vec{F}_d + \sum \vec{F}_c}_{\Sigma \text{ das forças externas à distância } (g, \beta, E) \text{ e de contato (pressão e atrito) atuando sobre o VC}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV}_{\text{taxa de variação da QDM no VC}} + \underbrace{\int_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS}_{\text{fluxo da QDM através da SC}}$$

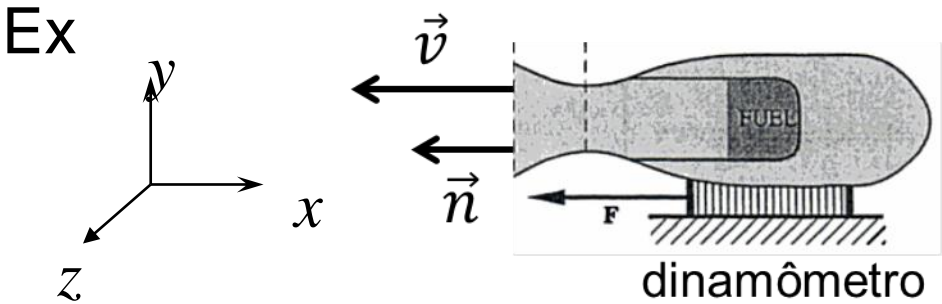
**Equação geral**, restrita a um VC inercial, qdo  $VC \equiv Sistema$

# Observações importantes:

- 1) A velocidade  $\vec{v}$  é referida a um sistema de coord. inercial
- 2) O fluxo da QDM através de elemento de área  $ds$  é um vetor ( $\vec{v}\rho\vec{v}\cdot\vec{n}ds$ ), onde:

2.1)  $\rho\vec{v}\cdot\vec{n}ds$  tem o sinal de  $\vec{v}\cdot\vec{n}$  :  
 >0 nas saídas  
 <0 nas entradas  
 $\equiv 0$  quando  $\vec{v} = 0$  ou  $\vec{v} \perp \vec{n}$

2.2) a direção da QDM é dada por  $\vec{v}$  , que depende só do sistema de coordenadas escolhido



$$\rho\vec{v}\cdot\vec{n}ds > 0$$

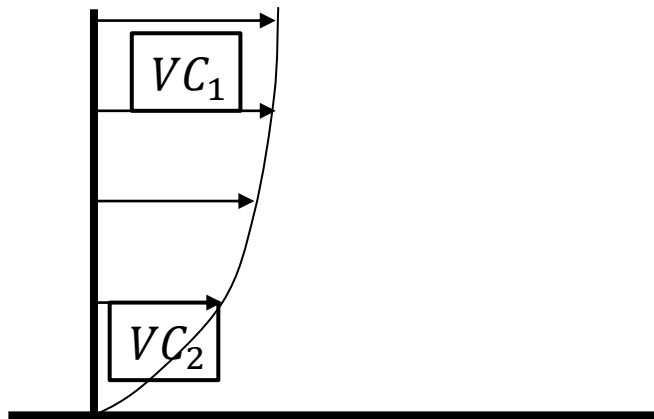
$$\vec{\chi} = (-v)(\rho vS)\vec{i}$$

Cuidado com o termo de fluxo  $\int_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ .

Podem-se obter forças bem diferentes com soluções diferentes e específicas para cada situação.

Observe que a **QDM é completamente diferente** nos volumes de controle tomados na figura abaixo.

**Use o VC para obter as forças de interesse.**



3) Como a QDM é vetorial, pode ser escrita na forma de equações escalares das componentes x, y e z

$$\sum F_{ext_x} = \sum F_{d_x} + \sum F_{c_x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} v_x \rho dV + \int_{SC} v_x \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

$$\sum F_{ext_y} = \sum F_{d_y} + \sum F_{c_y} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} v_y \rho dV + \int_{SC} v_y \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

$$\sum F_{ext_z} = \sum F_{d_z} + \sum F_{c_z} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} v_z \rho dV + \int_{SC} v_z \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

# Casos particulares

**Hipótese 1.** As forças de campo se restringem à força peso:

$$\sum \vec{F}_d = \vec{G} = \int_m \vec{g} dm = \int_V \vec{g} \rho dV \quad (1)$$

e as forças de contato são as viscosas e as de pressão

$$\sum \vec{F}_c = \int_{SC} \vec{\tau} dS - \int_S p \vec{n} dS \quad (2)$$

o sinal é negativo por causa da convenção de  $\vec{n}$  apontar sempre para fora da SC

$SC = \sum S_e + \sum S_s + \Sigma$  , onde  $\Sigma$  é a soma das superfícies laterais do corpo



Com a hipótese de forças de campo e de contato, pode-se reescrever a equação geral da QDM:

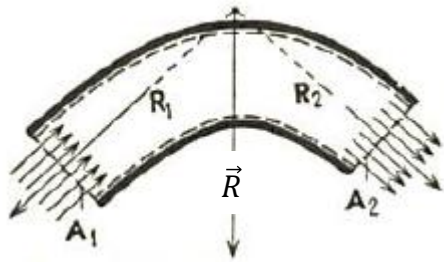
$$\sum \vec{F}_{ext} = \underbrace{\int_{\Sigma S_e} -p_e \vec{n} dS_e + \int_{\Sigma S_s} -p_s \vec{n} dS_s + \int_{\Sigma S_e + \Sigma S_s} \vec{\tau} dS}_{\substack{\text{forças atuando em } \Sigma S_e \text{ e } \Sigma S_s \\ \text{(entradas e saídas de fluidos)}}} + \underbrace{\int_{\Sigma} -p_{\Sigma} \vec{n} dS_{\Sigma} + \int_{\Sigma} \vec{\tau}_{\Sigma} dS_{\Sigma}}_{\substack{\text{atuando em } \Sigma \\ \text{(paredes)}}$$

