Interferência de ondas

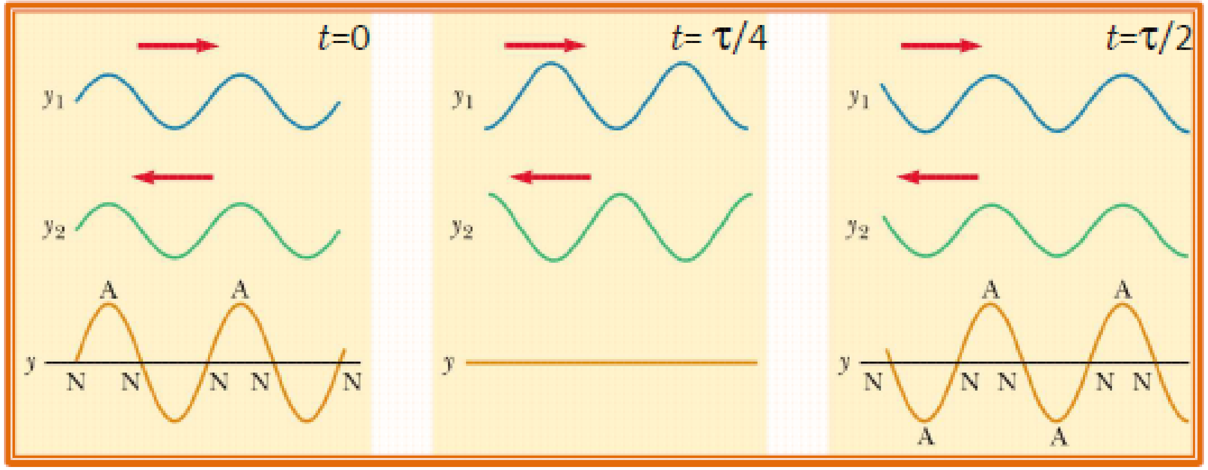
2) Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas, em sentidos opostos, que, além de terem a mesma frequência, também têm a mesma amplitude e constante de fase nula

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t) \end{cases}$$

$$\boxed{y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2\,A\cos(kx)\cos(\omega t)}$$ ⟹ ***Onda Estacionária***

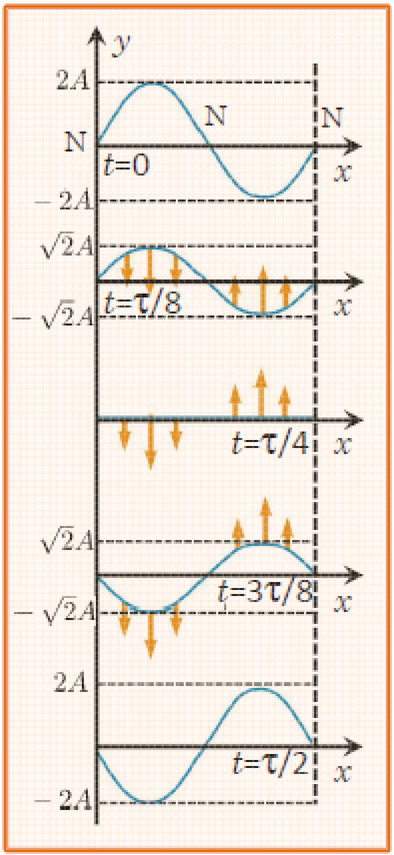
<u>Não há propagação</u>: a forma da onda permanece sempre semelhante, com o deslocamento mudando apenas de amplitude e, eventualmente, de sinal

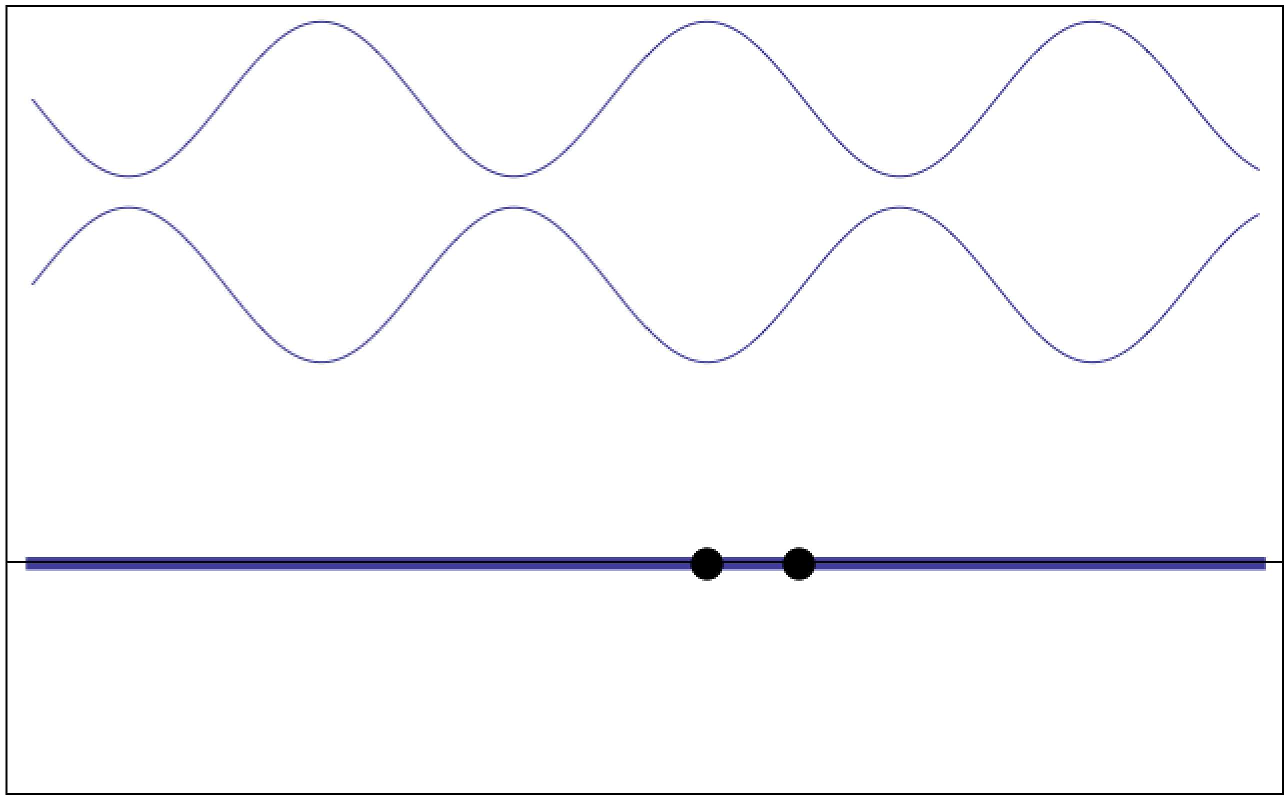


Lucy V. C. Assali

Interferência de ondas

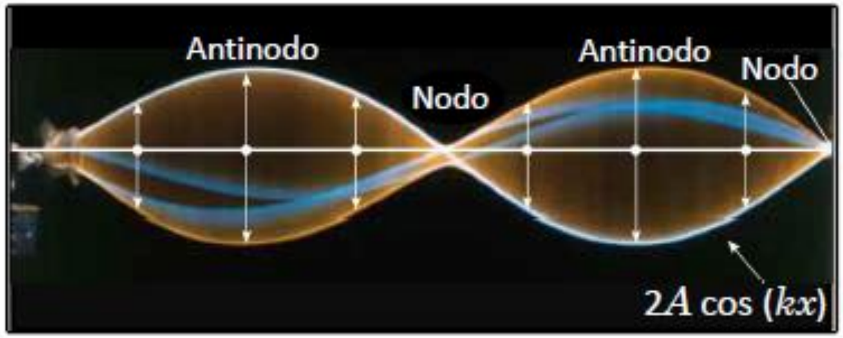
2) Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)





