Instituto de Física

Teoria – Experiência de Linhas de Transmissão

Objetivos

- Medir a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética numa linha de transmissão constituída por um cabo coaxial;
- Estudar os efeitos da impedância de terminação numa linha de transmissão constituída por um cabo coaxial;

Introdução

Nesta experiência vamos estudar os aspectos da propagação de ondas eletromagnéticas numa linha de transmissão constituída de um cabo coaxial, incluindo a determinação da velocidade de propagação, efeitos de impedância e efeitos associados à terminação da linha. Introduziremos o tema, determinando os efeitos da propagação de uma onda em uma corda. Dado que estes efeitos são propriedades de todos os *fenômenos ondulatórios*, eles também estarão presentes em ondas eletromagnéticas.

Onda numa corda

A equação diferencial que rege a propagação de uma onda transversal em uma corda tem expressão:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0$$

onde v é a velocidade de propagação da onda nesse meio e está associada a T, força que tensiona a corda, e ρ, sua densidade linear, dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Uma das soluções para essa equação é a função de onda

$$y(x,t) = y_0 sen(kx - wt)$$

onde y_0 é a amplitude da onda, $k=2\pi/\lambda$ é o número de onda e $\omega=2\pi f$ representa a frequência angular.

A relação entre a velocidade de propagação da onda, a freqüência e o comprimento de onda é dada por:

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{\kappa}$$

Quando uma onda, ao propagar-se, encontra um obstáculo em seu caminho, ela sofre reflexão. No caso de uma corda, por exemplo, o comportamento do pulso de onda ao longo de seu caminho varia segundo o tipo de obstáculo que ele encontra. Se a extremidade da corda está fixa à uma parede (Fig. 1), o pulso de onda refletido mantém todas as suas características iniciais, porém sofre uma inversão de fase de π *rad*.

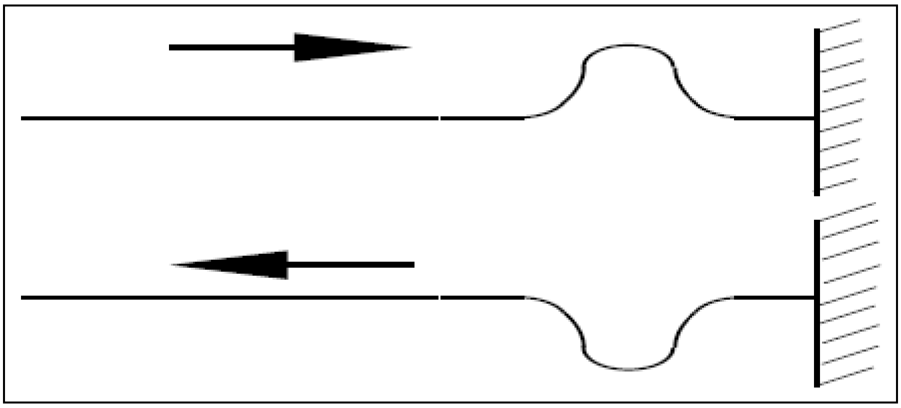


Figura 1 Um pulso que se propaga numa corda que tem a extremidade presa retorna *com fase invertida*. Esta condição decorre do fato que é proibido o movimento para aquele ponto da corda

Se a extremidade da corda puder se mover (Fig. 2), então nenhuma alteração é observada na fase do pulso refletido com relação ao pulso incidente, a não ser pela mudança no sentido de propagação da onda.

