Física IV – Poli – Engenharia Elétrica: *7ª Aula* (26/08/2014)

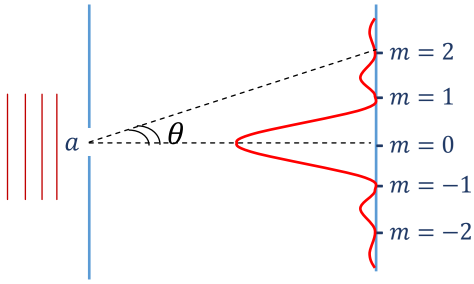
Prof. Alvaro Vannucci

Na última aula vimos:

- **Difração por *fenda única***: critério para que ocorra interferência destrutiva:

  $\boxed{a \sin\theta = m\lambda}$;

  $m = \cancel{0}, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

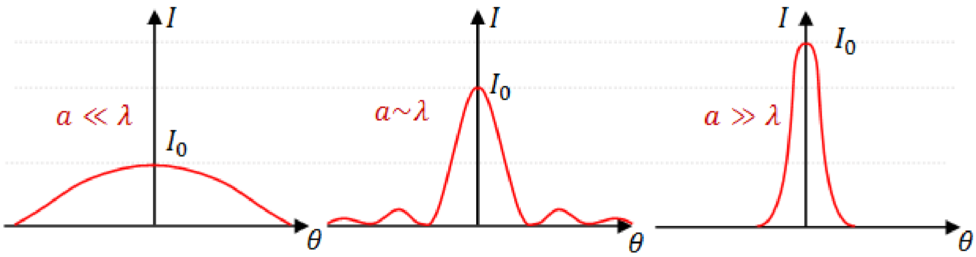


- Intensidade da radiação no anteparo distante:

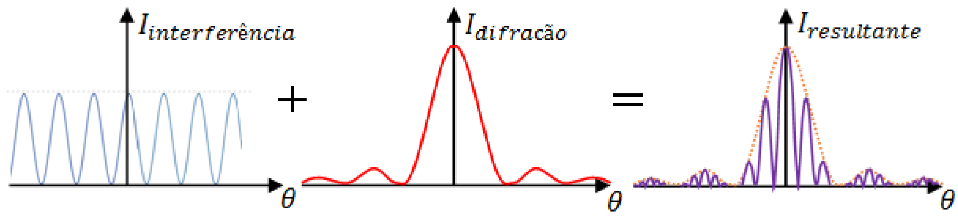
  $\boxed{I = I_0 \left[\dfrac{\sin(\phi/2)}{\phi/2} \right]^2}$; sendo a diferença fase $\phi = Ka \sin\theta$

- A forma da figura de difração no anteparo, devido a uma única fenda, modula a figura de interferência de um sistema de fendas-dupla:

Fenda única:



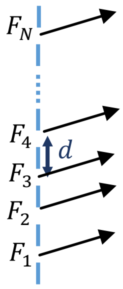
Fenda dupla:



- ***Rede de difração***: possui uma quantidade N muito grande de fendas, todas elas igualmente espaçadas de d.

- Ocorrerá interferência construtiva sempre que:

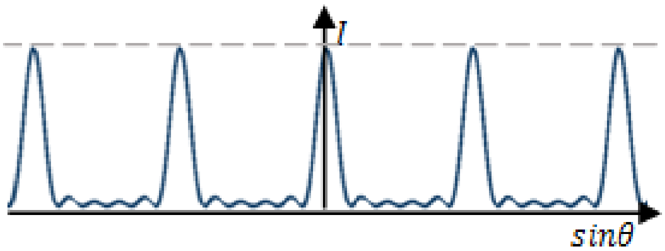
  $\boxed{d \sin\theta = m\lambda}$; $\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



- Intensidade no anteparo distante:

  $\boxed{I = I_0 \dfrac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}}$; *sendo* $\boxed{\phi = Kd \sin\theta} \equiv$ *diferença de fase entre fendas adjacentes*

- Nas regiões de máximo brilho: $\boxed{I \rightarrow N^2 I_0}$



➢ **Exemplo:** Luz laser com comprimento de onda $\lambda = 633nm$, incide em uma rede de difração com 6000 linhas/cm. Quais são os ângulos correspondentes aos máximos de 1ª ordem (m=1), 2ª ordem (m=2) e 3ª ordem (m=3)?

➢ ***Resolução*:**

Condição de máximos: $d\sin\theta = m\lambda$; sendo que

$$d = \frac{1cm}{6000linhas} = \underline{1,67\times10^{-6}m} \quad \left(\begin{array}{c} \textit{espaçamento entre duas linhas vizinhas, que} \\ \textit{corresponde ao espaçamento entre duas fendas} \end{array}\right)$$

Assim, os ângulos de máximo brilho serão:

