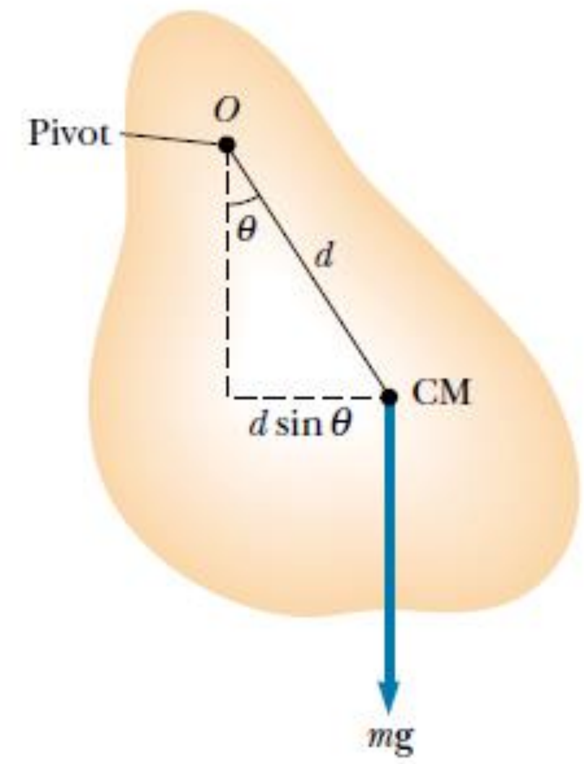
(c) Pêndulo Físico



$$\tau = -mgd\sin\theta$$

$$I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau = -mgd\sin\theta$$

Se θ<<1

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{mgd}{I}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}} \qquad (1)$$

$$\boxed{\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \varphi)}$$

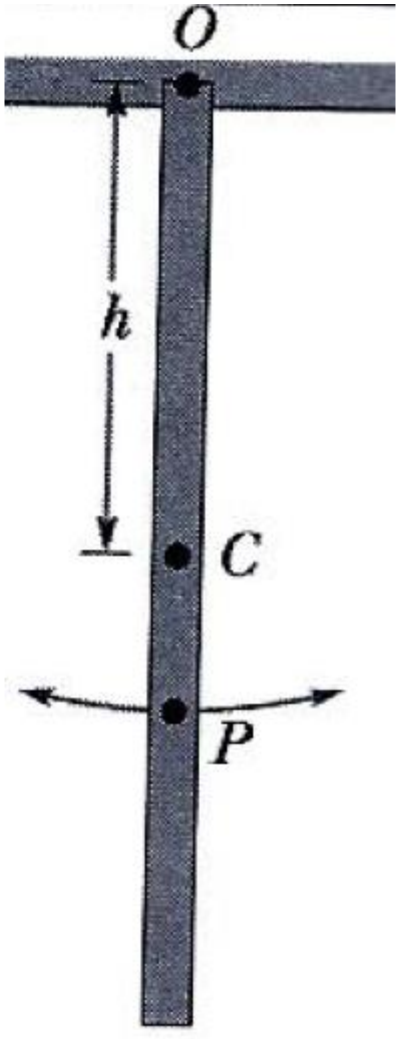
Medindo g

Teorema dos eixos paralelos

$$I = I_{CM} + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

Fazendo d=h=L/2 e isolando g na Eq. (1)

$$g = \frac{4\pi^2 I}{mdT^2} = \frac{4\pi^2\left(\frac{mL^2}{3}\right)}{m\left(\frac{L}{2}\right)T^2} = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$



(a)

