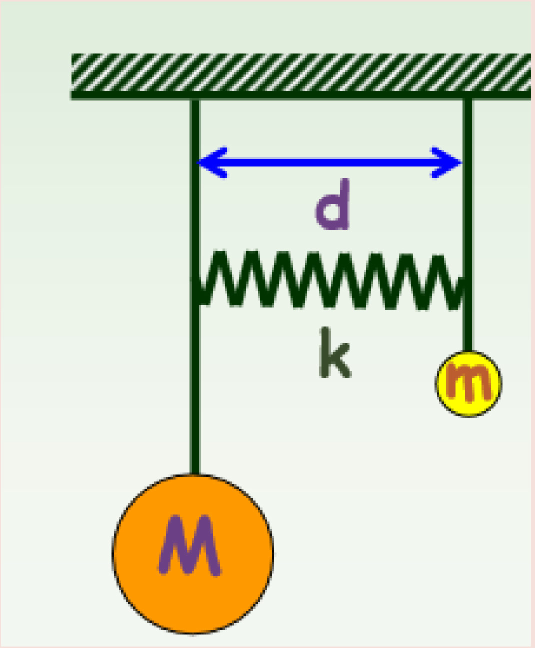
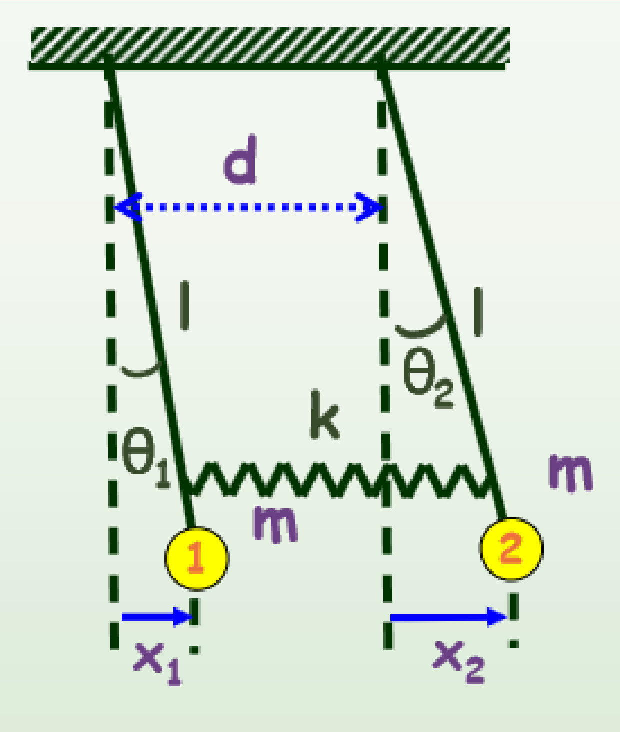
Oscilações acopladas



Se M>>m ➔ oscilações forçadas

Oscilações de M, transmitidas através da Mola, atuam sobre o pêndulo mais leve (m) como uma força externa, forçando-o a oscilar com a frequência do pêndulo pesado.

Pêndulos Idênticos



$$\omega_0^2 = \boxed{\frac{g}{l}}$$

$$-mg\,\text{sen}\,\theta \simeq -mg\theta \simeq -mg\frac{x}{l} = -mx\omega_0^2$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k\left(x_2 - x_1\right) - m\omega_0^2 x_1 \\ m\ddot{x}_2 = -k\left(x_2 - x_1\right) - m\omega_0^2 x_2 \end{cases}$$

Definindo: $K = \dfrac{k}{m}$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = K\left(x_2 - x_1\right) \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -K\left(x_2 - x_1\right) \end{cases}$$

Equações diferenciais
Lineares de 2ª ordem
acopladas

Para desacoplá-las, soma-se membro a membro as equações acima e também subtrae-se membro a membro:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2\left(x_1 + x_2\right) = 0 & (1) \\ \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + \omega_0^2\left(x_1 - x_2\right) = 2K\left(x_2 - x_1\right) & (2) \end{cases}$$

Fazendo:

$$(3) \quad \boxed{\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right) \\ q_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 - x_2\right) \end{aligned}} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= q_1 + q_2 \\ x_2 &= q_1 - q_2 \end{aligned}}$$