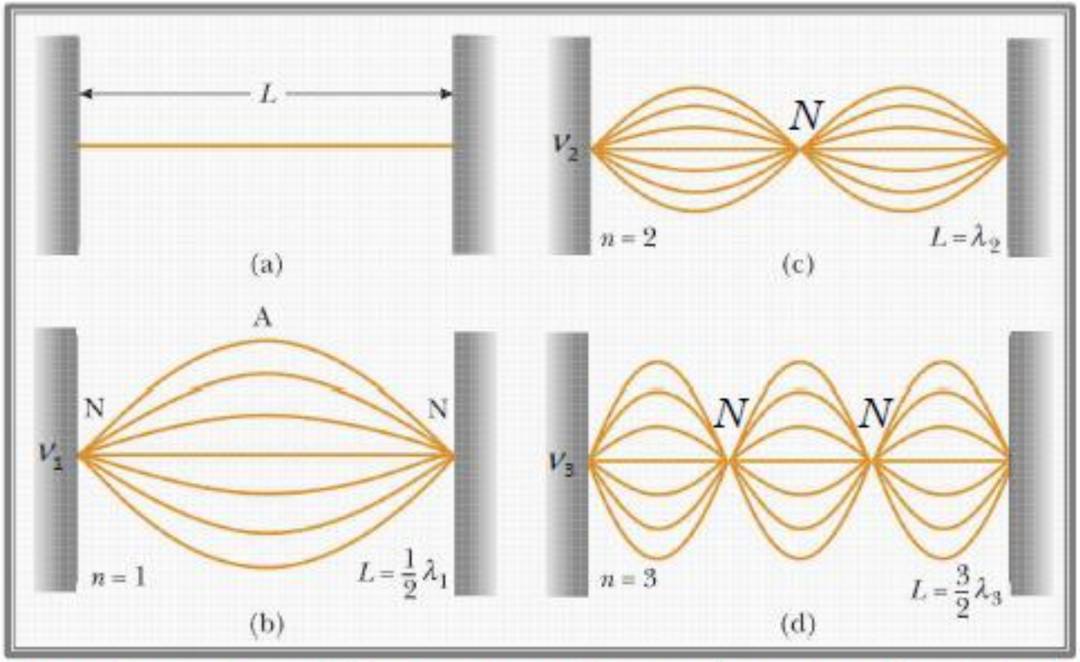
Interferência de ondas

2) Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)



Modos Normais de Vibração

Os modos de vibração mais baixos estão ilustrados na figura abaixo:



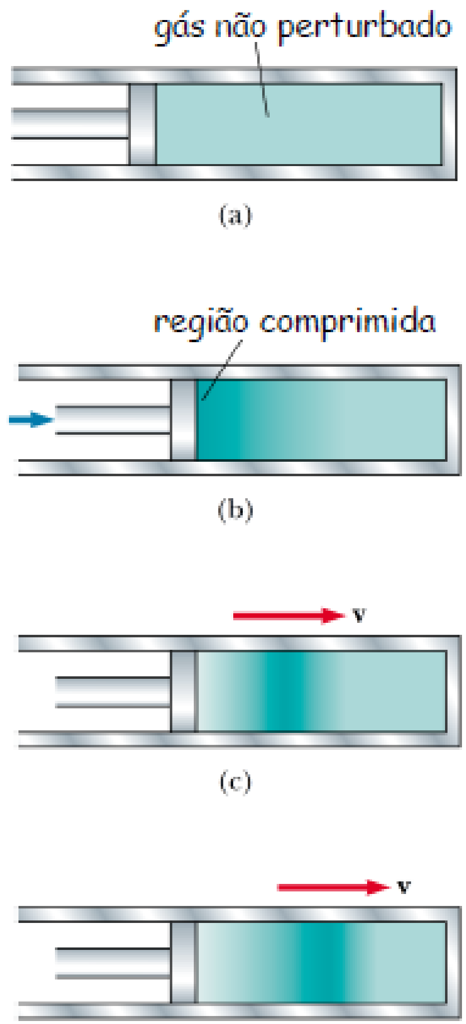
Modo de ordem n: contém (n-1) nodos e n/2 comprimentos de onda

Frequência do modo n:

$$\nu_n = n\nu_1 \ \text{ onde } \ \nu_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$\rightarrow$ n 'ésimo harmônico da frequência ν_1(frequência fundamental)

Ondas Longitudinais



Movimento de um pulso longitudinal através de um gás compressível. A região escura (comprimida) é produzida pelo movimento do pistão.

Ondas Sonoras

(1) Relação densidade - pressão

Para uma dada mudança de densidade, qual é a mudança de pressão correspondente?

$$\left.\begin{array}{l} m = \text{massa do fluido} \\ V = \text{volume do fluido} \end{array}\right\} \longrightarrow \rho = \frac{m}{V} \longrightarrow \Delta\rho = -\frac{m}{V^2}\Delta V$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta\rho}{\rho}$$

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \rho \underbrace{\left(\frac{\Delta P}{\Delta \rho}\right)}_{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$$

B: módulo de elasticidade volumétrico

Ondas Sonoras

(1) Relação densidade - pressão

Ondas Sonoras: pequenas perturbações

$\rho_0 \Longrightarrow$ valor não perturbado (equilíbrio) da densidade

$\rho \Longrightarrow$ valor da densidade na presença da onda

$p_0 \Longrightarrow$ valor não perturbado (equilíbrio) da pressão

$P \Longrightarrow$ valor da pressão na presença da onda

$\delta = \rho - \rho_0 \longrightarrow$ variação da densidade associada à onda de deslocamento

$p = P - p_0 \longrightarrow$ variação da pressão associada à onda de deslocamento

$|p| \ll p_0$

$|\delta| \ll \rho_0$

$$\boxed{\frac{p}{\delta} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0}$$

derivada calculada em torno da posição de equilíbrio

Ondas Sonoras

(1) Relação densidade - pressão

Relação entre $P, V\,(\rho)$ e T de um fluido em equilíbrio $\Rightarrow$ equação de estado que, para um gás ideal é: $PV = nRT$

Processo isotérmico (temperatura constante): $P = a\rho$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = a = \frac{P}{\rho} \Longrightarrow \boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{T,0} = \frac{p_0}{\rho_0}}$$

Processo adiabático (não há trocas de calor): $P = b\rho^\gamma, \text{ com } \gamma = C_p/C_V > 1$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = b\gamma\rho^{(\gamma-1)} = \gamma\frac{P}{\rho} \Longrightarrow \boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S,0} = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}}$$

Ondas Sonoras

(1) Relação densidade - pressão

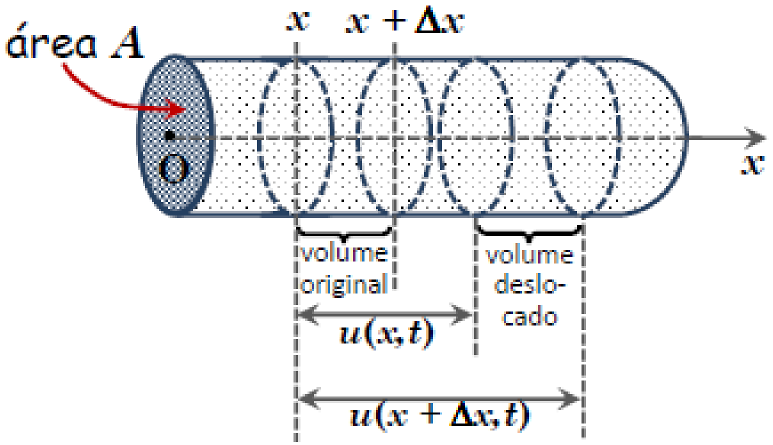
Assim, sabendo qual é a relação entre a densidade e a pressão, que depende do tipo de processo termodinâmico envolvido, se isotérmico (T) ou adiabático (S), podemos obter o módulo de elasticidade volumétrico:

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \underset{\displaystyle \rho_0}{\underset{\downarrow}{\rho}} \underbrace{\left(\frac{\Delta P}{\Delta \rho}\right)}_{\displaystyle \frac{\partial P}{\partial \rho}}$$

$$\boxed{B_T = p_0 \quad \text{e} \quad B_S = \gamma p_0}$$

Ondas Sonoras

(2) Relação deslocamento - densidade



$u(x,t) \Rightarrow$ deslocamento sofrido pelas partículas do fluido na seção transversal (área A) de coordenada x no instante t

O volume original do fluido compreendido entre as seções em x e $x + \Delta x$ é

$$V = A\left[(x + \Delta x) - x\right] = \underbrace{A\,\Delta x}$$

O volume deslocado é

$$\Delta V = A\left[u\,(x + \Delta x) - u\,(x,t)\right] = A\,\Delta x \left\{\frac{u\,(x + \Delta x) - u\,(x,t)}{\Delta x}\right\} \underset{\Delta x \ll 1}{=} A\,\Delta x\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Ondas Sonoras

(2) Relação deslocamento - densidade

A variação percentual de volume fica: $$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Usando a relação $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta \rho}{\rho}$, obtida anteriormente, temos:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = \frac{\delta}{\rho} \approx \frac{\delta}{\rho_0}$$

E, finalmente, encontramos a relação entre deslocamento e a variação da densidade:

$$\boxed{\delta = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}$$

o sinal negativo mostra que se o deslocamento cresce com x ($\partial u/\partial x > 0$) temos uma rarefação no fluido ($\delta < 0$)

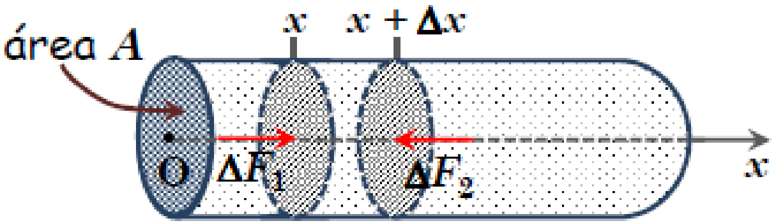
Ondas Sonoras

(3) Relação pressão - deslocamento

No elemento de volume compreendido entre x e $x + \Delta x$ a massa do fluido é

$$\Delta m = \rho \, \Delta V = \rho_0 \, A \, \Delta x$$

A força resultante sobre esse elemento de massa pode ser obtida através da pressão $P(x,t)$ sobre a face esquerda e a face direita desse elemeto:



$$\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2 = P(x,t)\, A - P(x + \Delta x, t)\, A$$

$$= -A\, \Delta x \left\{ \frac{P(x+\Delta x, t) - P(x,t)}{\Delta x} \right\} = -\Delta V \, \frac{\partial p}{\partial x}(x,t)$$

Ondas Sonoras

(3) Relação pressão - deslocamento

Pela 2ª Lei de Newton temos:

$$\Delta m \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho_0 \, A \, \Delta x \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A \, \Delta x \, \frac{\partial p}{\partial x}$$

Levando à equação de movimento do fluido, que dá a relação entre o deslocamento e a variação da pressão:

$$\boxed{\rho_0 \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \, \frac{\partial p}{\partial x}}$$

Mecanismo de Propagação da Onda Sonora

Deslocamento de fluido muda a densidade

(1)

$$\delta = -\rho_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

Mudança da densidade gera mudança de pressão

(2)

$$p = \delta \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0$$

Variação de pressão produz deslocamento

(3)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Ondas Sonoras

Substituindo (1) $\boxed{\delta = -\rho_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}$ em (2) $\boxed{p = \delta \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0}$

$$p = -\rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

Derivando esta expressão em relação à x

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Comparando com (3) $\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$ temos:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$

Ondas Sonoras

Equação de onda para o deslocamento

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0}$$

com a velocidade de propagação da onda

$$\boxed{v = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0}}$$

que é a velocidade do som no fluido

Obs.: Também podemos escrever

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\text{propriedade elástica}}{\text{propriedade inercial}}}}_{\substack{\text{forma geral da velocidade de} \\ \text{todas as ondas mecânicas}}} \Longleftrightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ para a corda}$$

Ondas Sonoras

Utilizando as relações (1), (2) e (3) e a equação de onda para o deslocamento, encontramos que a variação da densidade (δ) e a variação da pressão (p) obedecem à mesma equação de onda, indicando que elas se propagam com a mesma velocidade, que é a velocidade do som.

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0}$$

Velocidade do Som em Gases

Como $n=M/m$ é o número de moles de uma massa M de gás de massa molecular m , então a equação de estado do fluido, para um gás ideal é:

$$PV = nRT = \frac{M}{m}RT \Longrightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{m}$$

levando à

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{m}}$$

a velocidade do som num gás é independente da pressão, mas cresce com a raiz quadrada da temperatura absoluta

Se T=20ºC (=293K) a velocidade do som no ar é de

$$v = 332\sqrt{\frac{293}{273}} \approx 344 \text{ m/s}$$

Velocidade do Som na Água

Quando submetido a uma pressão de 20 atm, o volume de 1 ℓ de água, à temperatura ambiente, decresce de $\approx$ 0,9 cm^3, o que corresponde a - $\Delta V/V$ = 0,09% = 9×10^{-4} para $\Delta P = 2 \times 10^6$ N/m^2, de modo que

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = 2,2 \times 10^9 \ \mathrm{N/m^2}$$

A densidade da água é $\rho_0 = 10^3$ kg/m^3 e temos que

$$B = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} = 1483 \ \mathrm{m/s}$$

Ondas Sonoras Harmônicas

Solução da equação de onda para o deslocamento:

$$\boxed{u(x,t) = \mathbb{U}\cos(kx - \omega t + \delta)}$$

onde $\lambda = v\tau = \dfrac{v}{\nu}$

$$\nu \begin{cases} 20\text{Hz} \Longrightarrow 17\text{ m} \\ 20\text{kHz} \Longrightarrow 1,7\text{ cm} \end{cases}$$

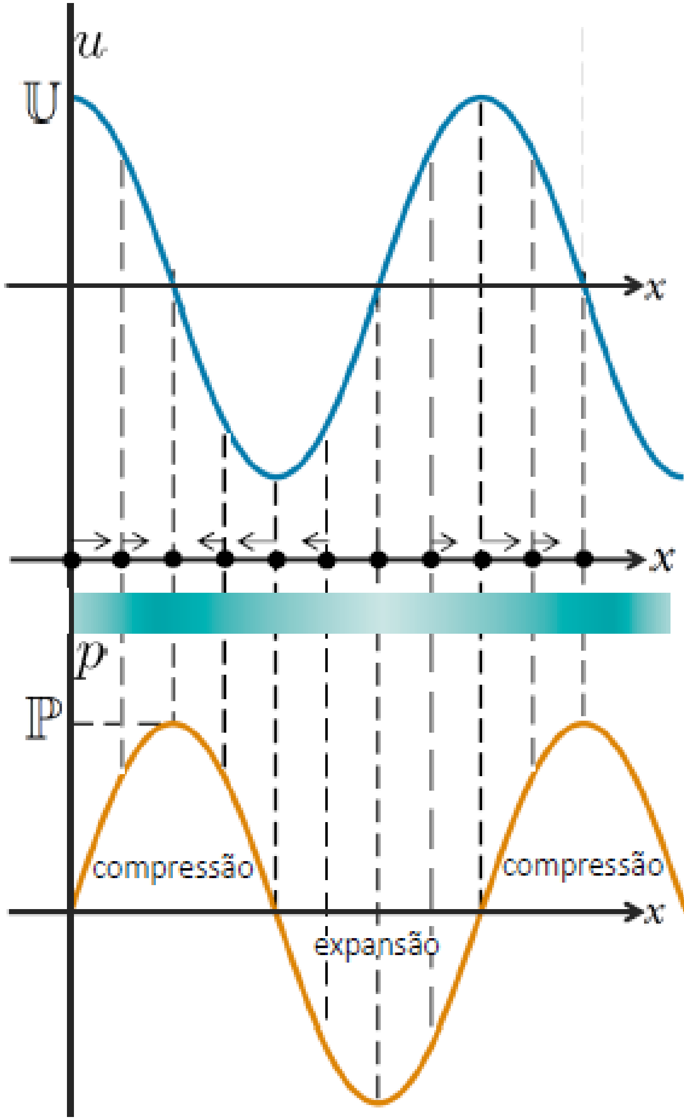
A onda de pressão correspondente é

$$p(x,t) = -\rho_0\, v^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial\, x} = v^2\, \delta(x,t)$$