(d) Oscilações de um líquido num tubo em U

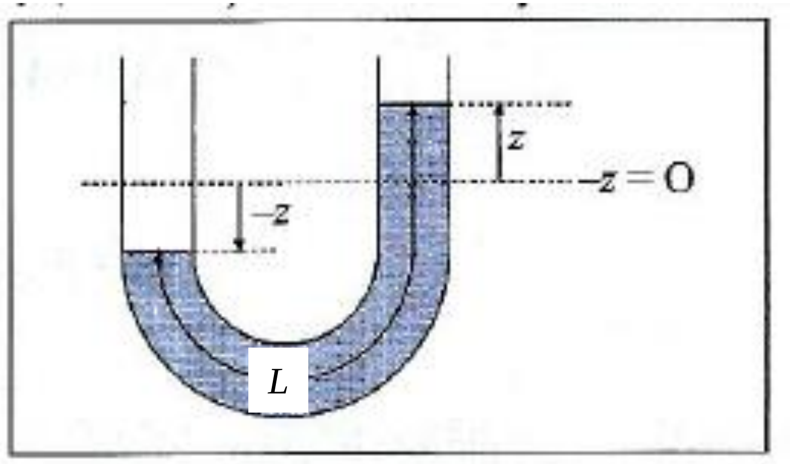


Figura 3.15 — Tubo em U

Energia Potencial

$$U(z) = \rho A z\, g z = \rho A g z^2$$

massa elevada

Coluna líquida entra em oscilação com velocidade dz/dt

Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2}\rho A L \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

massa

Comparando com as energias de uma massa *m* suspensa por uma mola

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2} \longrightarrow \boxed{\frac{k}{2} \Leftrightarrow \rho A g}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}m \Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho A L}$$

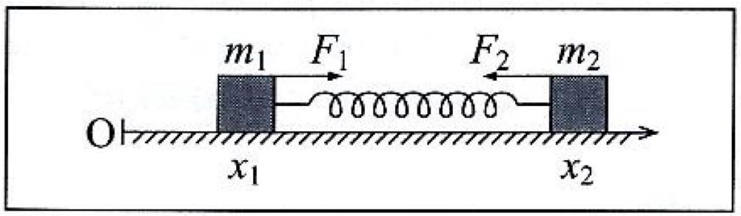
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2\rho A g}{\rho A L}} = \sqrt{\frac{2g}{L}} = \sqrt{\frac{g}{(L/2)}}}$$

Equivalente as oscilações de um pêndulo
com comprimento igual a *L*/2

(d) Oscilações de duas partículas

$$\boxed{x = (x_2 - x_1) - l} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$$

$$\boxed{F_1 = kx} \qquad \boxed{F_2 = -kx}$$



As equações de movimento são:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{m_1\ddot{x}_1 = kx} \\ \boxed{m_2\ddot{x}_2 = -kx} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boxed{m_1 m_2 \ddot{x}_1 = k m_2 x} \\ \boxed{m_1 m_2 \ddot{x}_2 = -k m_1 x} \end{array} \Rightarrow \boxed{\frac{m_1 m_2 (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{k(m_1 + m_2)x}{m_1 + m_2}}$$

Em função da massa reduzida:

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{M}} \qquad \boxed{m_1 + m_2 = M}$$

$$\boxed{\mu\ddot{x} = -kx}$$

Em relação à coordenada do centro de massa:

$$\boxed{X = \frac{(m_1 x_1 + m_2 x_2)}{M}} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\ddot{X} = 0} \\ \boxed{\dot{X} = V} \end{array} \right.$$

Em relação à coordenada relativa x, o sistema se comporta como um oscilador harmônico de uma única partícula com massa μ e sujeito à força de interação entre as duas partículas.

O centro de massa permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme

A energia Total é:

$$\boxed{E = E_{CM} + E^{'}} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{CM} = T_{CM} = \dfrac{1}{2} M V^2 \\[2ex] E^{'} = \dfrac{1}{2}\mu \dot{x}^2 + \dfrac{1}{2} k x^2 \end{array} \right.$$