As equaçoes (1) e (2) tornam-se, respectivamente:

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = 0$$

$$2\ddot{q}_2 + 2\omega_0^2 q_2 = -4Kq_2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = 0}$$

$$\boxed{\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2K}$$

Osciladores Harmônicos Simples:

$$q_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

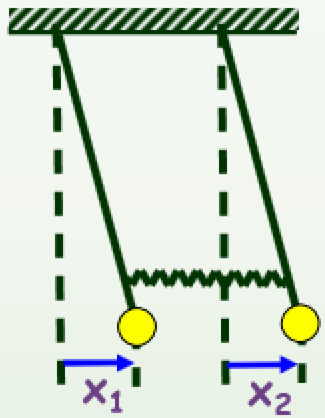
$$q_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (4)$$

Os valores de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ x_2(t) &= A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1)-A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{aligned}} \qquad (5)$$

A_1, A_2, φ_1, φ_2 a serem determinadas pelas condições iniciais

Modos Normais

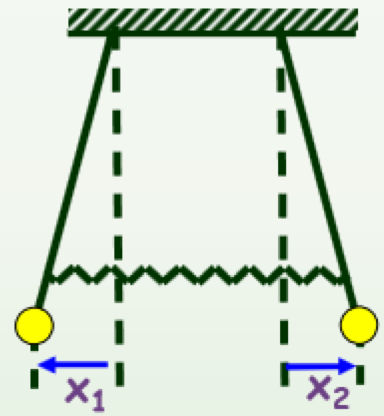


$x_1 = x_2$

mola relaxada

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Modo simétrico



$x_1 = -x_2$

mola distendida

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}}$$

Modo antissimétrico:

$$A_2 = 0$$

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) = x_2(t)$$

$$A_1 = 0$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = -x_2(t)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2K}$$

Condições iniciais dos modos normais

Modo simétrico: $$\begin{cases} x_1(0) = x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) \end{cases}$$

Modo antissimétrico: $$\begin{cases} x_1(0) = -x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0) \end{cases}$$

Caso Particular

Pêndulos partem em repouso mas somente um deles é deslocado da posição de equilíbrio

$$x_1(0) = a \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

$$x_2(0) = 0$$

Da equação 3:

$$q_1(0) = \frac{a}{2} \qquad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$$

$$q_2(0) = \frac{a}{2}$$

Da equação 4 e das derivadas e usando relações anteriores:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \qquad A_1 = A_2 = \frac{a}{2}$$

Substituindo estes valores na Eq. (5):

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{a}{2}\left[\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_2 t)\right] \\ x_2(t) = \dfrac{a}{2}\left[\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_2 t)\right] \end{cases}$$

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2K}}$$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{l}}$$

Superposição de dois MHS de mesma amplitude e frequências distintas

Fazendo as mudanças de variáveis:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_2)$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_0$$

$$\boxed{\omega_2 = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}} \qquad \boxed{\omega_0 = \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}}$$

Quando: $\Delta\omega << \bar{\omega}$

$$x_1(t) = a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\bar{\omega}t\right)$$

$$x_2(t) = a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\mathrm{sen}\left(\bar{\omega}t\right)$$

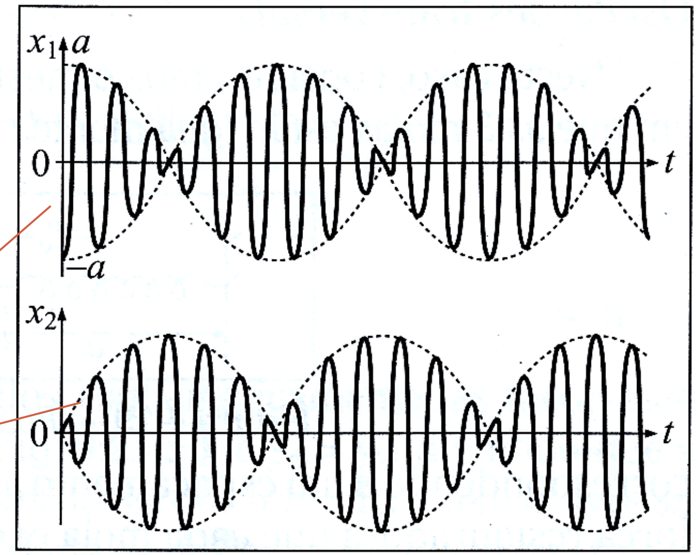
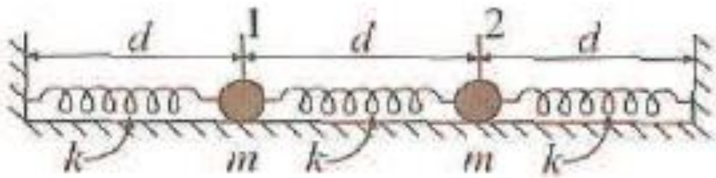