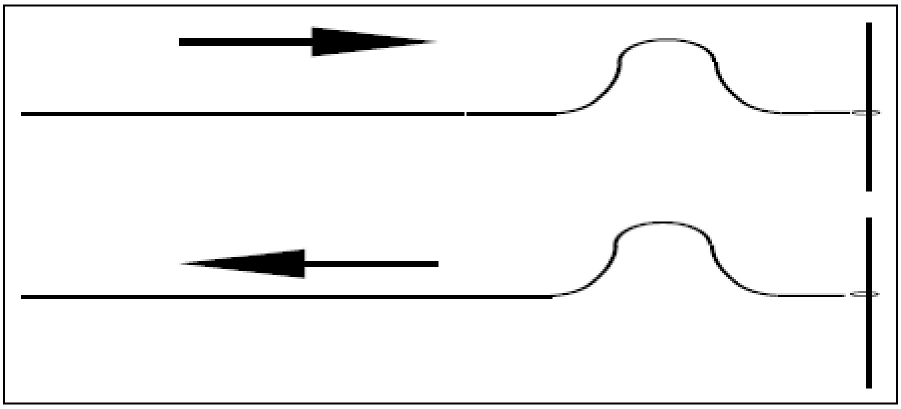


Figura 2 Um pulso se propaga numa corda que tem a extremidade livre retorna *com a mesma fase*. Isto acontece porque a extremidade livre irá deslocar-se duas vezes a amplitude do pulso incidente.

Uma situação intermediária, na qual a extremidade da corda não se encontra rigidamente presa e nem é mantida completamente livre, corresponde ao caso em que duas cordas diferentes encontram-se unidas. A Fig. 3 ilustra a situação em que cordas de diferentes densidades estão unidas. Um pulso de onda percorrendo uma corda de *menor densidade de massa*, ao atingir o ponto de união com uma corda de *maior densidade de massa*, é parte refletido *com inversão de fase* e é em parte transmitido. Porém, se o pulso de onda está inicialmente percorrendo a corda de maior densidade, o pulso refletido terá *a mesma fase*. O pulso transmitido sempre tem a mesma fase do pulso incidente, qualquer que seja o caso.

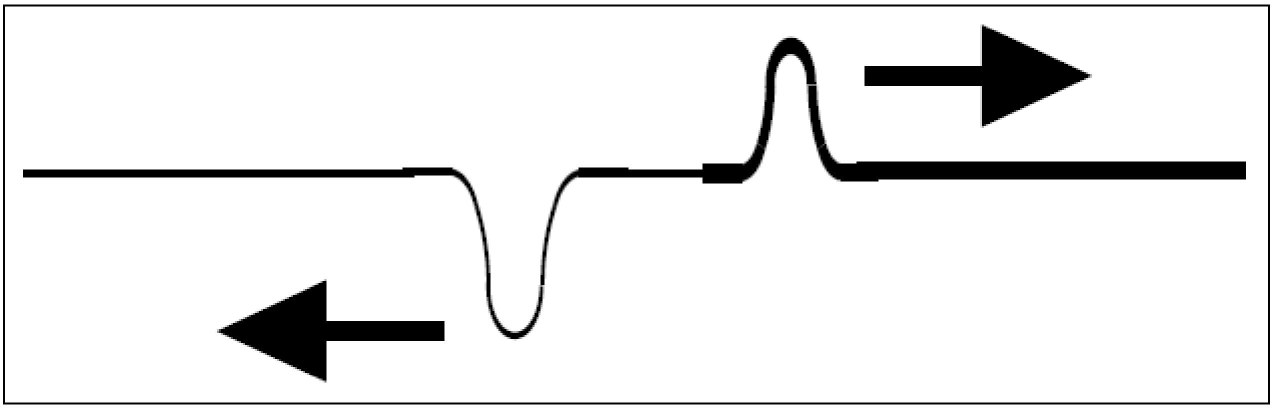
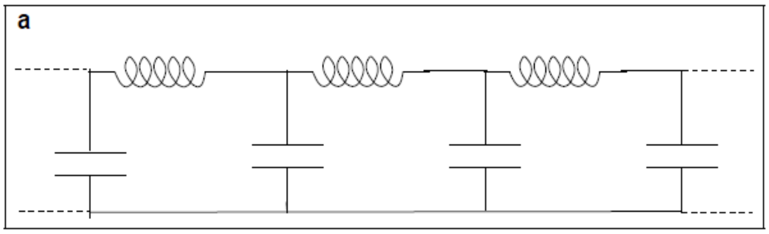


Figura 3 Sempre ocorre uma reflexão parcial para um pulso que se propaga em meios de densidades diferentes. Se o pulso se propaga de um meio de menor densidade, para outro de maior densidade, (situação ilustrada) o pulso refletido tem fase invertida. E tem mesma fase na situação inversa. Em qualquer dos casos, porém, o pulso transmitido tem a mesma fase do pulso incidente.