$$\boxed{p(x,t) = \mathbb{P}\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)}$$ com $$\mathbb{P} = \rho_0\, v^2\, k\, \mathbb{U}$$

em quadratura (defasada de 90°) em relação à $u(x,t)$

Ondas Sonoras Harmônicas



As ondas de deslocamento u e as ondas de pressão p estão em quadratura, ou seja, defasadas de 90°

Os deslocamentos longitudinais de uma série de partículas estão mostrados, evidenciando as expansões e compressões locais do gás.

Intensidade das Ondas Sonoras Harmônicas

Intensidade: energia média transmitida através da seção por unidade de tempo e área

A força exercida sobre uma camada fluida, na posição x, devido à passagem da onda é:

$$F = p(x,t)\,A = \mathbb{P}\,A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

A potência instantânea é

$$F\,\frac{\partial u}{\partial t} = \omega\,A\,\mathbb{P}\,\mathbb{U}\,\mathrm{sen}^2(kx - \omega t + \delta)$$

Com isso, a intensidade da onda fica:

$$\boxed{I = \frac{1}{A}\,\overline{\left(F\,\frac{\partial u}{\partial t}\right)} = \frac{1}{2}\,\omega\,\mathbb{P}\,\mathbb{U} = \frac{1}{2}\,\rho_0\,v\,\omega^2\,\mathbb{U}^2}$$

Ou, em termos da pressão:

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\,\frac{\mathbb{P}^2}{\rho_0 v}}$$ $\Rightarrow$ mais conveniente: detectores de pressão

Nível de Intensidade Sonora: Decibel

Devido ao grande alcance de intensidades audíveis, usa-se, na prática, uma escala logarítmica, onde o nível de intensidade do som (β) é definido por

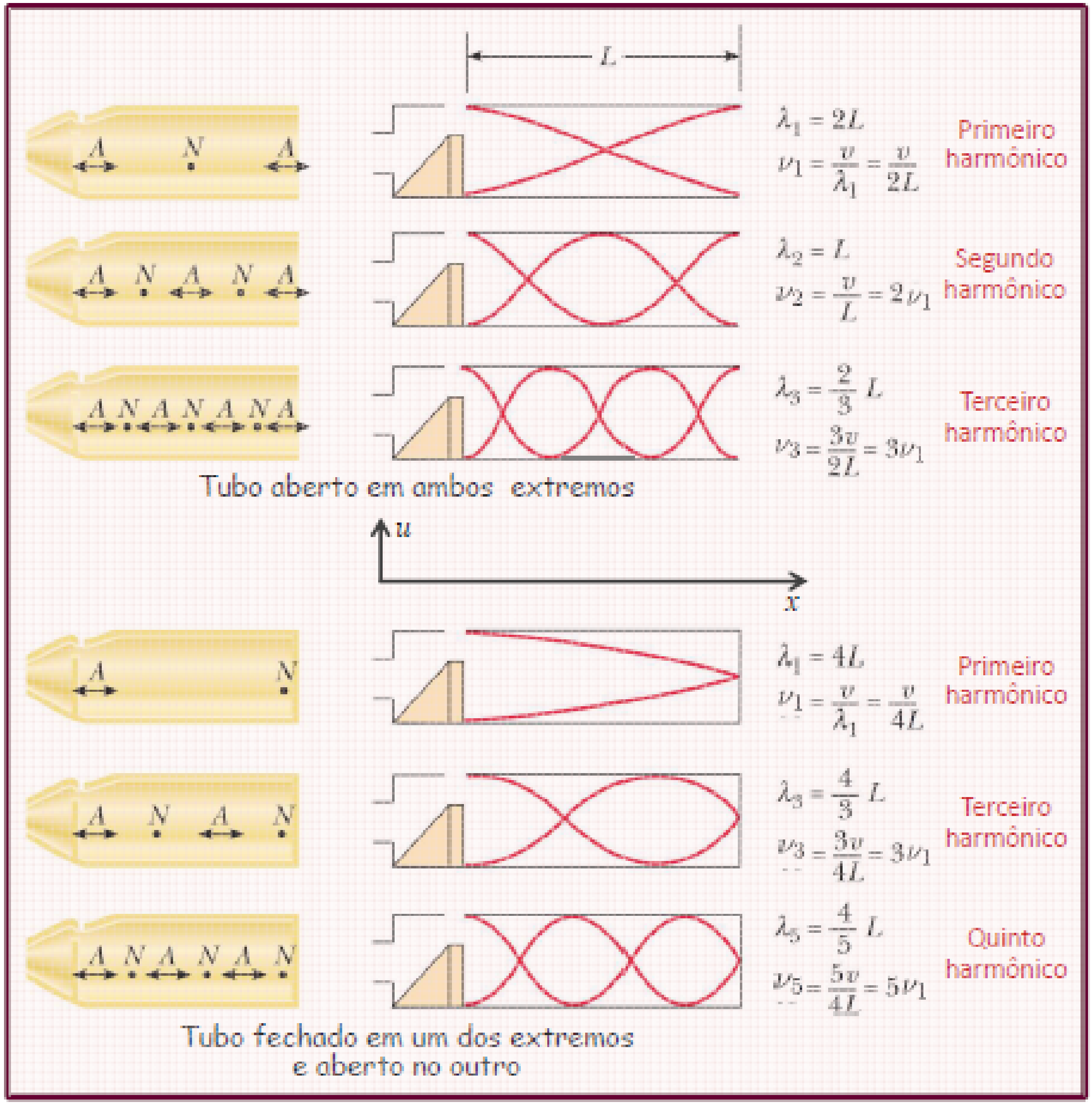
$$\boxed{\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad \text{db (decibéis)}}$$

Intensidade de referência, tomada como a do limiar de audibilidade: $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$

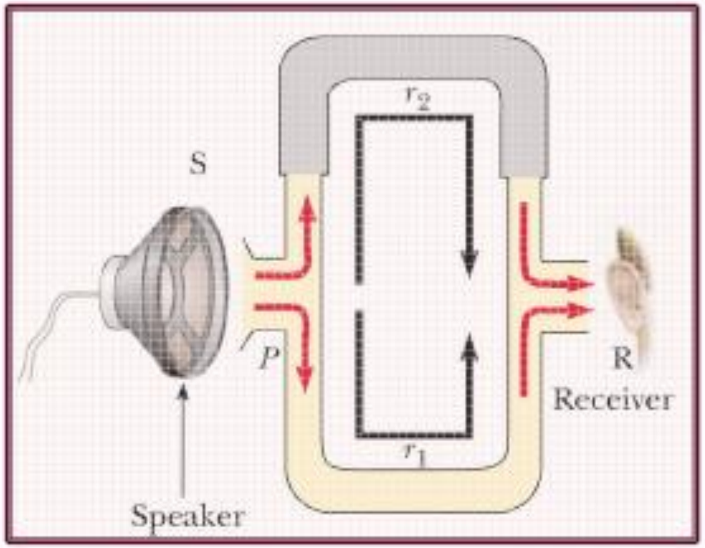
Fonte do som	β (db)	Fonte do som	β (db)
Limiar de audibilidade	0	Conversa comum	60
Farfalhar de folhas	10	Aspirador de pó	70
Murmúrio	20	Rua barulhenta	90
Apito	30	Sirene/Concerto de Rock	120
Som de um mosquito	40	Tiro	130
Música suave	40	Avião próximo	150

$$\boxed{\frac{I_{\text{máx}}}{I_0} = 10^{12} \Longrightarrow \beta = 120 \text{ db}}$$ limiar de sensação dolorosa

