Oscilador Harmônico

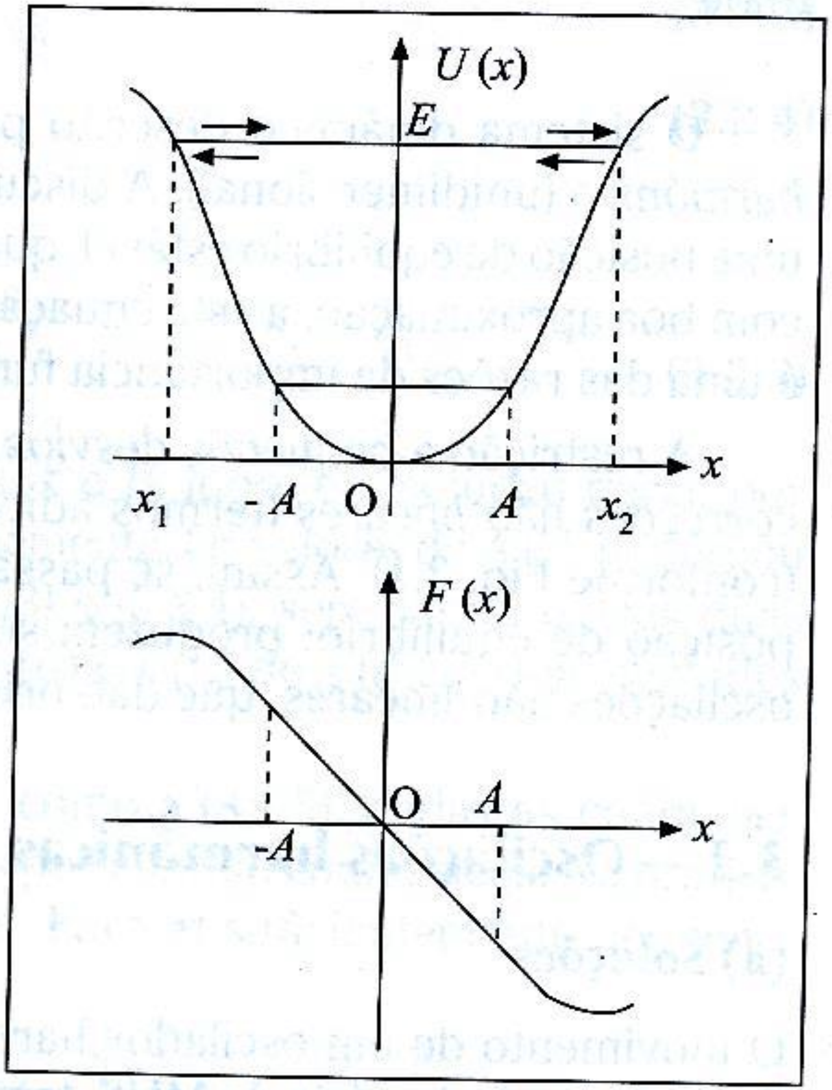


Figura 3.1 — *Energia potencial U e força F num movimento oscilatório*

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Para pequenos desvios da posição de equilíbrio estável:

$$\boxed{F(x) = -kx}$$

Exemplo: Uma massa *m* suspensa verticalmente por uma mola.

