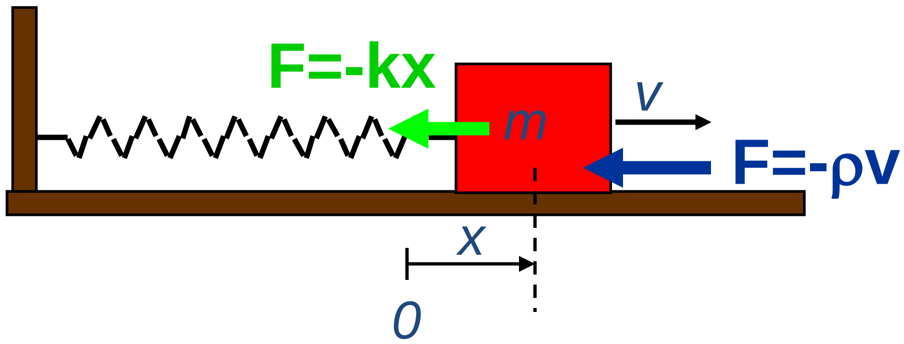
Dissipação da Energia



Na prática sempre existe dissipação de energia:

ATRITO

Baixas velocidades, resistência do fluido ~ proporcional à velocidade do objeto no fluido.

$$F = -\rho v$$

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\rho}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

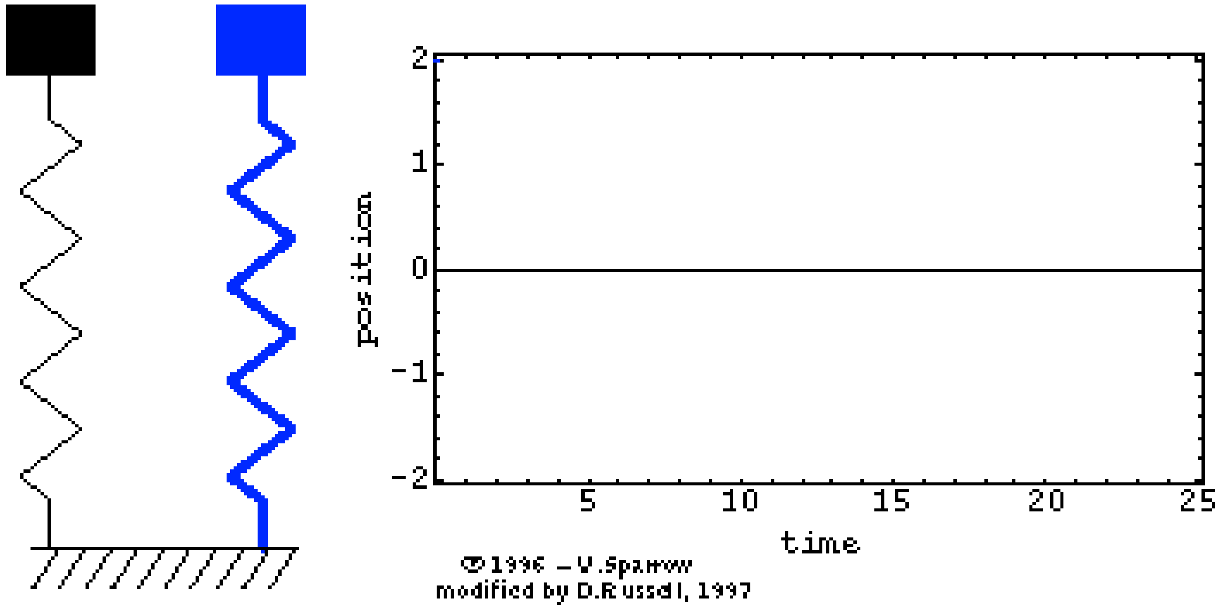
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Onde:

$$\boxed{\gamma = \frac{\rho}{m}} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