Fontes Sonoras: Colunas de Ar



Interferência de Ondas



$$u(r_1,t) = U_1 \cos(kr_1 - \omega t)$$
$$u(r_2,t) = U_2 \cos(kr_2 - \omega t)$$

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta r}{\lambda} \Longrightarrow \Delta r = \frac{\varphi}{2\pi}\lambda$$

Usando a noção de diferença de caminho percorrido pelas ondas, podemos expressar as condições para interferência construtiva e interferência destrutiva Se a diferença de caminho é um múltiplo de $\lambda/2$, então a fase é $\varphi = 2n\pi$ (n=0,1,2,...) e a interferência é <u>construtiva</u>. Se a diferença de caminho for um múltiplo ímpar de $\lambda/2$, então $\varphi = (2n+1)\pi$ (n=0,1,2,...) e a interferência é <u>destrutiva</u>.

Interferência Construtiva $\boxed{\varphi = 2n\pi \Longleftrightarrow \Delta r = (2n)\,\frac{\lambda}{2}}$

Interferência Destrutiva $\boxed{\varphi = (2n+1)\pi \Longleftrightarrow \Delta r = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2}}$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Interferência de ondas

3) Batimentos e velocidade de grupo

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas que se propagam no mesmo, têm a mesma amplitude e constante de fase nula, mas têm frequências ligeiramente diferentes (∴ diferentes número de onda)

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A\cos\left(k_1 x - \omega_1 t\right) \\ y_2(x,t) = A\cos\left(k_2 x - \omega_2 t\right) \end{cases}$$

$$\text{Onde} \quad \begin{cases} \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \overline{\omega} = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + \omega_2\right), \text{com } \omega_1 > \omega_2 \\ \Delta k = k_1 - k_2 \ll \overline{k} = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right), \text{com } k_1 > k_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = y_1 + y_2 = A\left\{\cos\left[\left(\overline{k} + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\overline{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right] + \cos\left[\left(\overline{k} - \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\overline{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]\right\}$$

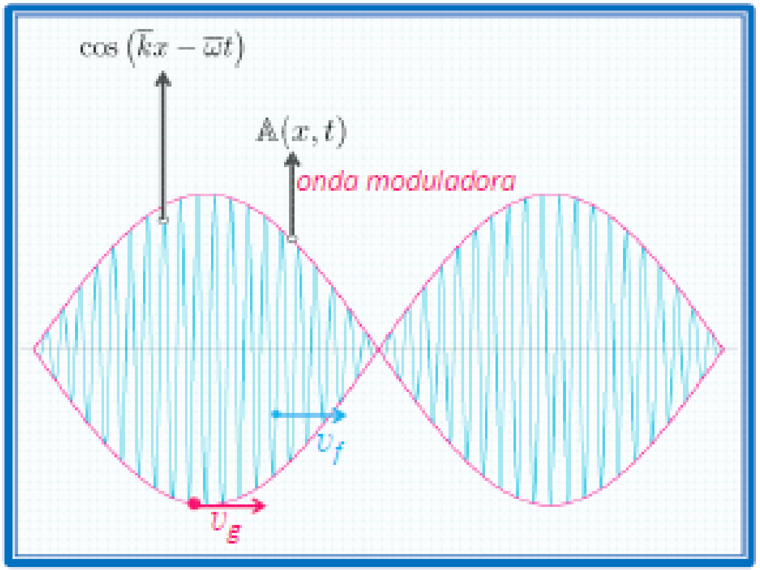
$$\boxed{y(x,t) = \mathbb{A}(x,t)\cos\left(\overline{k}x - \overline{\omega}t\right)}$$

alta frequência

$$\boxed{\mathbb{A}(x,t) = 2A\cos\left[\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right]}$$

baixa frequência

Batimentos e velocidade de grupo



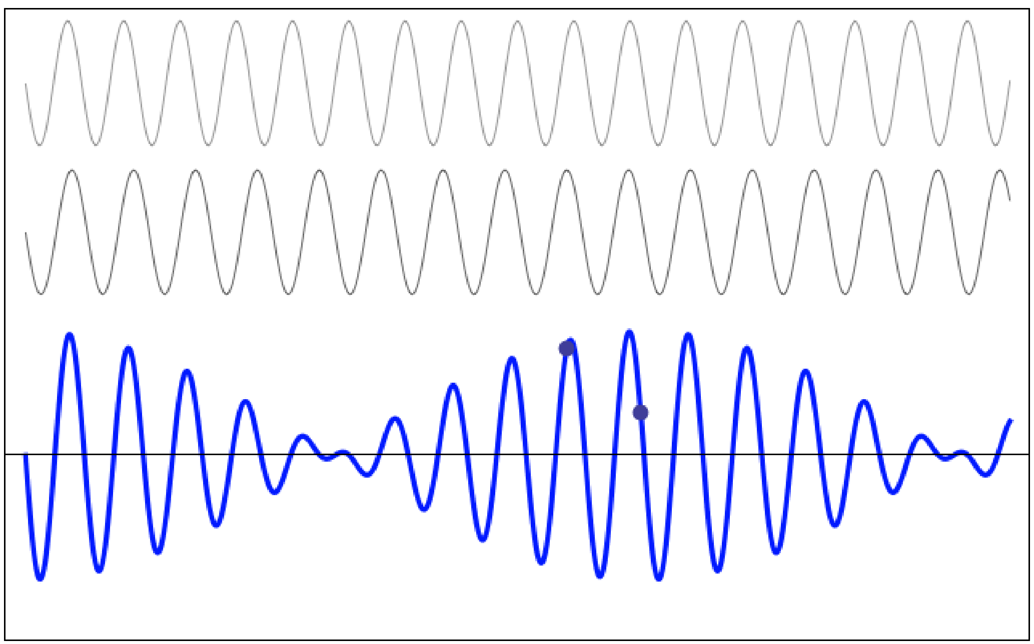
A fase desta onda é dada por:

$$\varphi(x,t) = \bar{k}x - \bar{\omega}t$$

$$v_f = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

$\mathbb{A}$ é constante.