Figura 4.15 — *Batimentos acoplados*

Batimentos em quadratura

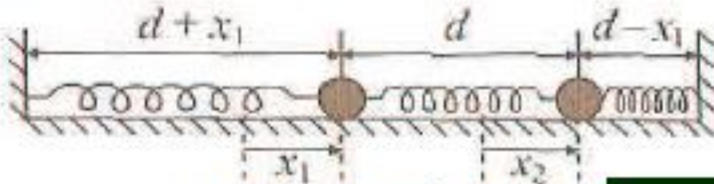
Outro exemplo de oscilador acoplado



Molas relaxadas

Oscilações longitudinais

Modos normais



Modo simétrico

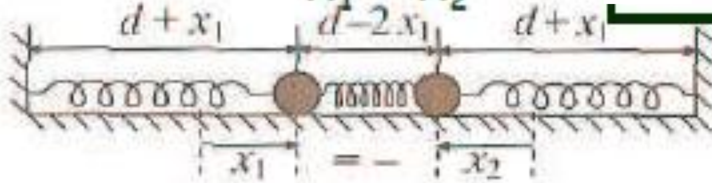
$x_1 = x_2$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Modo assimétrico

$x_1 = -x_2$

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{3\frac{k}{m}}}$$



Modo assimétrico

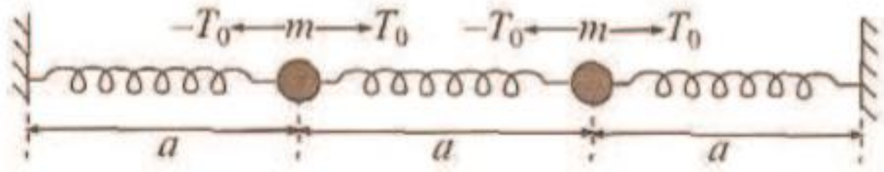
$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - 2kx_1 = -3kx_1$$

$$\ddot{x}_1 + 3\frac{k}{m}x_1 = 0$$

$$\boxed{\ddot{x}_1 + \omega_2^2 x_1 = 0}$$

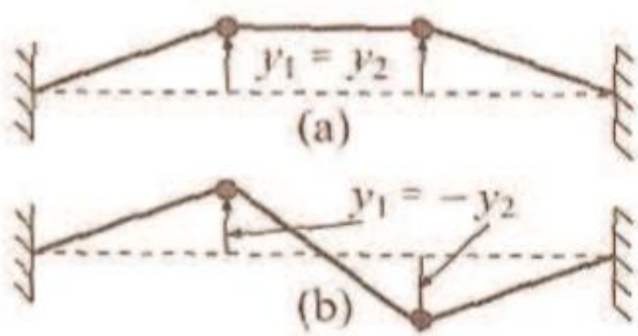
Onde: $$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3k}{m}}$$

Oscilações transversais – 3 molas igualmente esticadas



T_0 magnitude da força restauradora => $T_0 = k(a-d)$

Modos normais



Modo simétrico $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{T_0}{ma}}}$

Modo assimétrico $\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{3T_0}{ma}}}$

$$F_1 = -T_0 \operatorname{sen}\theta_1 = -T_0 \frac{y_1}{a}$$

$$F_2 = -T_0 \operatorname{sen}\theta_2 = -T_0 \frac{y_2}{a}$$

$$F_{12} = -T_0 \operatorname{sen}\theta = -T_0 \operatorname{tg}\theta = -T_0 \frac{(y_1 - y_2)}{a}$$