Exemplo: Molécula diatômica

$$\boxed{U(r) = D\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right]}$$

a é a distância de equilíbrio

D=-U(a) é a energia de dissociação da molécula

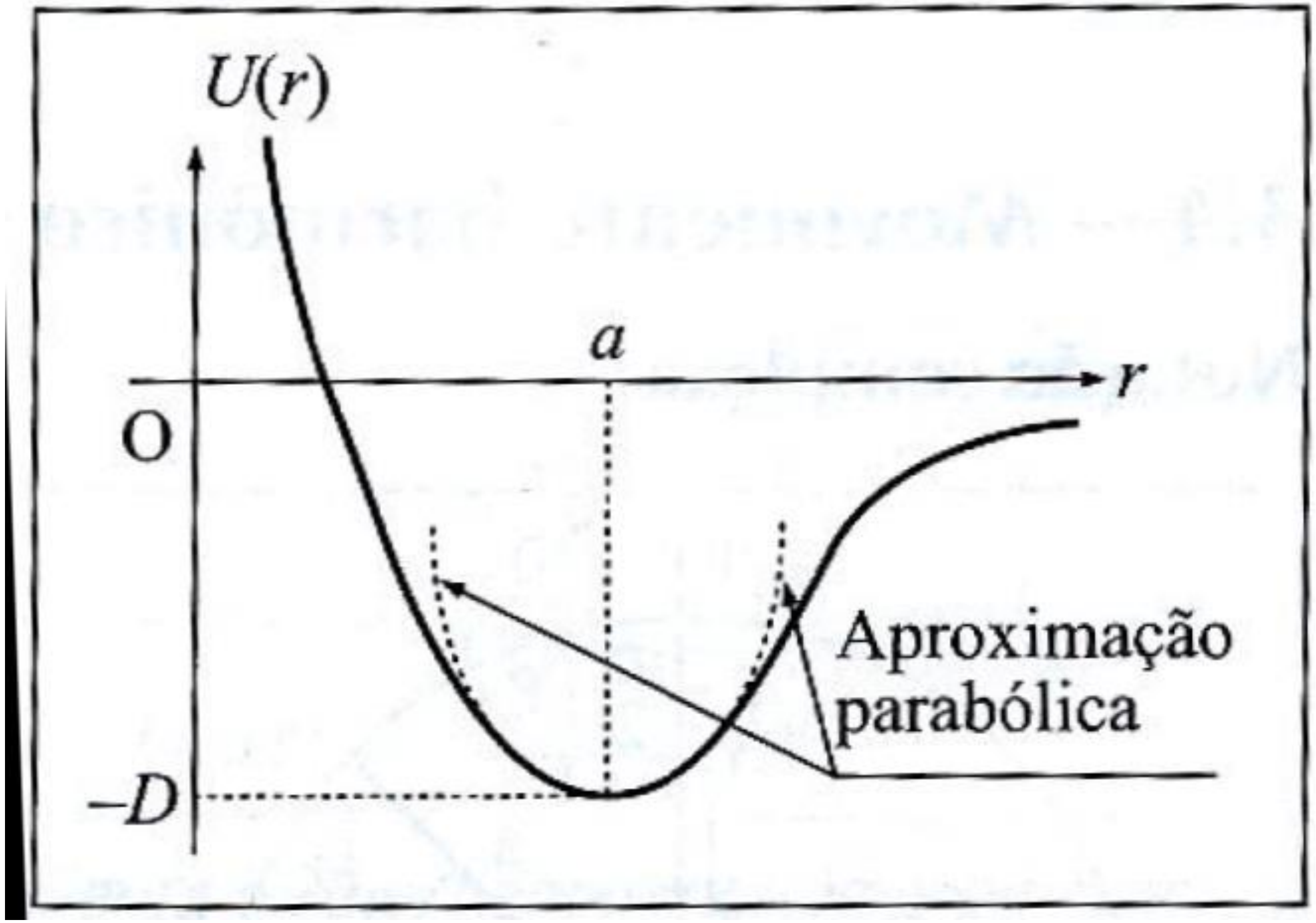
Para pequenos deslocamentos da posição $r=a$ de equilíbrio estável, definido por:

$$\boxed{x = r - a}$$

Podemos aproximar U(r)=U(x+a) por uma parábola:

$$U(r) = -D + \frac{1}{2}k\overbrace{(r-a)^2}^{x^2} \longrightarrow k = \left(\frac{d^2U}{d^2r}\right)_{r=a}$$

$$\boxed{\left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_{r=a} = \frac{12D}{a^2}\left[13\left(\frac{a}{r}\right)^{14} - 7\left(\frac{a}{r}\right)^{8}\right]_{r=a} = \frac{72D}{a^2}} \longrightarrow \boxed{k = \frac{72D}{a^2}}$$


U(r)
a
r
O
Aproximação
parabólica
−D

Molécula de CO:

μ=1,16×10^{-26} Kg, a=1,1×10^{-10} m, D=1,6×10^{-18} J

$$\boxed{k = \frac{72D}{a^2} = 9{,}5\times10^{3}\ \mathrm{N/m}}$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = 1{,}4\times10^{-14}\ \mathrm{s}^{-1}}$$