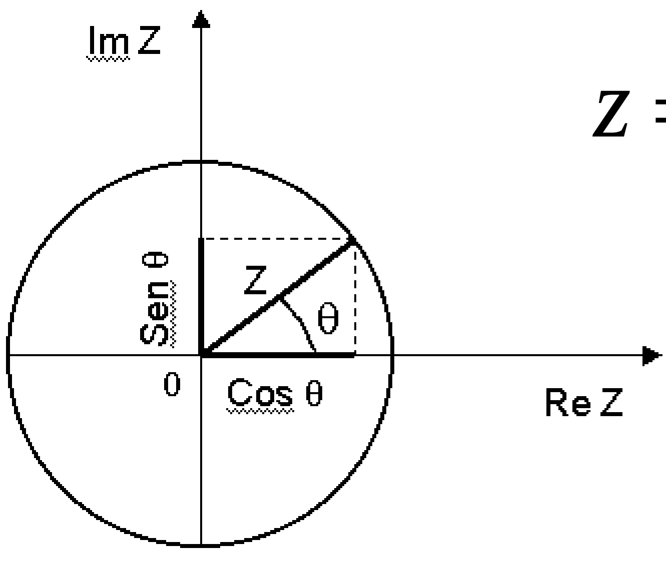
Oscilador Harmônico

Simples **Amortecido**



Melhor maneira de resolver a equação é utilizando o conceito de números complexos, em particular da exponencial complexa:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$



$$z = x + iy = |z|\cos\theta + |z|\sin\theta i$$

$$z = |z|e^{i\theta}$$

A resposta será a parte real da solução.

(1) Amortecimento subcrítico:

Vamos tentar a solução tentativa:

$$x(t) = Ae^{i(pt+\varphi)}$$

$$\frac{dx}{dt} = ipx \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -p^2x$$

Substituindo: $\boxed{-p^2 + ip\gamma + \omega_0^2 = 0}$

$$p = \frac{-\gamma i \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{-2}$$

$$\boxed{p_{+,-} = \frac{+i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$

(1) Amortecimento subcrítico:

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

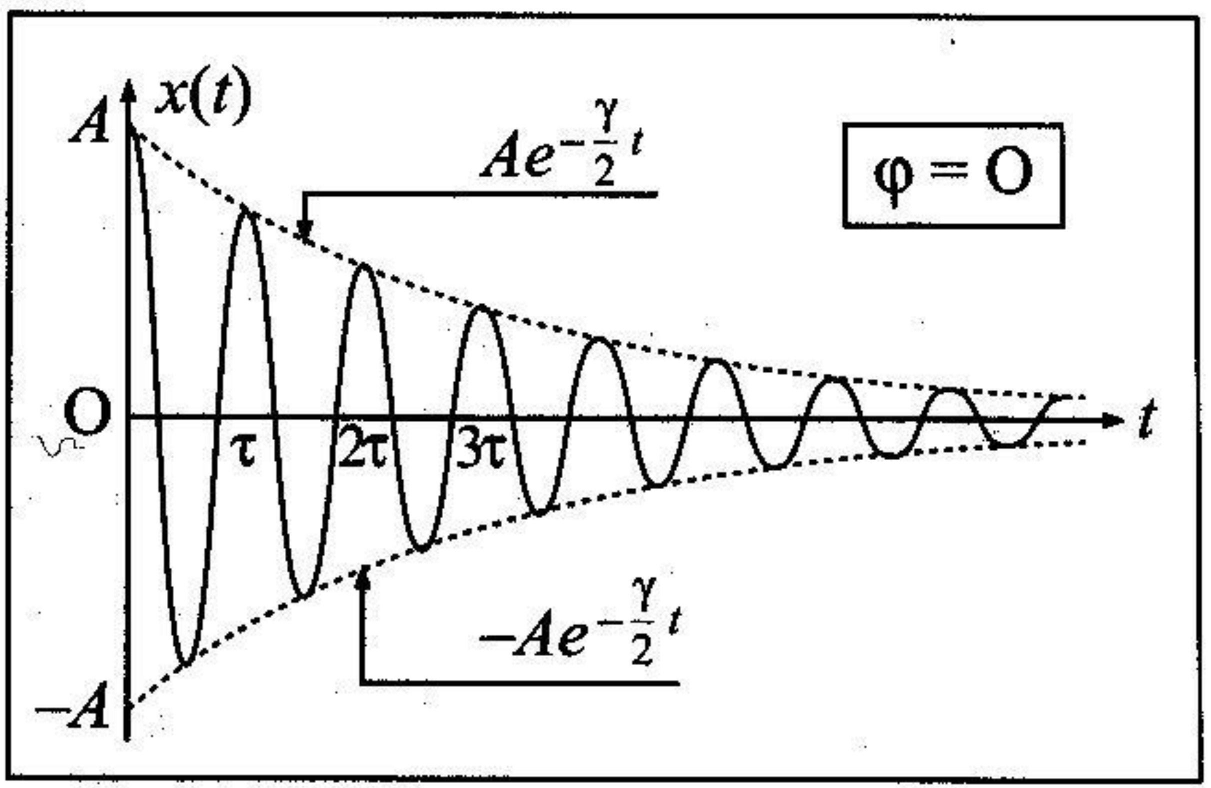
$$x(t) = Ae^{i\left(\frac{\gamma i t}{2} \pm \beta t + \varphi\right)} = Ae^{\frac{-\gamma t}{2}} e^{i(\pm \beta t + \varphi)}$$