Pode-se definir ainda:

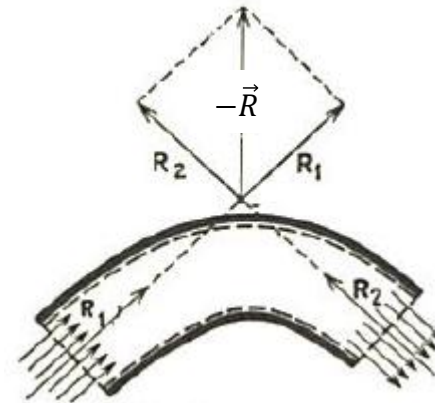
$$\vec{R} = \int_{\Sigma} -p_{\Sigma} \vec{n} dS_{\Sigma} + \int_{\Sigma} \vec{\tau}_{\Sigma} dS_{\Sigma} \quad (3)$$

onde  $\vec{R}$  é a resultante das forças do **duto sobre o fluido**

Observe que, normalmente, o projetista está interessado em descobrir o valor da força do fluido sobre a tubulação, ou seja, em  $-\vec{R}$ :

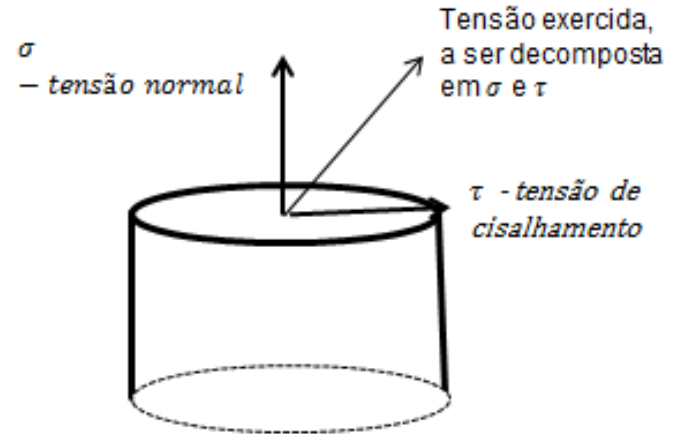
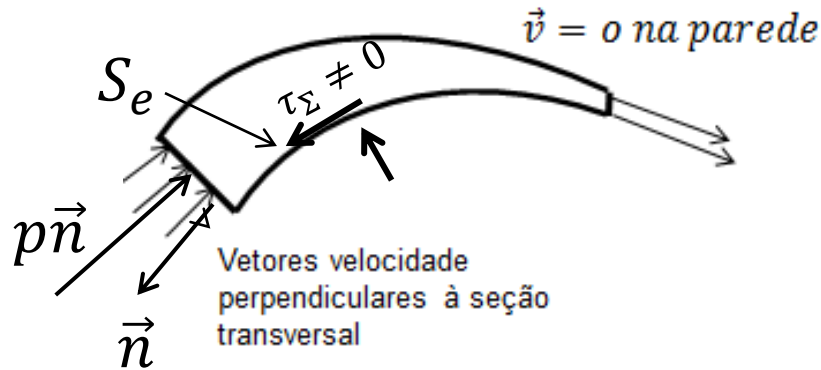


$\vec{R}$ : força do duto sobre o fluido



$-\vec{R}$ : força do fluido sobre o duto

## Hipótese 2: trajetórias retilíneas e paralelas em todas $S_e$ e $S_s$



Trajetoórias retilíneas e paralelas nas entradas e saídas  $\rightarrow$  as tensões nas superfícies  $\Sigma S_e$  e  $\Sigma S_s$  se reduzem apenas às tensões normais devidas às forças de pressão. Isto ocorre quando se considera a distribuição de velocidades uniforme, o que ocorre aproximadamente nos escoamentos turbulentos:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \cong 0 \rightarrow \int_{\Sigma S_e} \tau dS = \int_{\Sigma S_s} \tau dS = 0 \quad (4)$$

Pela hipótese 2 podem-se escrever os termos da equação geral da QDM em termos dos valores médios (equações 5)

$$\int_{\Sigma S_e} -p_e \vec{n} dS_e = \Sigma -p_e \vec{n}_e S_e$$

$$\int_{\Sigma S_s} -p_s \vec{n} dS_s = \Sigma -p_s \vec{n}_s S_s$$

$$\int_{\Sigma S_e} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \Sigma \beta_e \vec{v}_e \dot{m}_e \vec{n}_e$$

$$\int_{\Sigma S_s} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \Sigma \beta_s \vec{v}_s \dot{m}_s \vec{n}_s$$

$$\int_{\Sigma} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\vec{v} = 0 \text{ ou } \vec{v} \perp \vec{n})$$

$$\beta = \frac{1}{S} \int_S \left( \frac{v}{V} \right)^2 dS$$

→ (5)

Substituindo as equações (1) a (5) na Equação Geral da QDM, resulta

$$\begin{aligned} \vec{G} + \vec{R} - \sum p_e \vec{n}_e S_e - \sum p_s \vec{n}_s S_s &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \sum \beta_e \vec{v}_e \dot{m}_e \vec{n}_e + \sum \beta_s \vec{v}_s \dot{m}_s \vec{n}_s \end{aligned}$$

Ou

$$\vec{G} + \vec{R} = \sum (p_e S_e + \beta_e V_e \dot{m}_e) \vec{n}_e + \sum (p_s S_s + \beta_s V_s \dot{m}_s) \vec{n}_s + \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV$$

Alguns definem ainda a Função Impulso:  $\Phi = pS + \beta \dot{m}v$ , com dimensão de força.