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

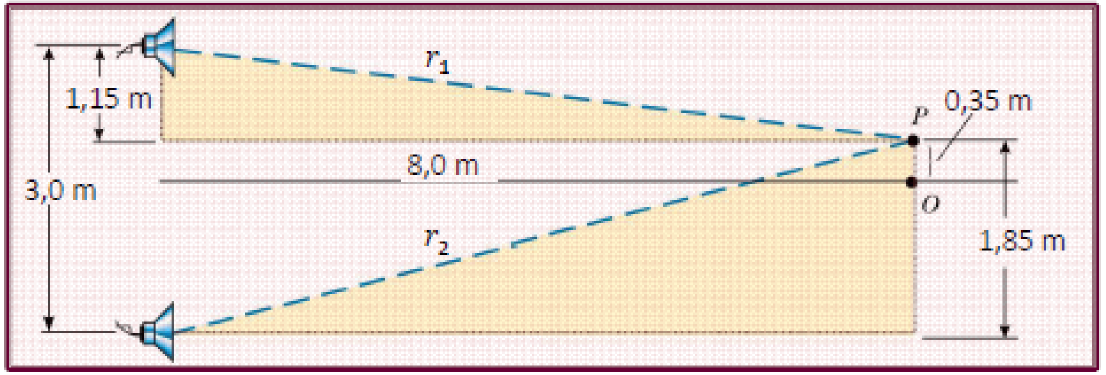


$$\omega_{Bat} = 2\frac{\Delta\omega}{2} = \omega_1 - \omega_2$$

$$\nu_{bat} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2$$

Interferência de Ondas

Exemplo: Um par de *speakers* estão separados pela distância de 3,0 m e estão ligados em uma mesma fonte oscilante. Um ouvinte, originalmente na posição O, desloca-se para o ponto P e alcança o primeiro mínimo de intensidade do som. Qual é a frequência da fonte? (usar v_{som} = 343 m/s)



Pela geometria da figura podemos encontrar os valores de r_1 e r_2:

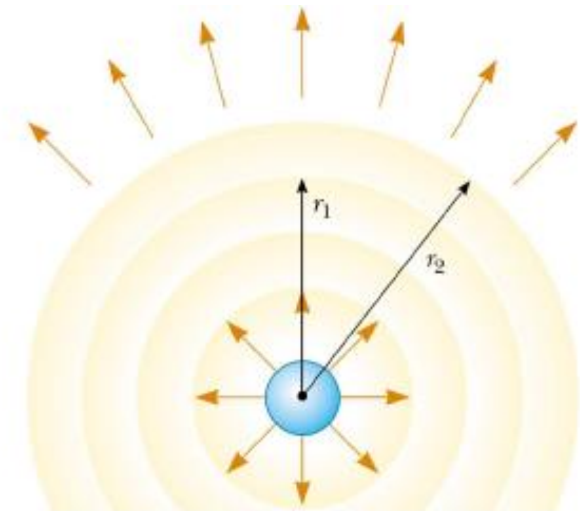
$$r_1 = \sqrt{(8,0)^2 + (1,15)^2} = 8,08 \text{ m} \qquad r_2 = \sqrt{(8,0)^2 + (1,85)^2} = 8,21 \text{ m}$$

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 0,13 = \frac{\lambda}{2} \Longrightarrow \lambda = 0,26 \text{ m}$$

primeiro mínimo

$$\boxed{\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{343}{0,26} = 1,3 \text{ kHz}}$$

Ondas Esféricas e Planas



$$P_S = \frac{d\overline{E}}{dt} = cte$$

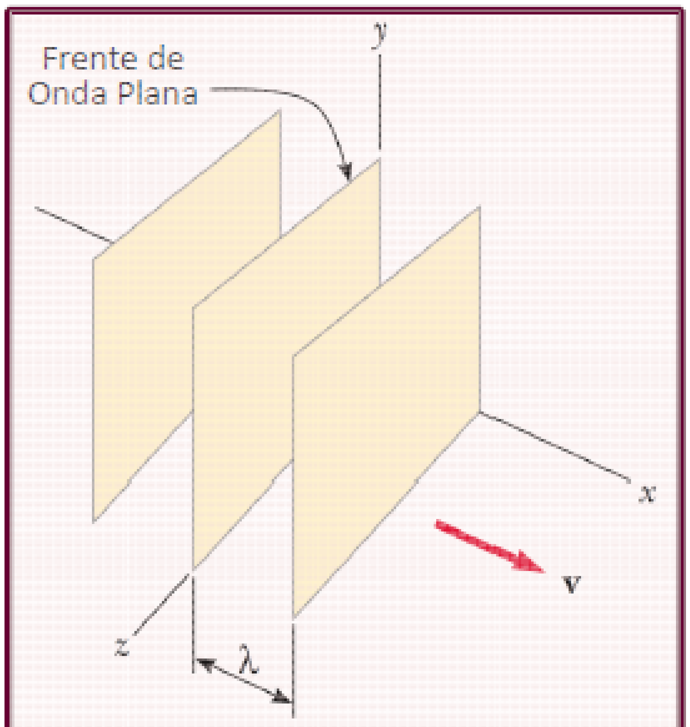
$$I(r) = \frac{P_S}{A(r)} = \frac{P_S}{4\pi r^2}$$

$$U = cte\sqrt{I} = cte\frac{1}{r}$$

$$\varphi(r,t) = \frac{a}{r}\cos\left(kr - \omega t + \delta\right)$$

Ondas Esféricas e Planas

Para distâncias grandes da fonte, quando comparadas com o comprimento de onda, podemos aproximar a frente de onda por um plano. Qualquer pequena porção da onda esférica, longe da fonte, pode ser considerada como uma onda plana. A propagação de uma onda plana pode ser representada pelas frentes de onda paralelas entre si e representadas no eixo cartesiano.



Ondas Sonoras: Efeito Doppler

Fonte parada-Detetor em movimento (u)

$$\nu = \frac{v_s}{\lambda_0} \pm \frac{u}{\lambda_0} = \nu_0\left(1 \pm \frac{u}{v_s}\right)$$

Fonte em mov.(V)-Detetor parado

$$\lambda = v_s T_0 \mp V T_0 = \lambda_0\left(1 \mp \frac{V}{v_s}\right)$$

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 \mp \dfrac{V}{v_s}}$$

sinais superiores: aproximação

sinais inferiores: afastamento

Ondas Sonoras: Efeito Doppler

Fonte e Observador em movimento

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{1 \pm \dfrac{u}{v_s}}{1 \mp \dfrac{V}{v_s}} \right)$$