(1) Amortecimento subcrítico: $\omega_0 > \frac{\gamma}{2} \Longrightarrow \omega = \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

Solução é a parte real: $x(t) = Ae^{\frac{-\gamma t}{2}} cos(\omega t + \varphi)$

(1) Amortecimento subcrítico:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)$$



$$\gamma = \rho/m$$

$$\omega_0^2 = k/m$$

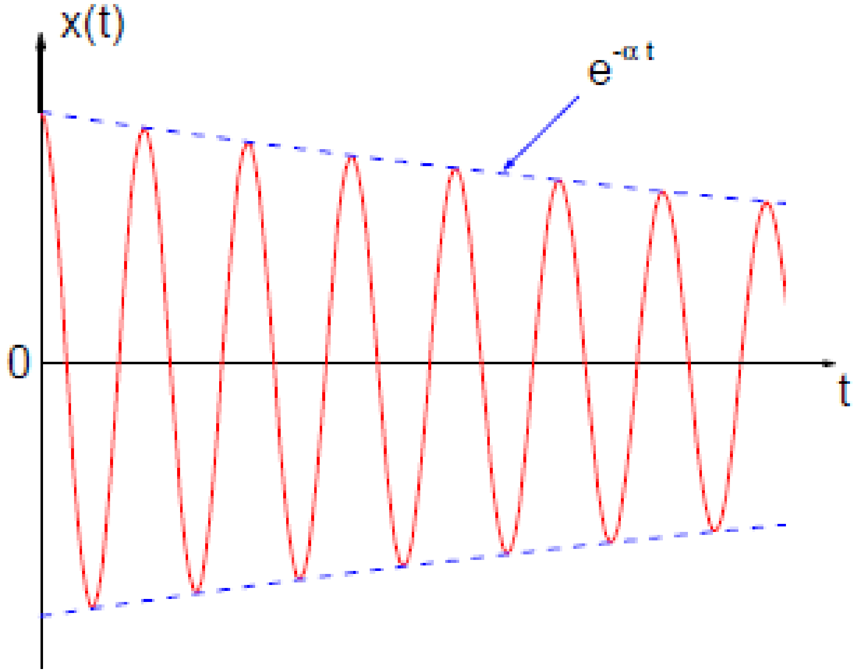
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/damped/d.htm

No caso de amortecimento fraco: $\frac{(\gamma/2)}{\omega_0} << 1$

$$\omega = \omega_0$$

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} cos(\omega_0 t + \varphi)}$$



$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{\gamma}{2\omega_0} = 0.01$$

(1) Amortecimento subcrítico:

Balanço de energia: $E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\rho\dot{x}^2 = -m\gamma\dot{x}^2 = -m\gamma\dot{x}\,\dot{x}$$

velocidade

Força de atrito:

mas $\dot{x} = -\frac{\gamma}{2}Ae^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos\left(\omega t + \varphi\right) + e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left[-\omega A \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)\right]$

$$E(t)=\frac{1}{2}mA^2e^{-\gamma t}\left[\underbrace{\left(\omega_0^2+\frac{\gamma^2}{4}\right)}_{\omega^2}cos^2\left(\omega t+\varphi\right)+\right.$$

$$\left.+\omega^2\text{sen}^2(\omega t+\varphi)+\frac{\gamma}{2}\omega\underbrace{2\text{sen}(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\varphi)}_{\sin\left[2\left(\omega t+\varphi\right)\right]}\right]$$

$$\overleftarrow{E}(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}E\left(\text{t'}\right)\text{dt'}$$

Para amortecimento fraco, $\gamma << \omega_0$ e o fator $e^{-\gamma t}$ varia pouco e pode sair da integral e $\omega = \omega_0$.

$$\boxed{\overleftarrow{E}(t)=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2e^{-\gamma t}=\overleftarrow{E}(0)e^{-\gamma t}}$$

$$\frac{\bar{E}(\tau_d)}{\bar{E}(0)} = \frac{1}{e} \Longrightarrow \tau_d = \frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{d\bar{E}(t)}{dt} = -\gamma \bar{E} \qquad (\gamma << \omega_0)$$

De modo que γ representa a taxa de decréscimo relativo da energia média por unidade de tempo.

