Balanço Energético:

$$E(t)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt}=\dot{x}\boxed{\left(m\ddot{x}+kx\right)}$$

Pela equação do oscilador harmônico forçado amortecido:

$$\boxed{m\ddot{x}+kx}=-m\gamma\dot{x}+F(t)$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt}=-m\gamma\dot{x}^2+F(t)\dot{x}=-m\gamma\dot{x}^2+P(t)} \qquad (1)$$

No regime estacionário:

$$\boxed{x(t)=A(\omega)\cos\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]}$$

$$\boxed{\dot{x}(t)=-\omega A(\omega)\sin\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]}$$

$$k=m\omega_0^2$$

$$\boxed{\ddot{x}(t)=-\omega^2 A(\omega)\cos\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]}$$

$$\boxed{m\ddot{x}+kx}=-m\omega^2x+\omega_0^2mx=m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)x$$

$$\frac{dE}{dt}=\dot{x}\boxed{\left(m\ddot{x}+kx\right)}=m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)x\dot{x}$$

$$\frac{dE}{dt}=m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)A\cos\left(\omega t+\varphi\right)\left[-A\omega sen\left(\omega t+\varphi\right)\right]$$

Mas: $sen\left[2\left(\omega t+\varphi\right)\right]=2sen\left(\omega t+\varphi\right)\cos\left(\omega t+\varphi\right)$

Potência Instantânea:

$$\boxed{\frac{dE}{dt}=m\omega A^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\frac{1}{2}sen\left[2\left(\omega t+\varphi\right)\right]} \qquad (2)$$

Considerando a média sobre um período:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = m\omega A^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\frac{1}{2}\boxed{\overline{sen\left[2\left(\omega t+\varphi\right)\right]}}$$

$$=0$$

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = 0$$ No regime estacionário, em média a energia se conserva

Tomando a média na Eq. (1):

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \overline{-m\gamma\dot{x}^2} + \overline{P(t)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\overline{P(t)} = \overline{m\gamma\dot{x}^2} = m\gamma A^2\omega^2 \boxed{\overline{sen^2(\omega t+\varphi)}}$$

$$=1/2$$

Mas: $$A(\omega) = \left(\frac{F_0}{m}\right)\frac{1}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}}$$

$$\boxed{\overline{P(t)} = \left(\frac{\gamma F_0^2\omega^2}{2m}\right)\frac{1}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right]}} \qquad (3)$$

$$\boxed{\overline{P(\omega)} = \left(\frac{\gamma F_0^2 \omega^2}{2m}\right)\frac{1}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right]}} \qquad (3)$$

Em termos de $\alpha = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, eq. (3) se escreve:

$$\overline{P(\omega)} = \left(\frac{\gamma F_0^2}{2m\omega_0^2}\right)\frac{1}{\left[\dfrac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}{\omega_0^2\omega^2}\right]} = \left(\frac{\gamma F_0^2}{2m\omega_0^2}\right)\frac{1}{\left[\dfrac{\omega_0^2\left(1-\alpha^2\right)^2}{\omega^2}+\dfrac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right]}$$

$$\boxed{\overline{P(\omega)} = \left(\frac{\gamma F_0^2}{2m\omega_0^2}\right)\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)^2+\dfrac{\gamma^2}{\omega_0^2}} = \left(\frac{\gamma F_0^2}{2m\omega_0^2}\right)\frac{1}{\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\gamma^2}{\omega_0^2}}} \qquad (4)$$

$$\boxed{\overline{P(\omega)} = \left(\frac{\gamma F_0^2}{2m\omega_0^2}\right)\frac{1}{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}} \qquad (4)$$

Definindo: $Q = \dfrac{\omega_0}{\gamma}$ (Fator Q do oscilador ou fator de qualidade)

$$\boxed{\overline{P(\omega)} = \left(\frac{F_0^2}{2mQ\omega_0}\right)\frac{1}{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}}$$

Valor máximo de $\overline{P} \Rightarrow$ mínimo do denominador

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{P_{\max} = \frac{F_0^2}{2m\gamma} = \frac{QF_0^2}{2m\omega_0}}$$

Ressonância da Potência média: $\boxed{\omega_R^P = \omega_0}$

Ressonância da Amplitude: $\boxed{\omega_R^A = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}}$

Para amortecimento fraco $(\gamma << \omega_0) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\omega_R^P = \omega_R^A = \omega_0}$

2. (Poli 2006) Um corpo de massa m desliza sobre um plano horizontal sem atrito sujeito a três forças: uma força elástica resultante da ação de uma mola de constante elástica k, uma força devido À resistência viscosa do meio, caracterizada pela constante de resistência viscosa ρ e uma força externa periódica $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, sendo Ω a frequência externa.

(a) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento do corpo e encontre a sua solução estacionária.

(b) Considerando que $m = 50\,\mathrm{kg}$, $k = 5000\,\mathrm{N/m}$, $F_0 = 50\,\mathrm{N}$ e $\rho = 500\,\mathrm{kg/s}$, calcule a frequência natural do sistema e o seu fator de qualidade.

(c) No regime estacionário, usando os valores do item anterior, determine o valor de Ω para o qual a amplitude do movimento é máxima.

(d) No regime estacionário, usando os valores do item (b), determine o valor da amplitude máxima.

R: (a) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$, $x(t) = A(\Omega)\cos[\Omega t + \Phi(\Omega)]$, $A(\Omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\gamma^2\Omega^2}}$ e $\Phi(\Omega) = -\arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)$, (b) $\omega_0 = 10\,\mathrm{s}^{-1}$ e $Q = 1$, (c) $\Omega_R = 5\sqrt{2}\,\mathrm{s}^{-1}$ e (d) $A_{max} = \frac{1}{50\sqrt{3}}\,\mathrm{m}$.

3. (Poli 2007) Um corpo de massa $50\,\mathrm{g}$ está preso a uma mola de constante $k = 20\,\mathrm{N/m}$ e oscila, inicialmente, livremente. Esse oscilador é posteriormente colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0{,}9\,\mathrm{kg/s}$. Depois disso o oscilador, ainda no meio viscoso, é excitado por uma força externa $F = F_0 \cos(\Omega t)$, onde $F_0 = 9{,}0\,\mathrm{N}$ e $\Omega = 20{,}0\,\mathrm{rad/\,s}$.

(a) Determine a frequência natural do sistema.

(b) Qual o regime de oscilação do sistema quando imerso no meio viscoso, mas antes de ser excitado pela força externa? Justifique a resposta.

(c) Depois que a força externa é aplicada e que o sistema entrou no regime estacionário, qual o valor da amplitude do movimento?

(d) Qual deveria ser o valor exato da frequência externa de excitação para que a amplitude de oscilação, no regime estacionário, fosse máxima?

R: (a) $\omega_0 = 20\,\mathrm{s}^{-1}$; (b) Regime subcrítico ($\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$) ; (c) $A = 0{,}5\,\mathrm{m}$ e (d) $\Omega_R = \sqrt{238}\,\mathrm{s}^{-1}$.

1. Um oscilador não amortecido de massa m e frequência própria ω_0 move-se sob a ação de uma força externa $F = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, partindo da posição de equilíbrio com velocidade inicial nula. Ache o deslocamento $x(t)$.

R: $x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) \right]$.