$$v \Longrightarrow \text{velocidade do observador}$$

$$V \Longrightarrow \text{velocidade da fonte}$$

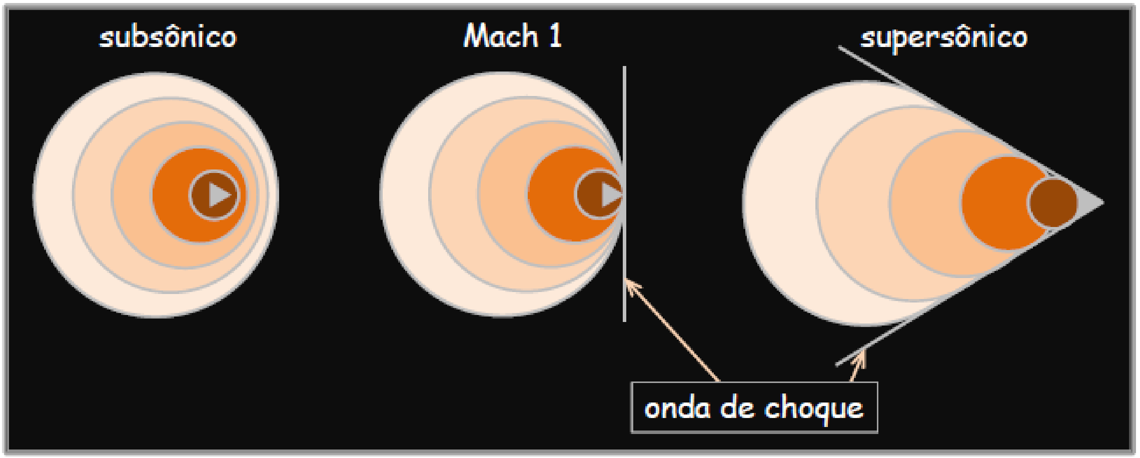
sinais superiores: aproximação

sinais inferiores: afastamento

Ondas Sonoras: Cone de Mach

Mach 1
$V = v_s$

Mach
$V > v_s$



(b) Cone de Mach

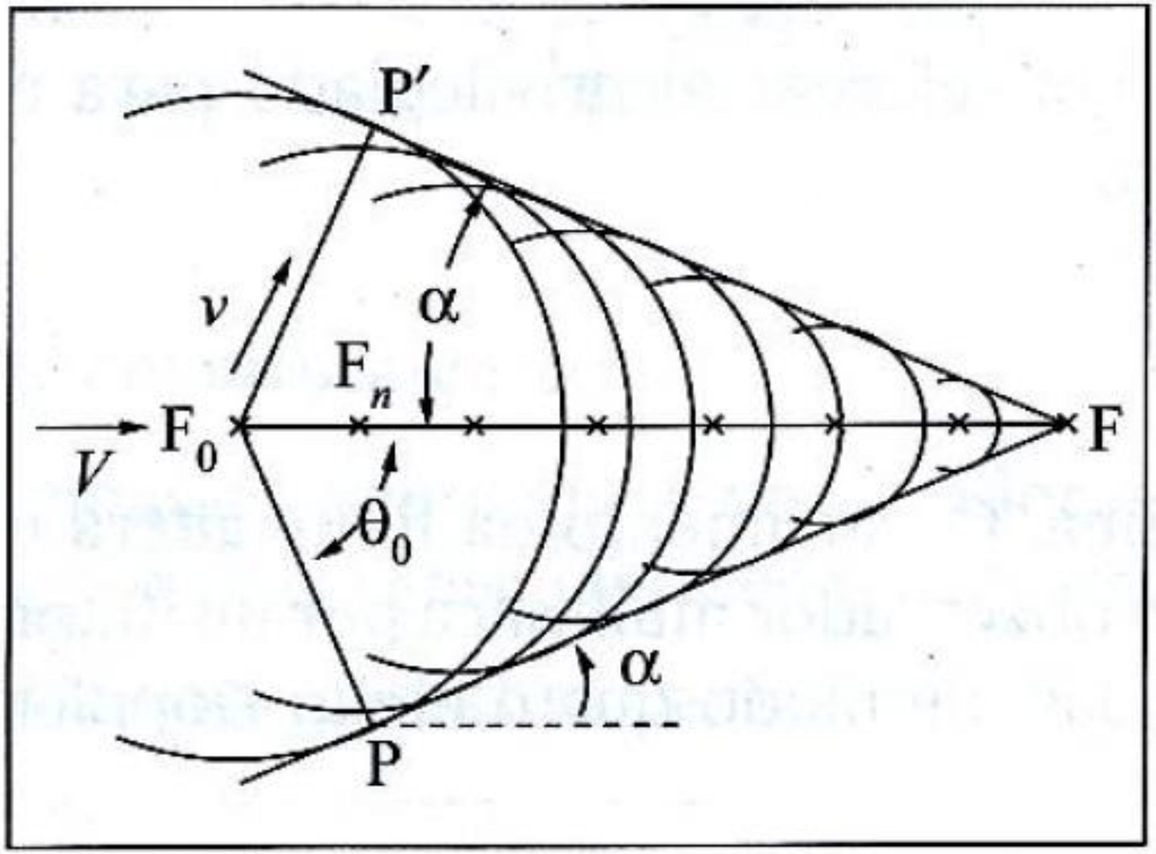


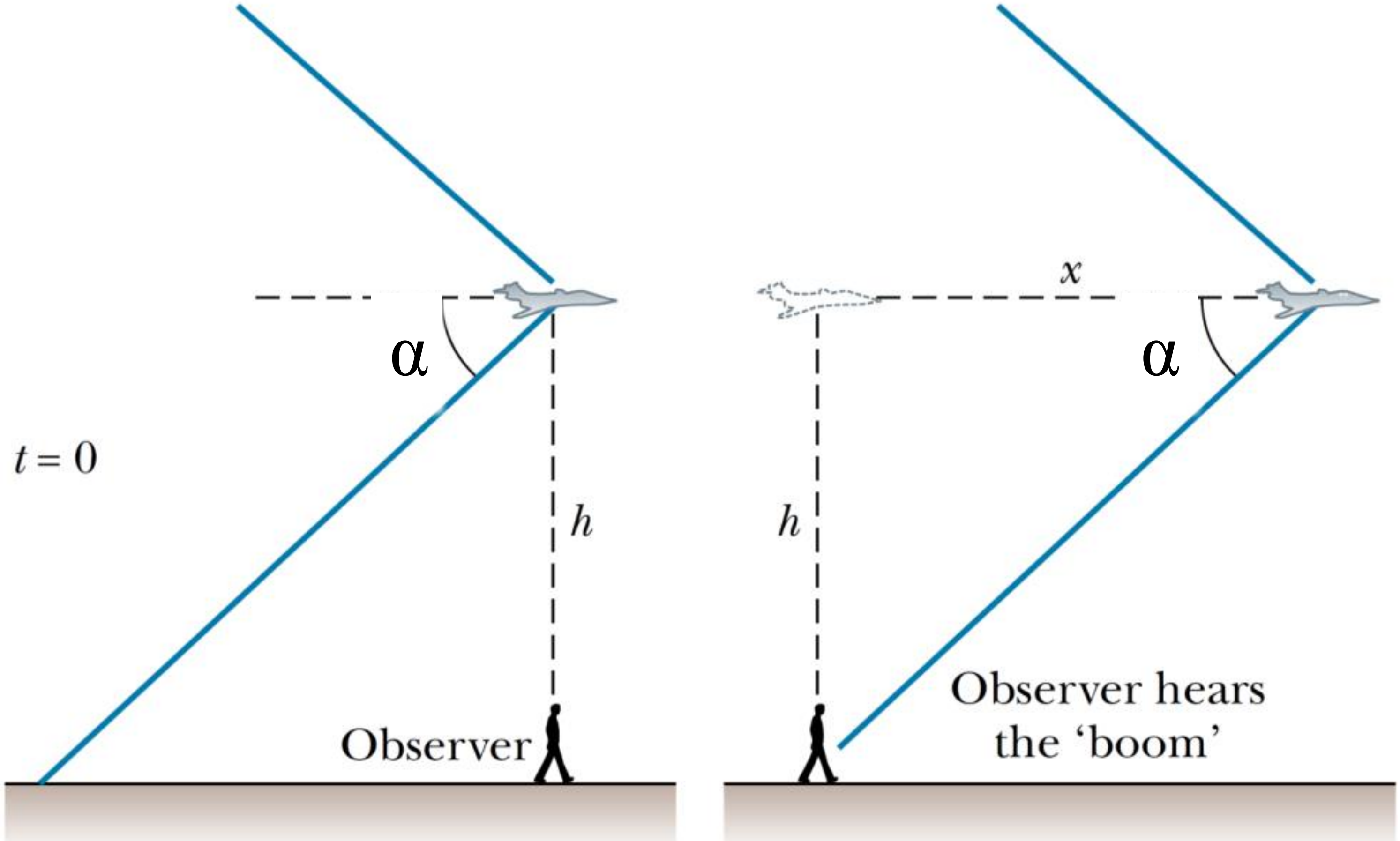
Figura 6.33 — *Cone de Mach*

$$\cos\theta_0 = \frac{v}{V}$$

$$\sin\alpha = \frac{v}{V}$$

Inverso do Número de Mach

Ondas Sonoras: Cone de Mach



$$\sin\alpha = \frac{v}{V}$$

$$\tan\alpha = \frac{h}{x} = \frac{h}{Vt}$$

Exercício: Um avião voa a 1,25 da velocidade do som. A explosão sônica alcança um homem no solo 0,25 min depois de o avião ter passado sob sua cabeça. Qual a altitude do avião? Considere a velocidade do som como sendo 330 m/s.

$$\sin\alpha = \frac{v}{1,25v}$$

α=0,927 rad

$$\tan 0,927 = \frac{h}{1,25(330)(0,25)(60)}$$

h=8245 m

Princípio de Huygens

Cada ponto de uma frente de onda comporta-se como frente de onda puntiforme de novas ondas, chamadas ondas secundárias.