A energia dissipada em 1 ciclo de oscilação:

$$\Delta \bar{E} = -\frac{d\bar{E}}{dt} \cdot \tau = \gamma \bar{E} \tau$$

Fator de mérito ou fator Q:

$$Q = 2\pi \left(\frac{\text{Energia armazenada}}{\text{Energia dissipada por ciclo}} \right)$$

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{\bar{\mathrm{E}}}{\Delta \bar{\mathrm{E}}} = \frac{2\pi}{\gamma \tau} = \frac{\omega_0}{\gamma}}$$

Ou em relação a τ_{d} e τ

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{\tau_d}{\tau}}$$

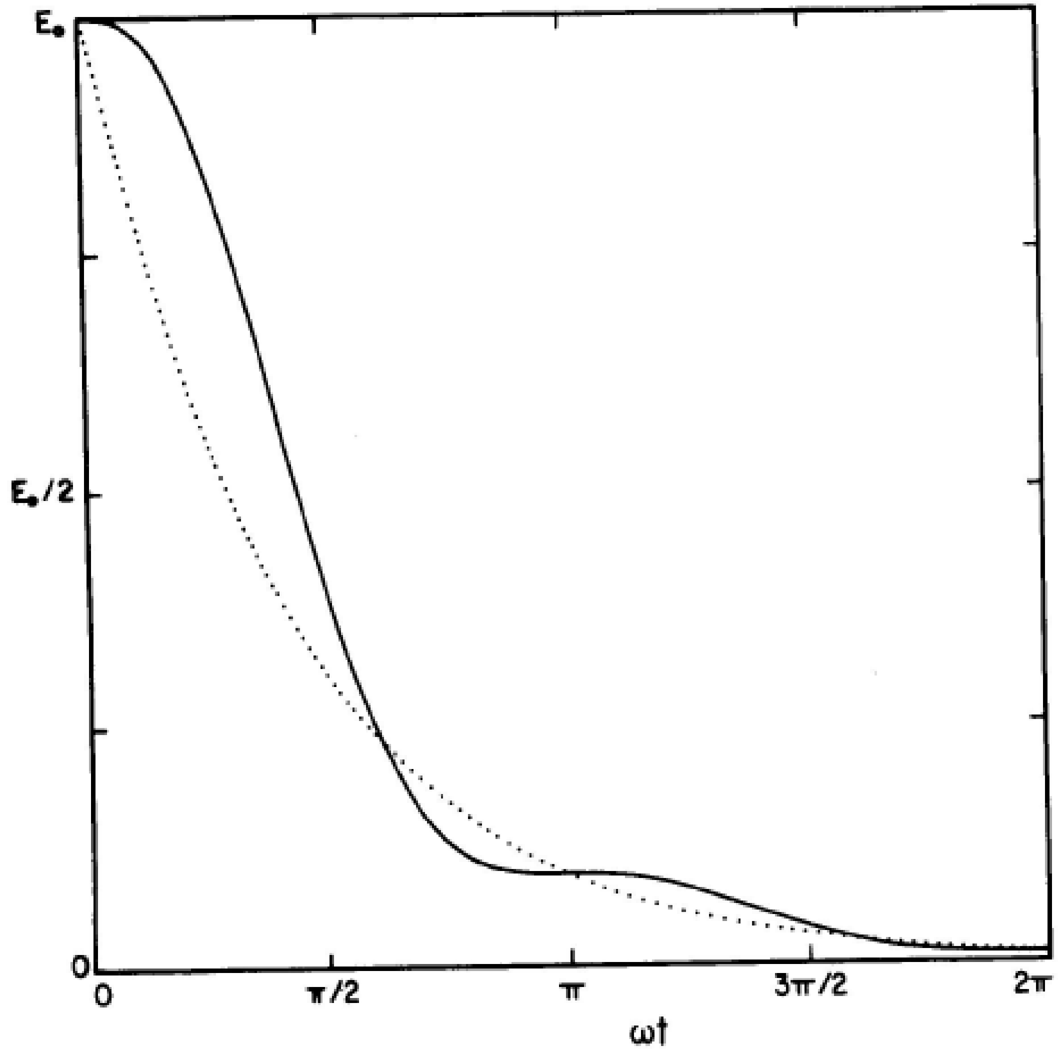


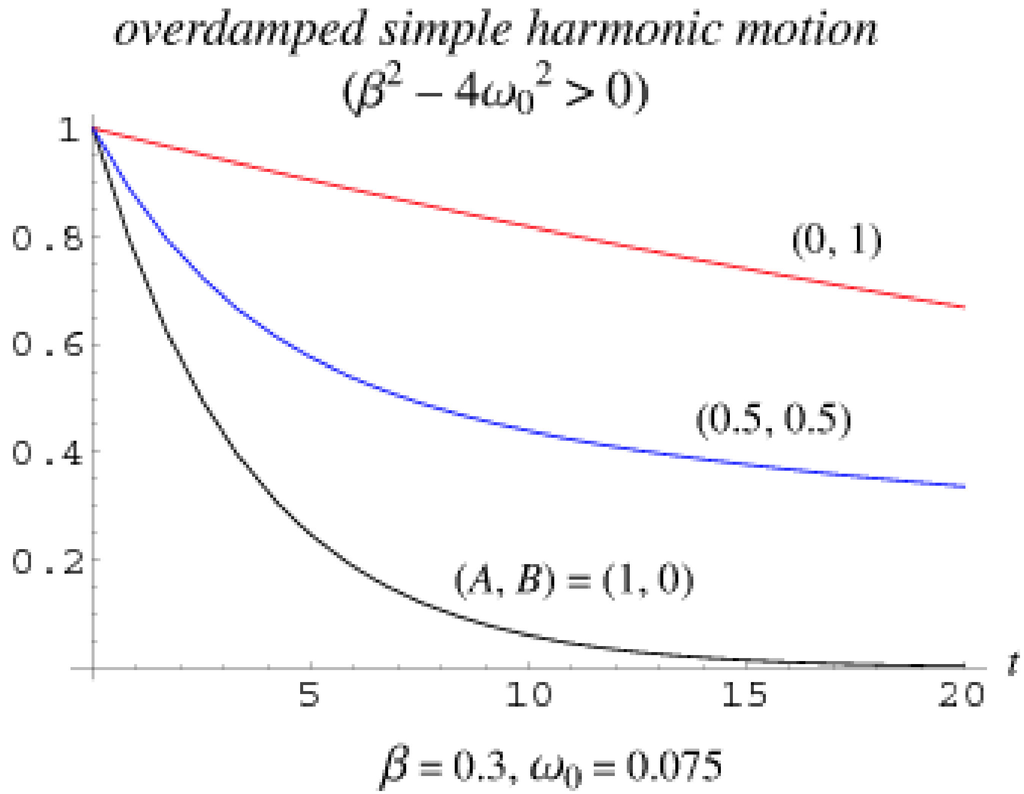
Fig.2- Energia mecânica do oscilador harmônico amortecido para $\gamma / \omega_0 = 0{,}35$ *com* $v_0 = 0$. *Curva sólida: energia mecânica. Curva pontilhada: assíntota fornecida pela simples exponencial temporal.*

(2) Amortecimento supercrítico: $$x(t) = Ae^{i(p_+ t)} + Be^{i(p_- t)}$$

$$\omega_0 < \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \omega = i\beta$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

A solução será: $$\boxed{x(t) = e^{\frac{-\gamma t}{2}}\left(Ae^{-\beta t} + Be^{\beta t}\right)}$$



Subcrítico: $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$

Supercrítico: $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$

Crítico: $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$

(3) Amortecimento crítico

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = 0 \longrightarrow \boxed{\omega_0 = \gamma / 2}$$

