Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo

Testes de Comparações Múltiplas

Professora Renata Alcarde Sermarini

Piracicaba
Agosto 2016

ANOVA

Exemplo

Os dados da Tabela 1 referem-se à produtividade de milho (Kg/100m^2) de quatro variedades diferentes, em um experimento instalado segundo o delineamento inteiramente casualizado (DIC).

Tabela: Produtividade de milho (kg/100m^2)

A	B	C	D
25	31	22	33
26	25	26	29
20	28	28	31
23	27	25	34
21	24	29	28

Exemplo

H$_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
H$_1$: pelo menos duas médias diferem entre si

```
Analysis of Variance Table

Response: y
          Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
trat       3 163.75  54.583  7.7976 0.001976 **
Residuals 16 112.00   7.000
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Métodos de Comparações Múltiplas

- Técnicas para comparação de médias
  - duas a duas
  - média de cada tratamento com a média de um controle
  - contrastes

Classificação

Teste **Protegido**: realizado somente mediante rejeição de H_0 para o teste F (ANOVA)

Teste **não protegido**: realizado independentemente do resultado para o teste F (ANOVA).

Contrastes

Definição

Combinação linear das médias,

$$Y = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_I\mu_I,$$

tal que,

$$\sum_{i=1}^{I} a_i = 0,$$

para o caso em que todos os tratamentos apresentam o mesmo número de repetições J.

Contrastes

São exemplos de contrastes:

- $Y_1 = \mu_1 - \mu_2$
- $Y_2 = 2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3$
- $Y_3 = \mu_3 - \mu_4$

Estimativa do Contraste

$$Y = \mu_1 - \mu_2 \Rightarrow \hat{Y} = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$$

Interpretação:

- Se $\hat{Y} > 0 \;\Rightarrow\;$ média do grupo "+" superior;
- Se $\hat{Y} < 0 \;\Rightarrow\;$ média do grupo "-" superior.

Comparação de duas médias

Hipóteses do tipo

$H_0 : \mu_i - \mu_{i'} = 0 \qquad vs \qquad H_1 : \mu_i - \mu_{i'} \neq 0$

Modelo

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij} = \mu_i + e_{ij},$$

em que $e_{ij} \sim iidN(0, \sigma^2)$.

Seja o contraste $Y = \mu_i - \mu_{i'}$, então:

$$\hat{Y} = \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_{i'}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\hat{Y}) &= \mu_i - \mu_{i'} \\ \mathrm{Var}(\hat{Y}) &= \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)\sigma^2 \end{aligned}$$

Teste t-Student

Hipóteses do tipo

$H_0 : \mu_i - \mu_{i'} = 0 \qquad vs \qquad H_1 : \mu_i - \mu_{i'} \neq 0$

Estatística

$$t = \frac{\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_{i'} - 0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)\hat{\sigma}^2}}$$

.

Rejeita-se H_0 se $|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_{i'}| \geq t_{(\alpha/2,\nu)}\sqrt{\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)\hat{\sigma}^2}$, em que ν corresponde ao número de graus de liberdade do resíduo.

Teste t-Student

Para o exemplo de produtividade de milho:

Hipóteses

$H_0 : \mu_i - \mu_{i'} = 0 \qquad vs \qquad H_1 : \mu_i - \mu_{i'} \neq 0$

Valores absolutos das diferenças observadas

	$\hat{\mu}_B$	$\hat{\mu}_C$	$\hat{\mu}_D$
$\hat{\mu}_A$	4	3	8
$\hat{\mu}_B$	-	1	4
$\hat{\mu}_C$	-	-	5

Diferença mínima significativa

$$d.m.s. = t(\alpha/2, glRes)\sqrt{\frac{2 \times QMRes}{J}} = 2,12\sqrt{\frac{2 \times 7,00}{5}} = 3,55$$

Teste t-Student

Para o exemplo de produtividade de milho:

Valores absolutos das diferenças observadas

	$\hat{\mu}_B$	$\hat{\mu}_C$	$\hat{\mu}_D$
$\hat{\mu}_A$	4^*	3	8^*
$\hat{\mu}_B$	-	1	4^*
$\hat{\mu}_C$	-	-	5^*

Diferença mínima significativa

$$d.m.s. = t(\alpha/2, glRes)\sqrt{\frac{2 \times QMRes}{J}} = 2,12\sqrt{\frac{2 \times 7,00}{5}} = 3,55$$

Teste t-Student

Problemas

Suponha que sejam 10 os tratamentos em análise.

- Quantas seriam as comparações duas a duas?
- Supondo o nível de significância 0,05 para cada comparação, qual será o nível de significância conjunto, assumindo que as comparações sejam independentes?

Nível de significância

Controle da taxa de erro tipo I

- **Nível de significância por comparação** (*comparisonwise*): controla a taxa de erro tipo I por comparação.