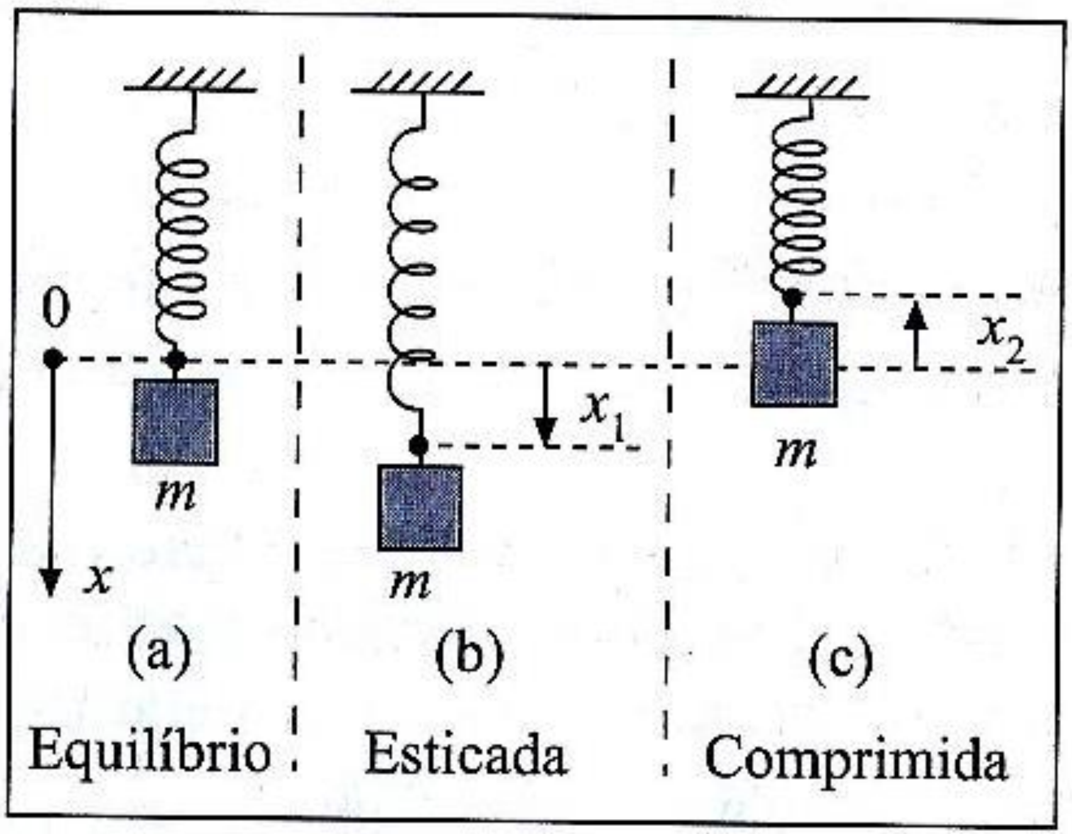


Figura 3.2 — *Massa e mola*

Oscilador Harmônico

$$m\ddot{x} = F(x) = -kx$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

Onde: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Oscilador Harmônico

(a) Soluções

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \begin{cases} x_1(t) = \cos(\omega t) \\ x_2(t) = \sin(\omega t) \end{cases}$$

Comparando com: $$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx = F$$

B=F=0 Equação diferencial Linear de 2ª ordem homogênea

(b) Linearidade e Princípio da superposição

(i) Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções, então $\boxed{x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)}$, também é solução.

$$\boxed{x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)}$$

ou

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

Onde: $\boxed{a = A\cos\varphi \ , \qquad b = -A\sin\varphi}$

Demonstração: $\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi$

$$\boxed{x(t) = A\cos\varphi\cos(\omega t) - A\sin\varphi\sin(\omega t)}$$

Inversamente, dados a e b, podemos obter A e φ, através:

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \sin\varphi = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array}}$$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

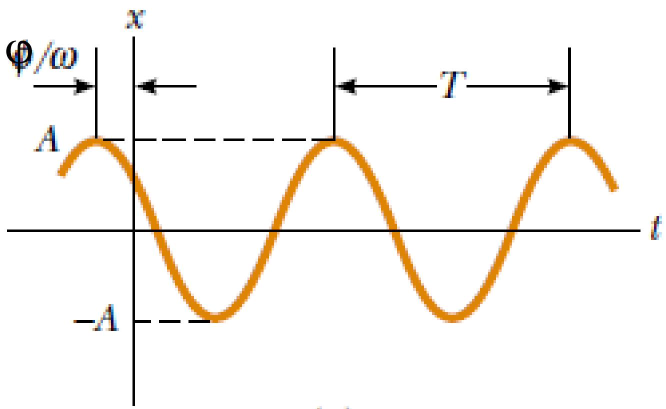
(c) Interpretação física dos parâmetros:

$A \longrightarrow$ Amplitude de oscilação

$$\boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}}$$

$\boxed{\theta = \omega t + \varphi}$ $\longrightarrow$ fase

φ é a constante de fase



(a)