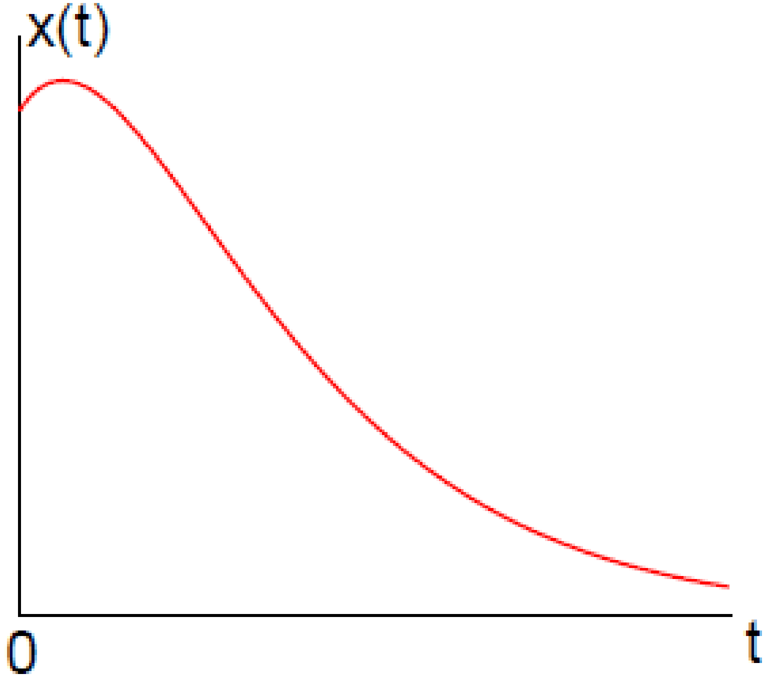
$$\boxed{x(t) = Ce^{-\frac{\gamma t}{2}} + D}$$

É interessante observar o que acontece quando temos um amortecimento supercrítico (β>0) mas tendendo para amortecimento crítico (β<<1).

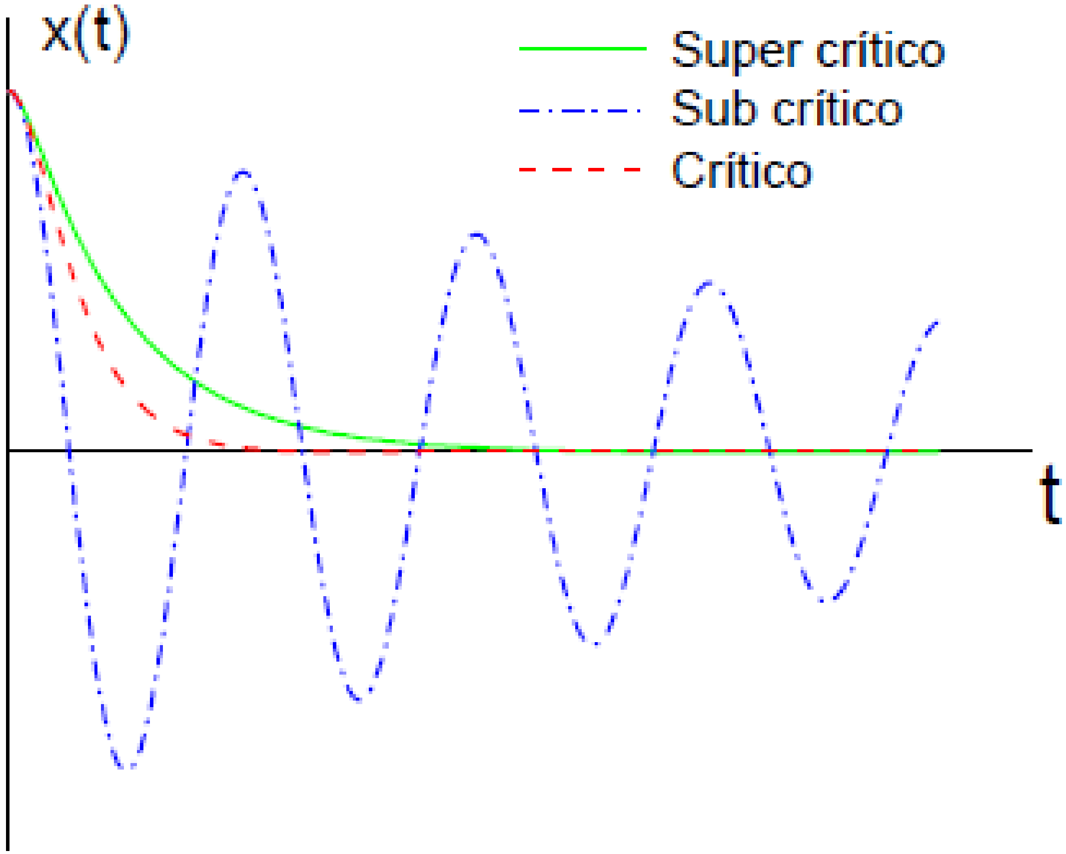
$$e^{\pm\beta t} = 1 + \beta t$$

$$x(t) = \left[A\left(1+\beta t\right) + B\left(1-\beta t\right) \right] e^{-\frac{\gamma t}{2}}$$

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t\right) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$$



Na figura abaixo, comparamos o comportamento temporal dos amortecimentos críticos, subcrítico e supercrítico para $x_0 = x_m$ e $v_0 = 0$.



