1a questão (2,5pts):

Partindo do valor esperado para o número de partículas, determine o potencial químico para um gás bidimensional de bósons livres e mostre que não há condensação de Bose-Einstein neste caso.

2a questão (2,5pts) O modelo de Potts unidimensional com condições periódicas de contorno é dado pelo Hamiltoniano

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i, s_{i+1}}$$

onde o spin de cada sítio toma q valores $(s_i = 1, \cdots, q)$. Usando o formalismo da matriz de transferência determine a energia livre por partícula no **limite termodinâmico**.

3a questão (4.5pts): Quando um parâmetro de ordem m vai a zero descontinuamente, a transição de fase é dita sendo de primeira ordem. Um exemplo comum ocorre em sistemas onde considerações de simetria não excluem um termo cúbico na energia livre de Landau, como em

$$\beta \mathcal{H} = \int d^d \mathbf{x} \left[\frac{K}{2} (\nabla m)^2 + \frac{t}{2} m^2 + c m^3 + u m^4 \right] \qquad (K, c, u > 0).$$

a) Através da análise gráfica da densidade de energia para diferentes valores de t, mostre que à medida que o parâmetro t é reduzido, observa-se uma descontinuidade no valor de m para o qual a energia livre é um mínimo global.
b) Determine $\bar{m}$ e $\bar{t}$ em função de u e c para o ponto da transição.

Através de um parâmetro adicional, uma transição de fase de segunda ordem pode ser feita de primeira ordem. O ponto que separa os dois tipos de transição é conhecido como um ponto tricrítico e pode ser estudado examinando-se o Hamiltoniano de Ginzburg-Landau

$$\beta \mathcal{H} = \int d^d \mathbf{x} \left[\frac{K}{2} (\nabla m)^2 + \frac{t}{2} m^2 + u m^4 + v m^6 - h m \right],$$

onde u pode ser positivo ou negativo. Para u < 0, é necessário que v > 0 para garantir a estabilidade.

c) Mostre que existe um transição de fase de primeira ordem para u < 0 e h = 0.
d) Determine o valor de $\bar{t}$ para esta transição. Considerando h = 0 e v > 0, faça o gráfico da linha de transição de fase no plano (u,t), identificando as fases e a ordem das transições.
e) O ponto u = t = 0, que separa as linhas transição de primeira e segunda ordem, é o ponto crítico. Para u = 0, calcule os expoentes tricríticos β, δ, γ e α governando as singularidades na magnetização, suscetibilidade e calor específico. (Lembre-se que: $C \propto t^{-\alpha}$ $\bar{m}(h=0) \propto t^{\beta}; \chi \propto t^{-\gamma}; \bar{m}(h=0) \propto h^{1/\delta}$).

4a questão (1.5pts). Discuta as abordagens de campo médio de Curie-Weiss e Bragg-Williams.

Relações que lhes podem ser úteis:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{(x-b)}-1} = -\ln(1-e^b)$$

Autovalores de uma matriz q x q onde todos os elementos fora da diagonal são 1 e os da diagonal são A: 1 autovalor (A + q -1) e q-1 autovalores degenerados dados por A - 1

$$\begin{bmatrix} A & 1 & \dots & 1 \\ 1 & A & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & A \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= A + q - 1 \\ \lambda_{2,\cdots,q} &= A - 1 \end{aligned}$$

$$C \sim \left.\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\right|_{h=0,\overline{m}} \qquad \chi = \left.\frac{\partial \overline{m}}{\partial h}\right|_{h=0}$$