As equações de movimento são:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = F_1 + F_{12} = -\dfrac{T_0}{a}\left[y_1 + (y_1 - y_2)\right] \\ m\ddot{y}_2 = F_2 - F_{12} = -\dfrac{T_0}{a}\left[y_2 + (y_1 - y_2)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 = \omega_0^2 \left(y_1 - y_2 \right) \\ \ddot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 = \omega_0^2 \left(y_2 + y_1 \right) \end{cases}$$

As equações acima são da forma das equações (1) e (2), com:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{T_0}{ma} = K}$$

No modo antissimétrico, y_1=-y_2 e a frequência é:

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3T_0}{ma} = 3\omega_0^2}$$

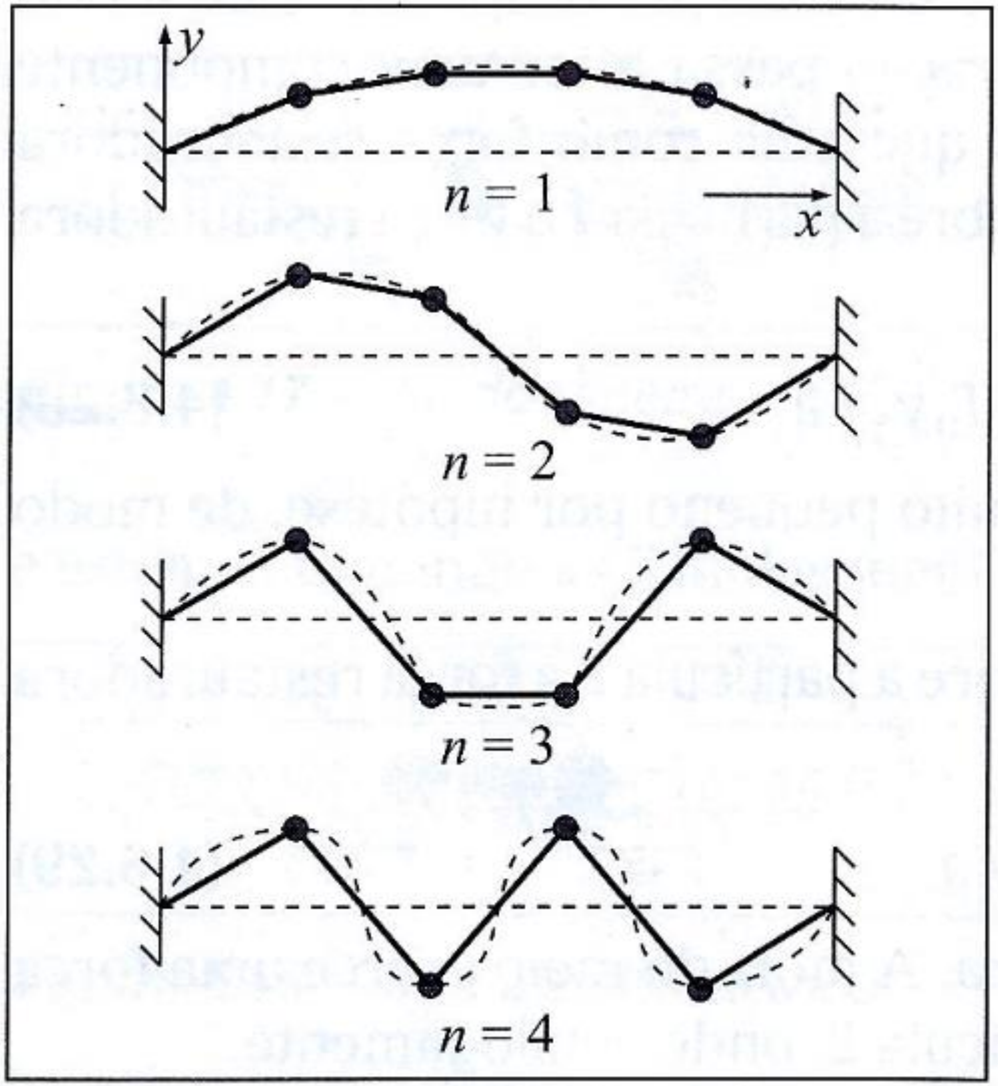


***Figura 4.22** — Modos transversais de 4 particulas*