Com respeito às ondas eletromagnéticas, sendo conduzidas através de um cabo coaxial por exemplo, podemos verificar comportamentos semelhantes aos verificados acima. Certamente há um campo eletromagnético, mas frequentemente estamos preocupados com ondas de *tensão* e *corrente* na linha.

Em nosso estudo, ficaremos restritos ao caso de *uma linha de transmissão sem perdas*, que podemos representar por uma sucessão infinita de indutores e capacitores como sugere a Fig. 4-a.



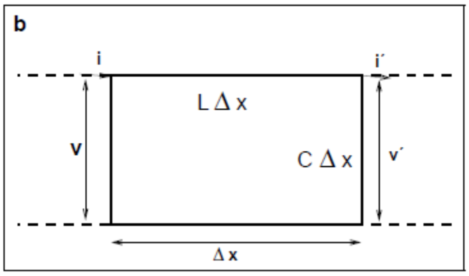


Figura 4 Para a dedução da equação de onda, imaginamos que uma linha de transmissão se comporta como uma distribuição contínua de capacitores e indutores (a), da qual isolamos uma célula elementar de extensão Δx com indutância LΔx e capacitância CΔx (b).

Podemos isolar uma célula elementar de extensão Δx, com indutância $L\Delta x$, e capacitância $C\Delta x$,onde L e C são, respectivamente, a indutância e a capacitância por unidade de comprimento da linha de transmissão.

Nesta célula há uma queda de tensão $(\partial V/\partial x)\Delta x$ provocada pela corrente variando na razão $\partial i/\partial t$ na indutância $L\Delta x$. Aplicando a lei das malhas ao circuito da Fig. 4-b obtemos:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x = (L\Delta x)\frac{\partial i}{\partial t},$$

O sinal – decorre do fato de que a tensão diminui com a distância x. De maneira análoga, a diferença de corrente entre os extremos da célula é dada pela corrente de deslocamento através do capacitor CΔx provocada pela tensão que varia na razão ∂V/∂t. A conversão da corrente implica:

$$-\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x = (C\Delta x)\frac{\partial V}{\partial t}$$

Dividindo lado a lado as equações anteriores por Δx obtemos:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t} \qquad e \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Podemos eliminar a corrente de ambas as equações tomando a derivada da primeira equação com relação a *x* e a derivada da segunda equação com relação a *t:*

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \qquad e \qquad -\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = C\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Como:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$$

Temos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

que é a equação de onda para uma linha de transmissão. A comparação com a equação de onda para a corda, mostra que a onda se propaga na linha de transmissão com velocidade dada por:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

onde L e C, são, respectivamente, a indutância por unidade de comprimento e a capacitância por unidade de comprimento da linha. Para um cabo coaxial, Fig. 5,

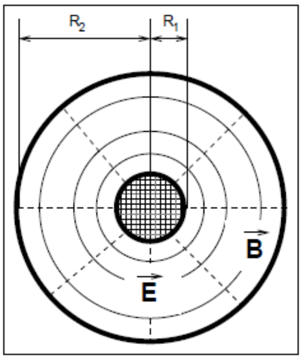


Figura 5 Um cabo coaxial é constituído de um condutor central de raio R_1 envolvido por uma malha metálica de raio R_2 que constitui o segundo condutor. Num cabo coaxial as linhas de força do campo elétrico são radiais e as linhas de campo magnético são circulares. Fazemos nossa análise, entretanto, para as tensões e correntes no cabo.

A indutância e a capacitância do cabo são dadas por:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} ln(R_2/R_1) \qquad e \qquad C = \frac{2\pi\epsilon}{ln(R_2/R_1)}$$

onde R_1 e R_2 são, respectivamente, o raio do condutor interno e o raio da malha externa; μ e ϵ são a permeabilidade magnética e a permissividade dielétrica do meio entre os condutores, respectivamente.