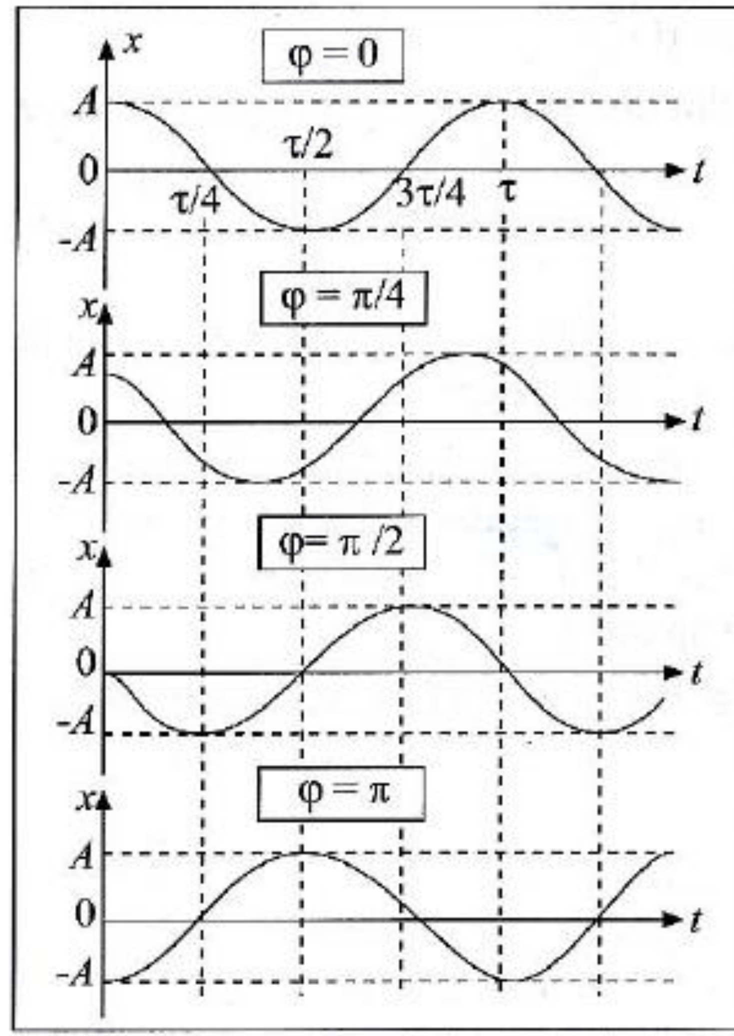


Figura 3.4 — Variação da fase inicial

(d) Ajuste das condições iniciais

$$x(0) = x_0 \;, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = v_0$$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$x(0) = A\cos\varphi = x_0$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = -\omega A\sin\varphi = v_0$$

$$x(t) = A\cos\varphi\cos(\omega t) - A\sin\varphi\sin(\omega t)$$

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$$

ou

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)} \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \cos\varphi &= \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}} \end{aligned} \right.$$

Como $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$

$$\boxed{v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=\omega A\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$$