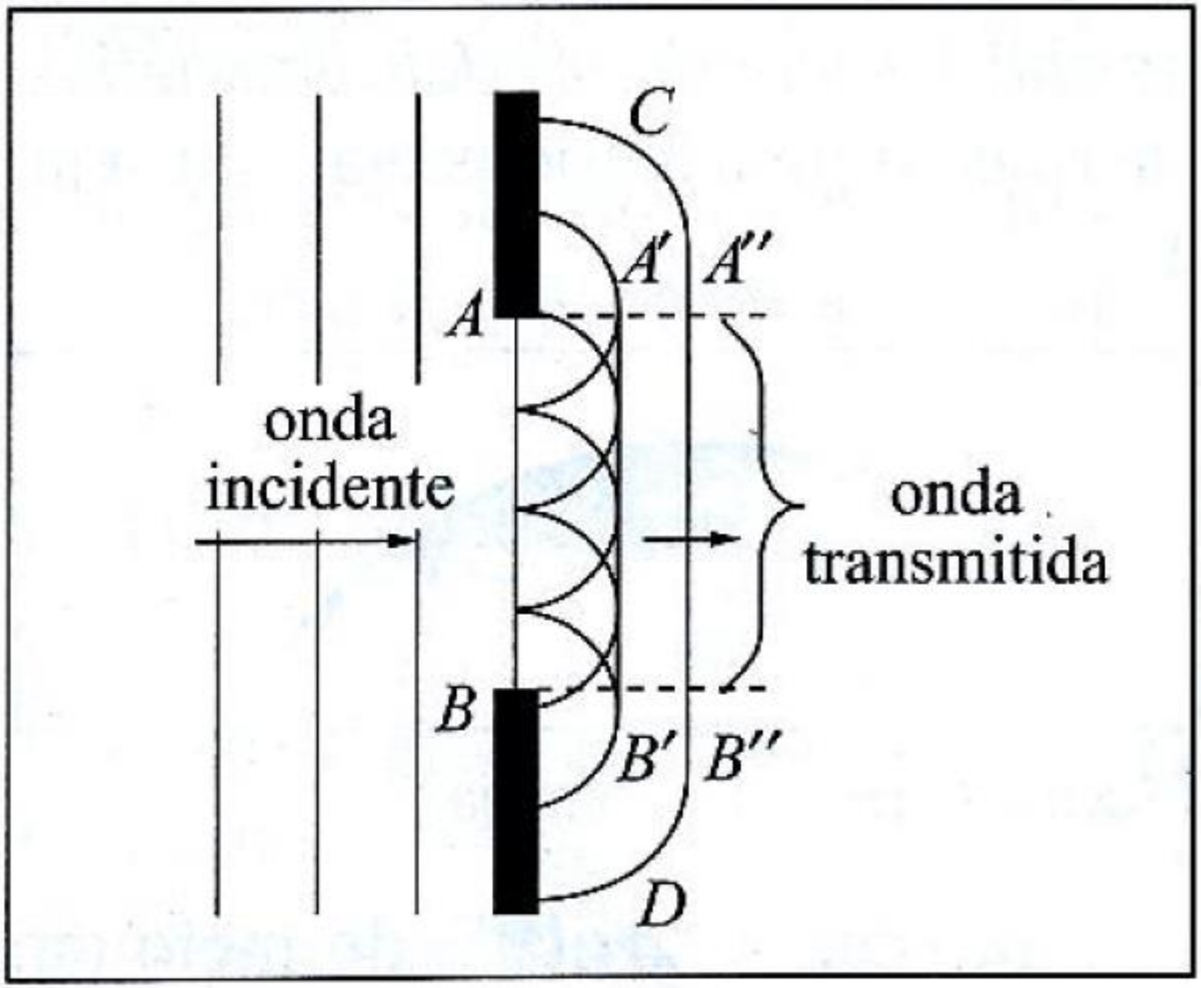


Figura 6.21 *— Propagação retilínea*

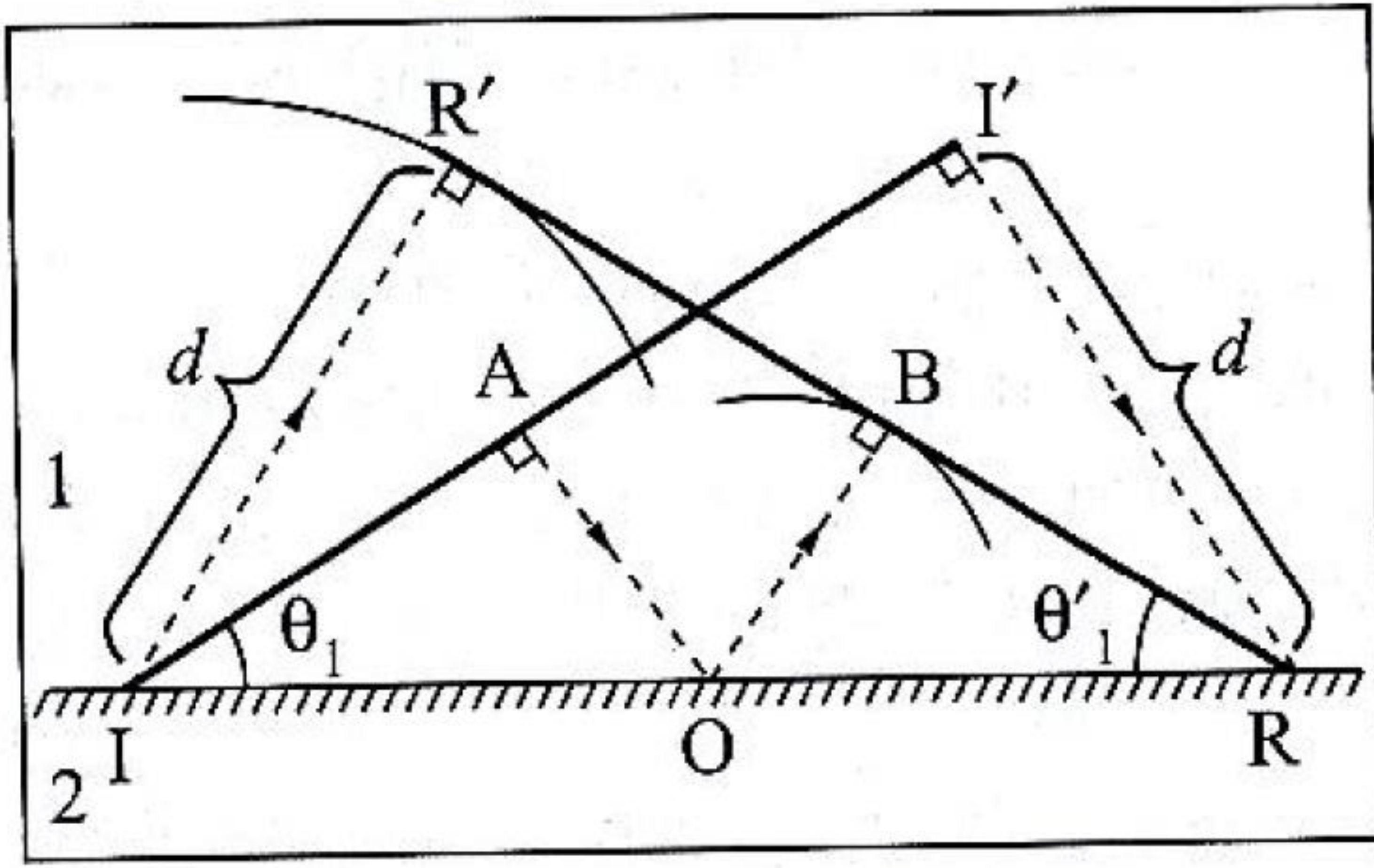


Figura 6.24 — *Lei da reflexão*