- **Nível de significância por experimento** (*experimentwise*): controla a taxa de erro tipo I considerando todo o conjunto de comparações.

Teste t-Student

Pode-se controlar a taxa de erro máxima por experimento usando a taxa de erro por comparação dada por α/c, em que c corresponde ao número de comparações de duas médias (correção de Bonferroni).

Teste t-Student

Para o exemplo de produtividade de milho com a correção de Bonferroni:

Valores absolutos das diferenças observadas

	$\hat{\mu}_B$	$\hat{\mu}_C$	$\hat{\mu}_D$
$\hat{\mu}_A$	4	3	8^*
$\hat{\mu}_B$	-	1	4
$\hat{\mu}_C$	-	-	5

Diferença mínima significativa

$$d.m.s. = t((0,05/6)/2, glRes)\sqrt{\frac{2 \times QMRes}{J}} = 3,01\sqrt{\frac{2 \times 7,00}{5}} = 5,03$$

Teste de Tukey

Hipóteses do tipo

$H_0 : \mu_i - \mu_{i'} = 0 \qquad vs \qquad H_1 : \mu_i - \mu_{i'} \neq 0$

- Teste baseado na amplitude total estudentizada de I variáveis aleatórias normais independentes;
- Controla a taxa máxima de erro tipo I por experimento.

Rejeita-se H_0 se

$$|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_{i'}| \geq \Delta,$$

em que $\Delta = q_{(\alpha, I, glRes)} \sqrt{\dfrac{\hat{\text{Var}}(\hat{Y})}{2}} = q_{(\alpha, I, glRes)} \sqrt{\left(\dfrac{1}{n_i} + \dfrac{1}{n_{i'}}\right) \dfrac{QMRes}{2}}$.

Se $n_i = n_{i'} = J$, então $\Delta = q_{(\alpha, I, glRes)} \sqrt{\dfrac{QMRes}{J}}$

Teste de Duncan

Hipóteses do tipo

$H_0 : \mu_i - \mu_{i'} = 0 \qquad vs \qquad H_1 : \mu_i - \mu_{i'} \neq 0$

- Teste realizado em múltiplos estágios;
- Recomendado para o caso balanceado (mesmo número de repetições por tratamento);
- Também é baseado na amplitude total estudentizada;
- Controla a taxa de erro tipo I por comparação (teste menos rigoroso que o teste de Tukey, ou seja, pode rejeitar H_0 com maior facilidade).

Rejeita-se H_0 se

$$|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_{i'}| \geq D_i,$$

em que $D_i = z_{(\alpha,k,glRes)}\sqrt{\frac{QMRes}{J}}$ e k é o número de médias envolvidas.

Teste de Dunnett

Hipóteses do tipo

$H_0 : \mu_i - \mu_c = 0 \qquad vs \qquad H_1 : \mu_i - \mu_c \neq 0$

- Compara duas médias de tratamentos, sendo uma dela a média de um tratamento referência (controle);
- Controla a taxa máxima de erro tipo I, não excedendo α.

Rejeita-se H_0 se

$$|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_c| \geq d_{(\alpha, I-1, glRes)} \sqrt{\frac{2 \times QMRes}{J}}$$

.

Teste de Scheffé

Hipóteses do tipo

$H_0 : Y = \sum_{i=1}^{I} a_i \mu_i = 0 \qquad vs \qquad H_1 : Y = \sum_{i=1}^{I} a_i \mu_i \neq 0$

- Contrastes podem envolver mais do que duas médias de tratamentos;
- Teste protegido;
- Controla a taxa máxima de erro tipo I por experimento para qualquer conjunto de contrastes.

Rejeita-se H_0 se

$$|\hat{Y}| \geq \sqrt{QMRes \sum_{i=1}^{I} \frac{a_i^2}{n_i}} \times \sqrt{(I-1)F_{(\alpha, I-1, glRes)}}$$

.

Contrastes Ortogonais

Definição

Dois contrastes, Y_1 e Y_2,

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_I\mu_I \\ Y_2 &= b_1\mu_1 + b_2\mu_2 + \ldots + b_I\mu_I \end{aligned}$$

são ditos ortogonais se $\sum_{i=1}^{I} a_i b_i = 0$, desde que todos os tratamentos apresentem os mesmo número de repetições.

Contrastes Ortogonais

Exemplo:

Considere os contrastes Y_1, Y_2 e Y_3, dados por:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \mu_1 - \mu_2 \\
Y_2 &= 2\mu_2 - \mu_3 - \mu_4 \\
Y_3 &= \mu_3 - \mu_4
\end{aligned}$$

Verificar quais são ortogonais.

Teste t e F para Contrastes Ortogonais

Observações:

- Os testes t e F para contrastes ortogonais são equivalentes;
- Teste F: apresentação da decomposição do número de graus de liberdade de tratamentos em um grau de liberdade associado a cada contraste;
- Os contrastes devem ser estabelecidos antes da realização da análise.

Teste t e F para Contrastes Ortogonais

Exemplo

Suponha um experimento instalado para avaliar a eficiência de fungicidas na produção de batatas. Foram utilizados quatro fungicidas + controle (sem aplicação de fungicida), sendo que os dois primeiros usam um modo de ação (modo A) e os dois últimos fungicidas outro modo de ação (modo B).