# 1 Definições de Ganhos de Potência de Redes de 2 Portas

As definições de ganhos de potência em altas frequências mais utilizadas são relacionadas a seguir.

1. Ganho de potência, $G = P_L/P_{in}$, na qual $P_L$ é a potência dissipada na carga $Z_L$ e $P_{in}$ é apotência entregue à entrada da rede;

2. Ganho de potência disponível, $G_A = P_{avn}/P_{avs}$, na qual $P_{avn}$ é a potência disponível da rede e $P_{avs}$ é a potência disponível da fonte;

3. Ganho transdutivo de potência, $G_T = P_L/P_{avs}$.

## 1.1 Ganho de potência, $G$

O coeficiente de reflexão na carga é $\Gamma_L = (Z_L - Z_0) / (Z_L + Z_0)$ e o coeficiente de reflexão na fonte é $\Gamma_S = (Z_S - Z_0) / (Z_S + Z_0)$, na qual $Z_S$ é a impedância da fonte e $Z_0$ é a impedância de referência. Dada uma rede de 2 portas representada por matriz de espalhamento, temos que $\Gamma_L = a_2/b_2$, $b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$ e $b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$. Assim, $b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}\Gamma_L b_2$ e $b_2 = S_{21}a_1 (1 - S_{22}\Gamma_L)$. Como $b_2 = V_2^-$ e $a_1 = V_1^+$, $V_2^- = S_{21}V_1^+ / (1 - S_{22}\Gamma_L)$. O coeficiente de reflexão na entrada é $\Gamma_{in} = b_1/a_1 = S_{11} + (S_{12}S_{21}\Gamma_L) / (1 - S_{22}\Gamma_L)$ e o coeficiente de reflexão na saída é $\Gamma_{out} = b_2/a_2 = S_{22} + (S_{12}S_{21}\Gamma_S) / (1 - S_{11}\Gamma_S)$.

A tensão na porta 1 da rede é $V_1 = V_S Z_{in}/ (Z_{in} + Z_S)$, na qual $Z_{in}$ é a impedância vista na porta 1 da rede. Temos que $V_1 = a_1 + b_1$ e $b_1 = \Gamma_{in}a_1$ e $V_1 = a_1 + \Gamma_{in}a_1$ e $V_1 = a_1 (1 + \Gamma_{in})$. Portanto, $V_S Z_{in}/ (Z_{in} + Z_S) = a_1 (1 + \Gamma_{in})$. Mas, $Z_{in} = Z_0 (1 + \Gamma_{in}) / (1 - \Gamma_{in})$ e $Z_S = Z_0 (1 + \Gamma_S) / (1 - \Gamma_S)$. Substituindo $Z_{in}$ e $Z_S$ em $a_1 = V_S Z_{in}/ [(Z_{in} + Z_S) (1 + \Gamma_{in})]$ resulta em

$$a_1 = \frac{V_S}{2} \frac{(1 - \Gamma_S)}{(1 - \Gamma_{in}\Gamma_S)}. \tag{1}$$

A potência média entregue à porta 1 da rede é $P_{in} = (1/2Z_0) \left|V_1^+\right|^2 \left(1 - |\Gamma_{in}|^2\right)$, na qual $(1/2Z_0) \left|V_1^+\right|^2$ é a potência referente à onda incidente e $(1/2Z_0) |a_1|^2 |\Gamma_{in}|^2$ à onda refletida. Substituindo (1) em $P_{in}$ resulta em

$$P_{in} = \frac{|V_S|^2}{8Z_0} \frac{|1 - \Gamma_S|^2}{|1 - \Gamma_{in}\Gamma_S|^2} \left(1 - |\Gamma_{in}|^2\right). \tag{2}$$

A potência média entregue à carga é $P_L = (1/2Z_0) \left|V_2^-\right|^2 \left(1 - |\Gamma_L|^2\right)$. Temos que $V_2^- (1 - S_{22}\Gamma_L) = S_{21}V_1^+$ e $V_2^- = S_{21}V_1^+ / (1 - S_{22}\Gamma_L)$. Substituindo (1) em $V_2^-$ resulta em

$$V_2^- = \frac{S_{21}}{1 - S_{22}\Gamma_L} \frac{V_S}{2} \frac{1 - \Gamma_S}{1 - \Gamma_S\Gamma_L}. \tag{3}$$

Substituindo (3) em (2) resulta em

$$P_L = \frac{|V_S|^2}{8Z_0} \frac{|S_{21}|^2 |1-\Gamma_S|^2 \left(1-|\Gamma_L|^2\right)}{|1-S_{22}\Gamma_L|^2 |1-\Gamma_{in}\Gamma_S|^2}. \tag{4}$$