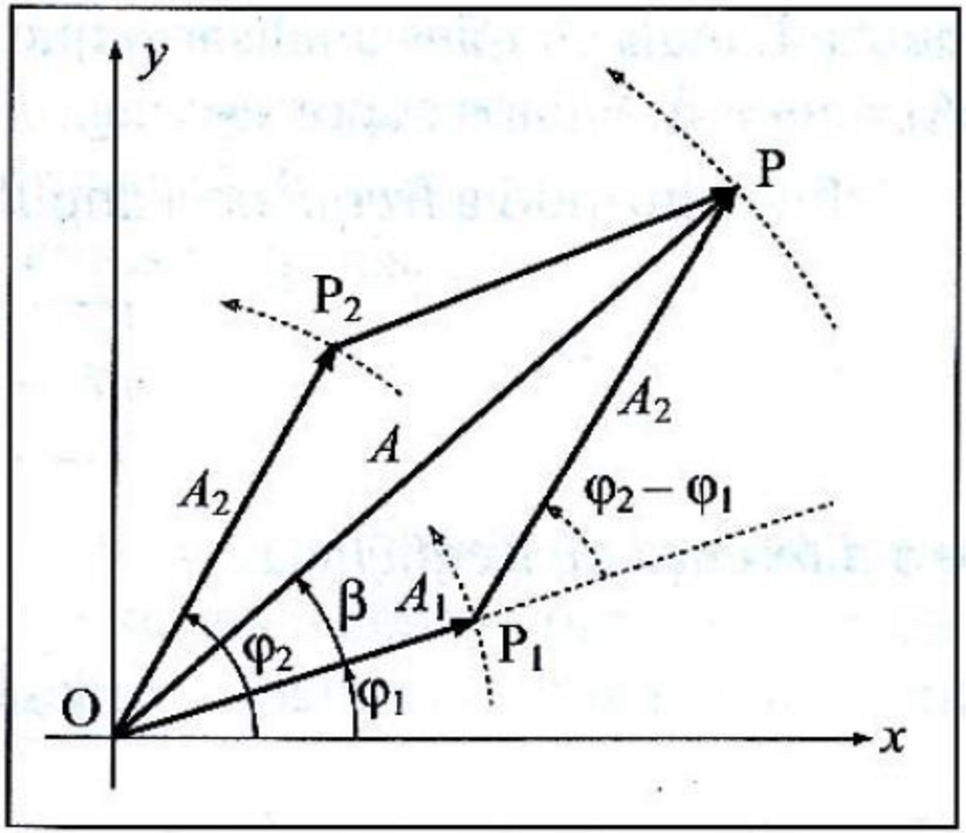
$$\boxed{\lambda = \frac{c}{\mu} = 2\times10^{-6}\ \mathrm{m}}$$

$$\boxed{\lambda = 4{,}7\times10^{-6}\ \mathrm{m}}$$

Valor experimental

Superposição de movimentos harmônicos simples

(a) Mesma direção e mesma frequência



$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

O mov. Resultante é:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1 + \beta)$$

Onde:

$$\frac{A_2}{\sin\beta} = \frac{A}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\sin\beta = \frac{A_2}{A}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Superposição de movimentos harmônicos simples

(b) Diferentes frequências e mesma direção

$$n_1\tau_1 = n_2\tau_2 \Longrightarrow$$ Função periódica

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{2} \Longrightarrow$$ Mov. não é periódico

$$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t) \qquad x_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$$

Usando as novas variáveis:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \qquad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$x(t) = A\left\{\cos\left(\bar{\omega}t + \frac{\Delta\omega}{2}t\right) + \cos\left(\bar{\omega}t - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right\}$$