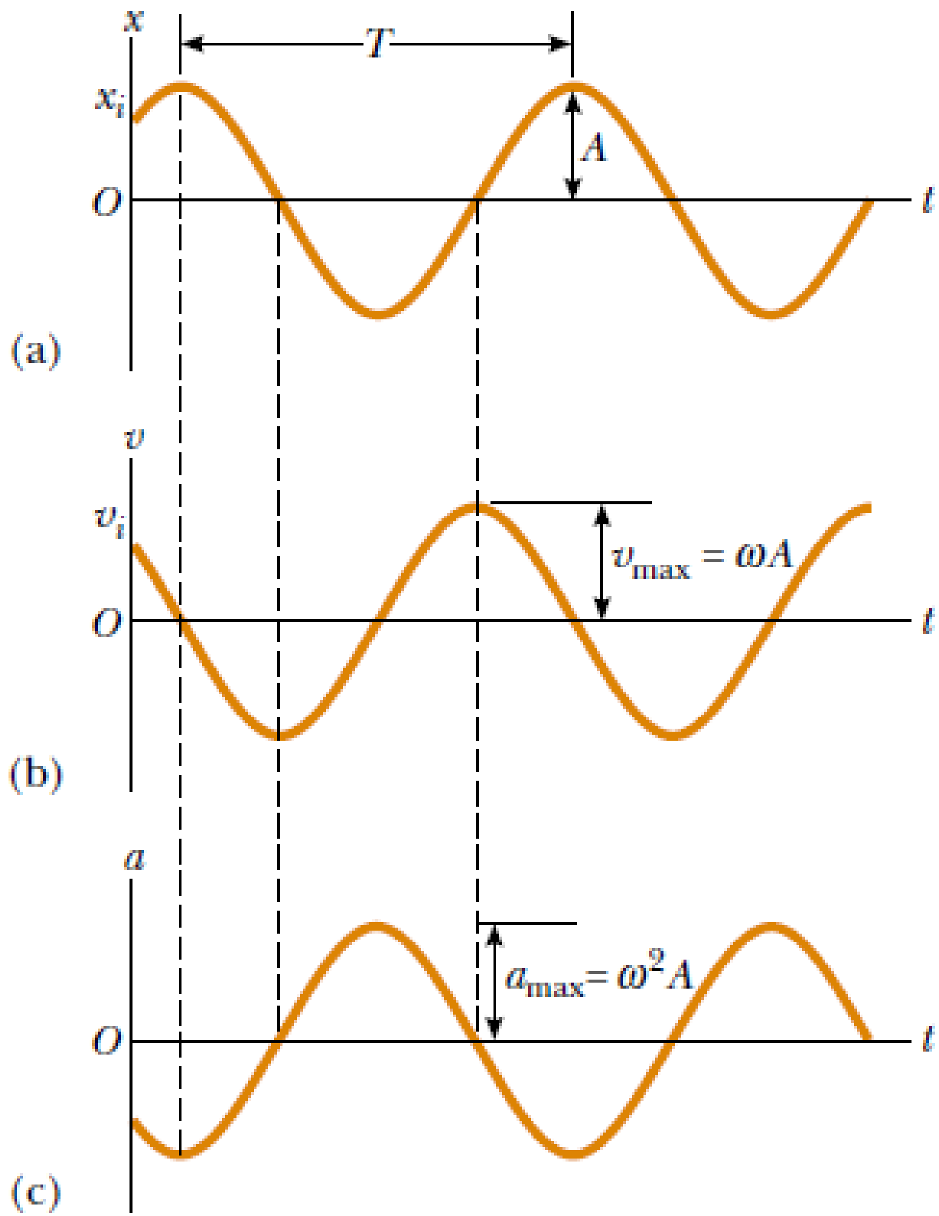
$\Downarrow$

v(t) adiantada de π/2 em relação ao deslocamento (quadratura).

$$\boxed{a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)}$$

$\Downarrow$

a(t) adiantada de π em relação ao deslocamento.


x
T
x_i
A
O
t
(a)
v
v_i
$v_{max} = \omega A$
O
t
(b)
a
$a_{max} = \omega^2 A$
O
t
(c)

(e) Energia do oscilador

$$T(t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$ → Energia Cinética

$$U(t) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$ → Energia Potencial

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \textbf{constante}$$

Definição: $$\overline{f} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$$

$$\overline{T} = \overline{U} = \frac{E}{2} = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2$$