Portanto, usando (2) e (4) resulta em

$$G = \frac{P_L}{P_{in}} = \frac{|S_{21}|^2 \left(1-|\Gamma_L|^2\right)}{\left(1-|\Gamma_{in}|^2\right)|1-S_{22}\Gamma_L|^2}. \tag{5}$$

## 1.2 Ganho de potência disponível, $G_A$

A potência disponível da fonte é a máxima potência que pode ser entregue a uma carga sob condições de casamento conjugado, $\Gamma_{in} = \Gamma_S^*$. Assim,

$$P_{avs} = P_{in}|_{\Gamma_{in}=\Gamma_S^*} = \frac{|V_S|^2}{8Z_0} \frac{|1-\Gamma_S|^2}{|1-\Gamma_S\Gamma_S^*|^2}\left(1-|\Gamma_S^*|^2\right).$$

Mas, $\Gamma_S\Gamma_S^* = |\Gamma_S|^2 = |\Gamma_S^*|^2$ e $|1-\Gamma_S\Gamma_S^*|^2 = \left|1-|\Gamma_S|^2\right|^2 = \left(1-|\Gamma_S|^2\right)^2$. Assim,

$$P_{avs} = \frac{|V_S|^2}{8Z_0} \frac{|1-\Gamma_S|^2}{\left(1-|\Gamma_S|^2\right)^2}. \tag{6}$$

A potência disponível da rede é a máxima potência que pode ser entregue à carga sob condições de casamento conjugado, $\Gamma_{out} = \Gamma_L^*$. Assim,

$$P_{avn} = P_L|_{\Gamma_{out}=\Gamma_L^*}$$

e

$$P_L|_{\Gamma_{out}=\Gamma_L^*} = \frac{|V_S|^2}{8Z_0} \frac{|S_{21}|^2 |1-\Gamma_{out}^*|^2 \left(1-|\Gamma_L|^2\right)}{|1-S_{22}\Gamma_{out}^*|^2 |1-\Gamma_{in}\Gamma_S|^2}. \tag{7}$$

Sabendo que $|\Gamma_{out}^*| = |\Gamma_{out}|$ e desenvolvendo $\Gamma_{out} = S_{22}+(S_{12}S_{21}\Gamma_S)/(1-S_{11}\Gamma_S)$ resulta em $S_{12}S_{21}\Gamma_S = (1-S_{11}\Gamma_S)(\Gamma_{out}-S_{22})$. Substituindo na expressão de $\Gamma_{in} = S_{11} + (S_{12}S_{21}\Gamma_L)/(1-S_{22}\Gamma_L)$ resulta em

$$\Gamma_S\Gamma_{in} = S_{11}\Gamma_S + \frac{(1-S_{11}\Gamma_S)(\Gamma_{out}-S_{22})\Gamma_L}{1-S_{22}\Gamma_L}.$$

Para $\Gamma_L = \Gamma_{out}^*$,

$$\Gamma_S\Gamma_{in} = S_{11}\Gamma_S + \frac{(1-S_{11}\Gamma_S)(\Gamma_{out}-S_{22})\Gamma_{out}^*}{1-S_{22}\Gamma_{out}^*}.$$

Desenvolvendo,

$$1-\Gamma_S\Gamma_{in} = \frac{(1-S_{11}\Gamma_S)\left(1-|\Gamma_{out}|^2\right)}{1-S_{22}\Gamma_{out}^*}$$

e

$$\left|1-\Gamma_S\Gamma_{in}\right|^2 = \frac{\left|1-S_{11}\Gamma_S\right|^2\left(1-\left|\Gamma_{out}\right|^2\right)^2}{\left|1-S_{22}\Gamma_{out}^*\right|^2}. \tag{8}$$

Substituindo (8) em (7) resulta em

$$P_{avn} = \frac{\left|V_S\right|^2}{8Z_0}\left|S_{21}\right|^2\frac{\left|1-\Gamma_S\right|^2}{\left|1-S_{11}\Gamma_S\right|^2\left(1-\left|\Gamma_{out}\right|^2\right)} \tag{9}$$

e o ganho disponível é

$$G_A = \frac{P_{avn}}{P_{avs}} = \frac{\left|S_{21}\right|^2\left(1-\left|\Gamma_S\right|^2\right)}{\left|1-S_{11}\Gamma_S\right|^2\left(1-\left|\Gamma_{out}\right|^2\right)}. \tag{10}$$

### 1.3 Ganho transdutivo de potência, $G_T$

De (4) e (6),

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \frac{\left|S_{21}\right|^2\left(1-\left|\Gamma_S\right|^2\right)\left|S_{21}\right|^2\left(1-\left|\Gamma_L\right|^2\right)}{\left|1-\Gamma_S\Gamma_{in}\right|^2\left|1-S_{22}\Gamma_L\right|^2}. \tag{11}$$