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)\cos(\bar{\omega}t)$$

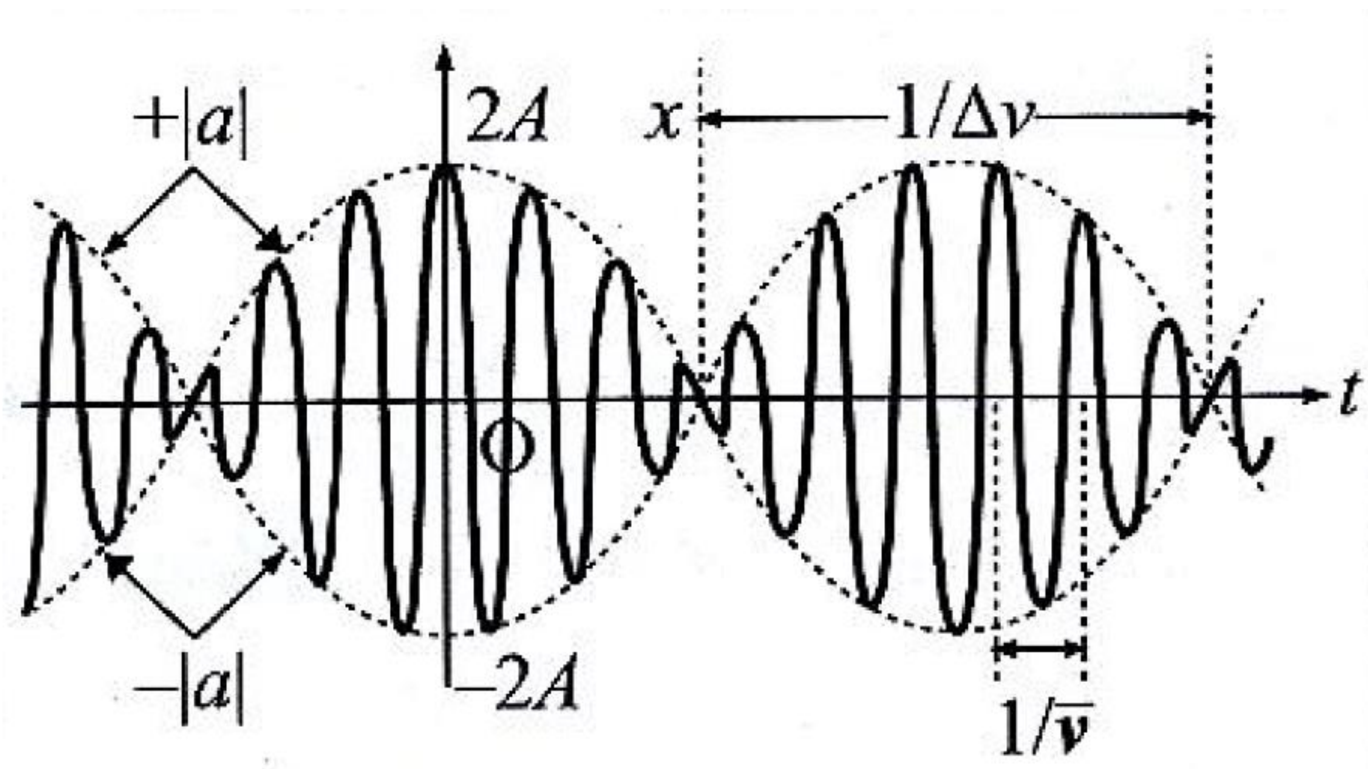
$\boxed{\text{(b) Diferentes frequências e mesma direção}}$

Quando $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$

$\cos(\bar{\omega}t)$ oscila rapidamente em relação a:

$$\boxed{a(t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}$$

Batimento



Superposição de movimentos harmônicos simples

(c) Mesma frequência e direções perpendiculares

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = -k\,\boldsymbol{r}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega^2\,\boldsymbol{r} = 0 \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

onde $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j}$

$$\left(\ddot{x} + \omega^2 x\right)\boldsymbol{i} + \left(\ddot{y} + \omega^2 y\right)\boldsymbol{j} = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \ddot{y} + \omega^2 x = 0$$

O que dá: $x(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi_1\right)$

$$y(t) = B\cos\left(\omega t + \varphi_2\right)$$

(c) Mesma frequência e direções perpendiculares

Podemos escolher a origem dos tempos de modo que $\varphi_1=0$

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$ $$y(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$$

Podemos escrever: $$\frac{y}{B} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t)\cos\varphi\text{-}\sin(\omega t)\sin\varphi$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} cos\,\varphi \pm sin\,\varphi\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