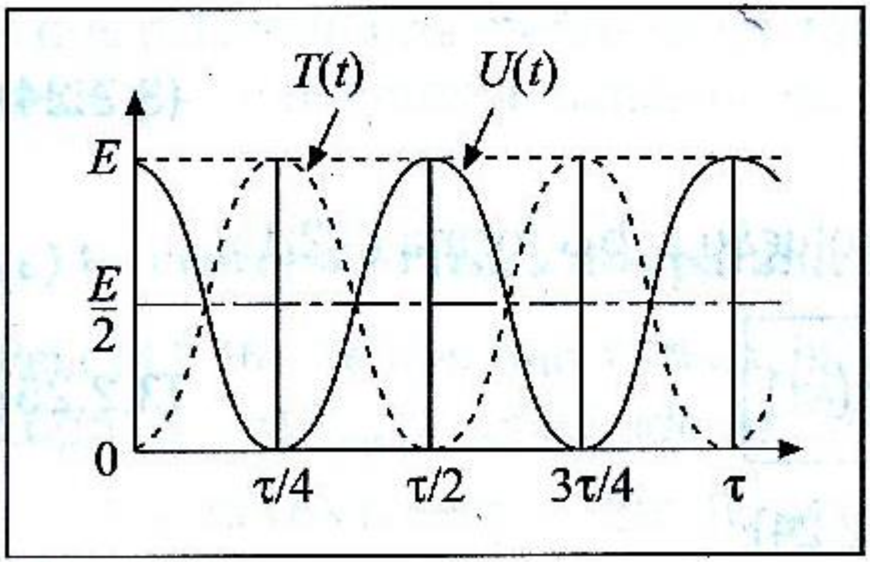


Figura 3.6 Valores médios de T e U

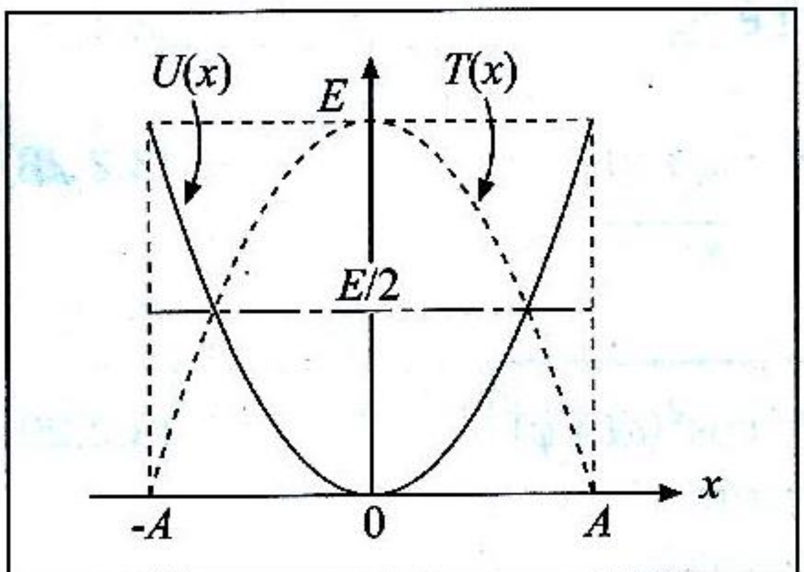
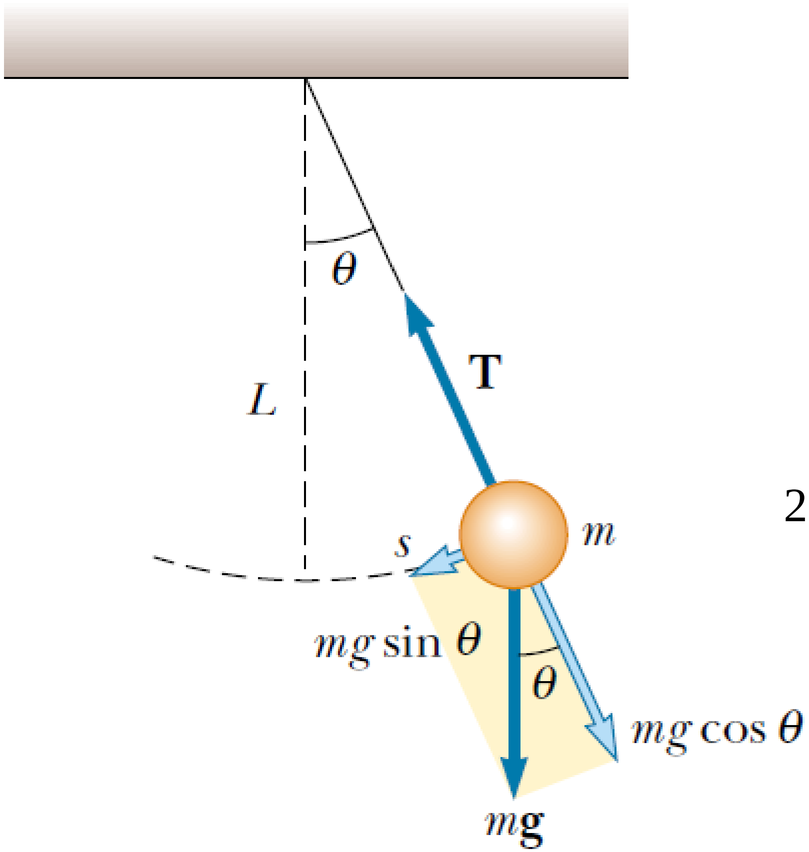


Figura 3.7 — U e T em função de x

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = E - U(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(A^2 - x^2 \right)}$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}}$$