Como a equação de onda para o cabo coaxial e para uma onda em uma corda é matematicamente a mesma, uma solução possível para a equação de onda no cabo é mesma que para a onda na corda, e é dada por:

$$v(x,t) = V_0 sen(kx - \omega t).$$

Substituindo esta solução em uma das equações definidas pela lei das malhas, podemos obter a corrente:

$$I(x,t) = I_0 sen(kx - \omega t).$$

onde $I_0 = V_0/Z_0$ onde Z_0 é a impedância característica da linha, definida por:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Análise do efeito de carga de terminação na linha de transmissão

Seja uma linha de transmissão terminada por uma impedância Z_t com a aproximação de que se trata de uma carga puramente resistiva, Fig. 6-a. Imaginamos uma onda de tensão incidente, descrita por v^+, propagando-se da esquerda para direita, Fig. 6-b. Temos uma corrente associada a esta onda de tensão expressa por $i^+ = V^+/Z_0$, onde Z_0 é a impedância da linha de transmissão.

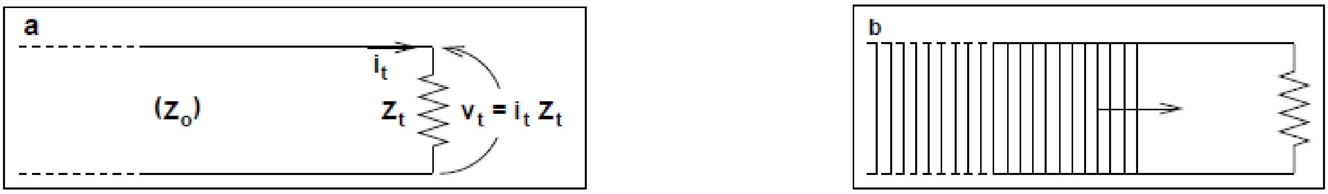


Figura 6 A linha de transmissão possui impedância Z_0 e está terminada por uma carga puramente resistiva Z_t. Obviamente a Lei de Ohm deve ser respeitada e devemos ter $V_t=i_tZ_t$, onde V_t e i_t são, respectivamente, a tensão e a corrente total nos extremos da carga.

No extremo da linha, devemos ter:

$$\frac{V_{total}}{i_{total}} = Z_t$$

onde Z_t é a impedância da carga, supostamente puramente resistiva. Chamando a tensão e corrente refletida V^- e i^-, a equação anterior torna-se:

$$\frac{V_t^+ + V_t^-}{i_t^+ + i_t^-} = \frac{V_t^+ + V_t^-}{\frac{V_t^+}{Z_t} - \frac{V_t^-}{Z_t}} = Z_t \;\rightarrow\; \frac{V_t^+ + V_t^-}{V_t^+ - V_t^-} = \frac{Z_t}{Z_0}$$

onde foi feita a substituição $i^-=-V^-/Z_0$.

Para estudarmos o efeito da impedância de terminação da linha, resolvemos a equação anterior para (V^-/V^+). Isso nos dá a expressão para o coeficiente de reflexão $K=(V^-/V^+)$, em função da impedância do cabo da impedância da terminação da linha:

$$k = \frac{V_t^-}{V_t^+} = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}$$

Fica claro aqui que vai existir um pulso refletido quando a impedância da carga da linha de transmissão for diferente da linha. Para uma linha aberta, $Z_t= \infty$ (K=1), observamos um pulso refletido com a mesma fase do pulso incidente; para uma linha em curto circuito, $Z_t= 0$ (K=-1), o pulso refletido terá a fase invertida. Chamamos de casamento de impedâncias, a escolha adequada da impedância de carga tal que $Z_t= Z_0$ (K=0), ou seja, não temos reflexão de pulsos.

Bibliografia

Transmissions Lines and Networks, Intl. St. Ed. Walter C. Johnson, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. 1950.