(**)14. Um oscilador harmônico amortecido consiste em um bloco ($m = 2\,\text{kg}$), uma mola ($k = 10{,}0\,\text{N/m}$) e uma força de amortecimento $F = -\rho v$. Inicialmente, ele oscila com amplitude de 25,0 cm; devido ao amortecimento, a amplitude é reduzida para três quartos do seu valor inicial, quando são completadas quatro oscilações.

(a) Qual o valor de ρ?

(b) Quanta energia foi ?perdida? durante essas oscilações?

R: (a) $\rho = 0{,}102\,\text{kg/s}$ e (b) $\Delta E = 0{,}136\,\text{J}$.

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\rho}{m}}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$x(t) = Ae^{\frac{-\gamma t}{2}}\cos(\omega t + \varphi)$$

Vamos usar aproximação de amortecimento fraco

$$\frac{3x_0}{4} = x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{10}} = 2.81\text{s}$$

$$\ln\frac{3}{4} = -\frac{\gamma(4T)}{2} \longrightarrow \gamma = 0.051$$

(a) $\rho = \gamma m = 0{,}102\,\text{Kg}\cdot\text{s}^{-1}$

A energia é proporcional a: $E \propto A^2$

$$\frac{E(4T)}{E(0)} = \frac{\left(3x_0 / 4\right)^2}{x_0^2} = \frac{9}{16}$$

Energia perdida: $\left(1 - \frac{9}{16}\right) E(0) = \frac{7}{16}\left(\frac{1}{2} k x_0^2\right) = \frac{7}{16}\left[\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (0.25)^2\right] = 0.137\,\mathrm{J}$

(**)**21.** Um corpo de massa $m = 1000\,\mathrm{kg}$ cai de uma altura $H = 1\,\mathrm{m}$ sobre uma plataforma de massa desprezível. Deseja-se projetar um sistema constituído por uma mola e um amortecedor sobre o qual se montará a plataforma de modo que ela fique em equilíbrio a uma distância $d = 2\,\mathrm{m}$ abaixo de sua posição inicial, após o impacto. O equilíbrio deve ser atingido tão rápido quanto possível, sem oscilações.

(a) Obtenha a constante k da mola e a constante de amortecimento ρ do amortecedor.

(b) Obtenha a equação que descreve o movimento do bloco após entrar em contato com a plataforma.

R: (a) $k = 5 \times 10^3\,\mathrm{N/m}$ e $\rho = 2\sqrt{5} \times 10^3\,\mathrm{kg/s}$ e (b) $x(t) = 2(\mathrm{e}^{-\sqrt{5}\,t} - 1)\,\mathrm{m}$.

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh \longrightarrow \boxed{k = \frac{2mgH}{x^2} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 1}{2^2} = 5000\,\mathrm{N/m}}$$

No amortecimento crítico: $\omega_0 = \gamma / 2$

$$\gamma = 2\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{\frac{5000}{1000}} = 2\sqrt{5}\, s^{-1}$$

$$\boxed{\rho = \gamma m = 2\sqrt{5} \cdot 1000 = 2000\sqrt{5}\,\mathrm{Kg \cdot s^{-1}}}$$

$$x(t) = Ce^{-\frac{\gamma t}{2}} + D = Ce^{-\frac{\gamma t}{2}} - 2$$

$$\dot{x}(0) = \sqrt{2gH} = \sqrt{20}$$

$$\dot{x}(0) = -\sqrt{20}\,\text{m/s}$$

$$x(t) = Ce^{-\frac{\gamma t}{2}} - 2$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{\gamma}{2}C = -\sqrt{20}$$

$$C = \frac{2\sqrt{20}}{\gamma} = \frac{2\sqrt{20}}{2\sqrt{5}} = 2$$

$$\boxed{x(t) = 2\left(e^{-t\sqrt{5}} - 1\right)}$$