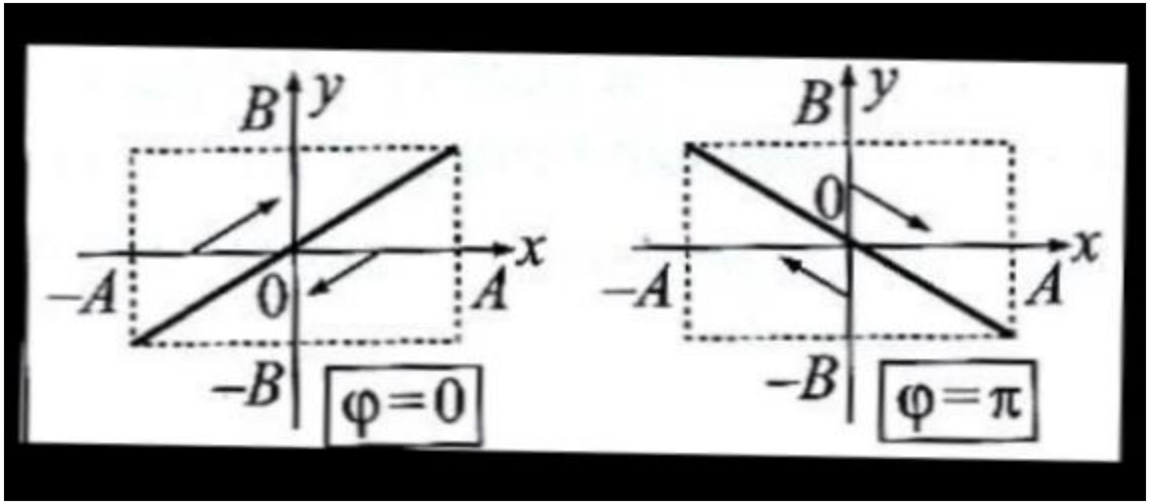
Elevando ao quadrado: $$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB} cos\,\varphi = sin^2\,\varphi$$ Equação de uma elipse

(c) Mesma frequência e direções perpendiculares

Casos particulares

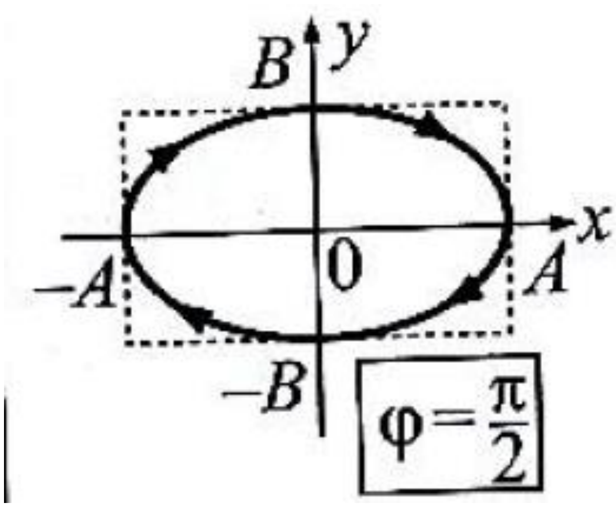
$\boxed{\varphi = 0}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{y}{x} = \frac{B}{A}}$

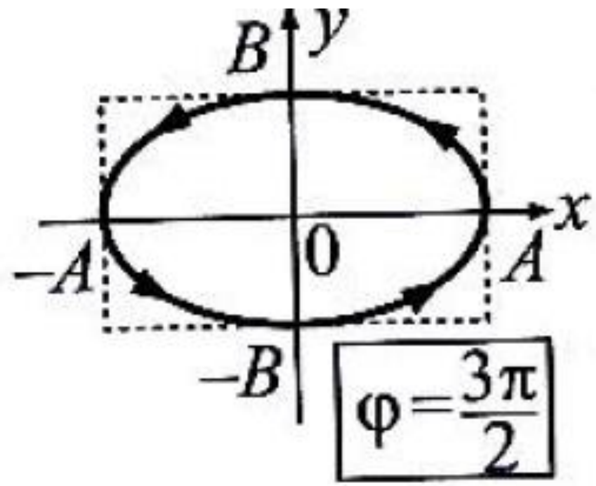
$\boxed{\varphi = \pi}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{y}{x} = -\frac{B}{A}}$