Exemplos: (a) Pêndulo simples



$$\boxed{\sum F_t = -mg\sin\theta = m\frac{d^2 s}{dt^2}}$$

$$s = L\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta}$$

Para $\theta << 1, \quad \sin\theta \simeq \theta$

2π

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

$$\boxed{\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \varphi)}$$

Na direção radial

$$\boxed{F_r = ma_r = \frac{-mv^2}{L} = -\frac{m\omega^2 L^2}{L} = -mL\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T}$$

Energia Cinética do pêndulo: $\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$

Energia Potencial do pêndulo: $U = -W_{0\to\theta} = mg\int_0^\theta \sin\theta' \cdot l d\theta' = \left[-mg\cos\theta\right]\Big|_0^\theta$

$$\boxed{U = mg\left(1-\cos\theta\right)}$$

Para $\theta << 1$, $\boxed{U = mg\int_0^\theta L\theta' d\theta' = mgL\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{`0}^{\theta} = \frac{1}{2}m\omega^2 L^2\theta^2}$

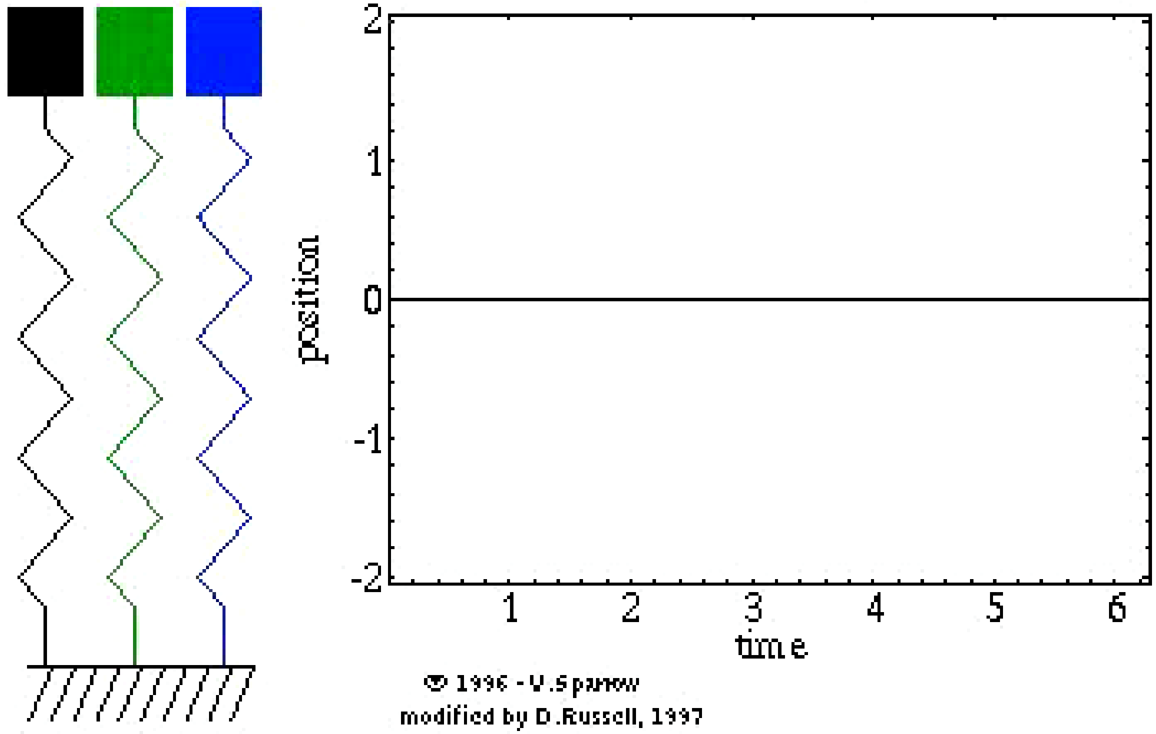
(*)**2.** Depois de pousar em um planeta desconhecido, uma exploradora do espaço constrói um pêndulo simples de 50,0 cm de comprimento. Ela verifica que o pêndulo simples executa 100 oscilações completas em 136 s. Qual o valor de g nesse planeta?

$$\boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}}$$

$$\boxed{g = 4\pi^2 f^2 L = 4\pi^2 \left(\frac{100}{136}\right)^2 0{,}500}$$

$$\boxed{g = 10{,}7\,\mathrm{m/s^2}}$$


2
1
0
-1
-2
position
1
2
3
4
5
6
time
© 1996 - V.Sparrow
modified by D.Russell, 1997