(c) Mesma frequência e direções perpendiculares

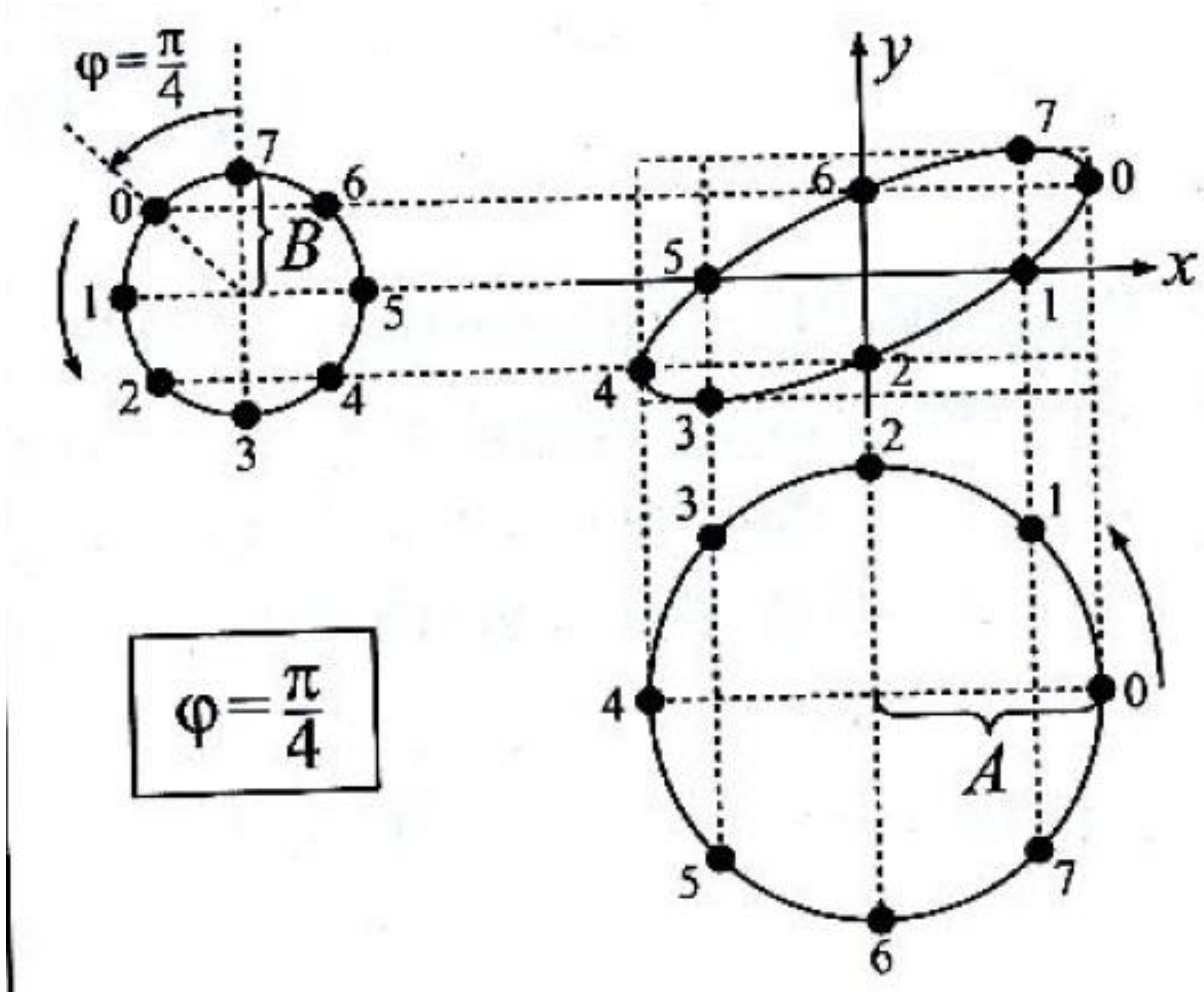
Casos particulares $\begin{cases} \boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{2}} \\[2ex] \boxed{\varphi = \dfrac{3\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1}$





(c) Mesma frequência e direções perpendiculares

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$



(d) Frequências diferentes e direções perpendiculares.

Curvas de Lissajous