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{633\times10^{-9}}{1,67\times10^{-6}}\right) = \arcsin(0,379) \Rightarrow \theta_1 = 22,3^{\circ}$$

$$\theta_2 = \arcsin(2\times0,379) \Rightarrow \theta_2 = 48,3^{\circ}$$

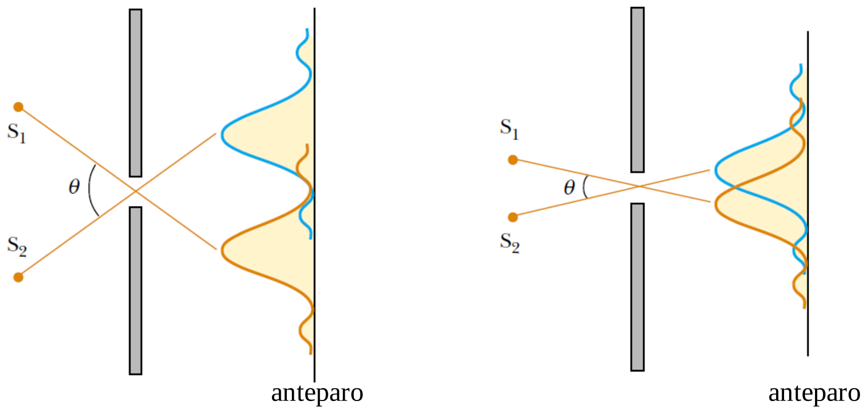
$$\theta_3 = \arcsin(3\times0,379) = \text{arc } \cancel{\sin(1,14)}$$

$\boxed{sin\theta > 1!!}$

➢ Essa grande separação angular entre os pontos de máximo possibilita que radiações emitidas por um gás aquecido, por exemplo, que emite ondas com comprimentos de onda próximos, possam ser distinguidas ("*resolvidas*")

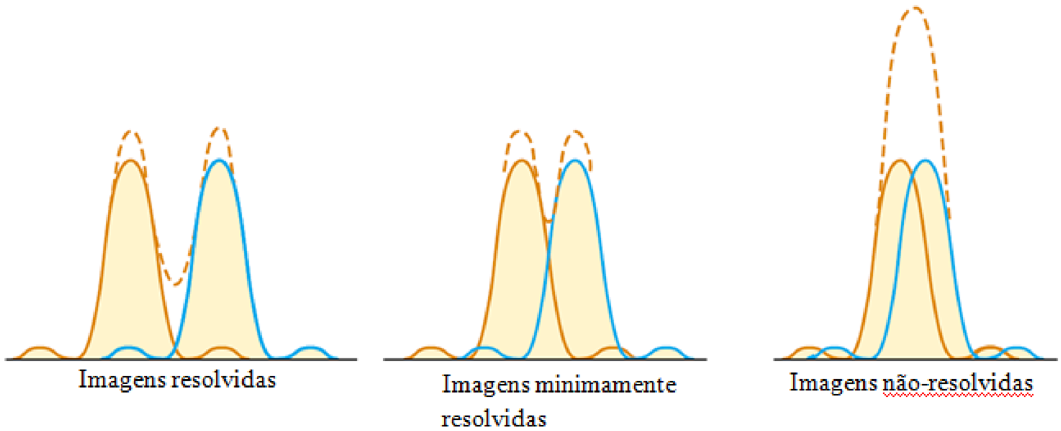
Resolução por Fendas Simples e Aberturas Circulares

➢ Uma observação interessante que envolve diretamente o fenômeno da difração em nossa vida diária é o fato de não conseguirmos "distinguir" objetos (fontes luminosas) que encontram-se muito distantes, como os faróis de um carro em uma estrada à noite, ou duas estrelas (aparentemente) muito próximas no espaço.

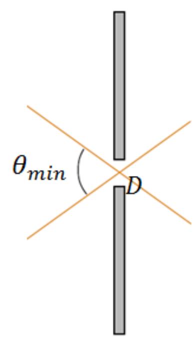


- Note, da figura, que conforme as fontes puntiformes (de radiação não coerente, a maioria das vezes) se aproximam (abertura angular θ cada vez menor), os máximos de difração tendem a se superporem, dificultando a "resolução" dos dois padrões de difração no anteparo.
- Um critério para estabelecer o limite em que duas fontes conseguem ser "resolvidas" é o de Rayleigh:

> "Quando o máximo central de uma figura de difração se superpõe ao primeiro mínimo de outra, as duas imagens estão minimamente resolvidas."



- Como já estudamos, no caso de uma fenda simples, o primeiro mínimo de difração (m=1) ocorre quando $a\sin\theta=\lambda$ $\Rightarrow$ como estaremos lidando com ângulos muito pequenos, $\sin\theta\sim\theta$ (que podemos considerar, nesta situação, como o mesmo da abertura angular das imagens).
- De forma que o "*Critério de Rayleigh*" impõe resolução limite ocorrendo quando:



$$\boxed{\theta_{\min}=\frac{\lambda}{a}} \quad (\theta_{\min}\ em\ radianos)$$

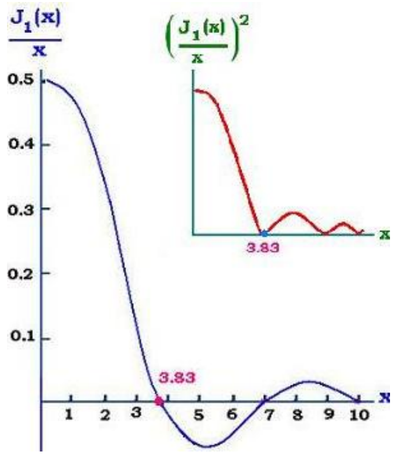
- Se em vez de utilizarmos uma fenda para observarmos fontes de radiação muito distantes (mas próximas entre si), utilizássemos um ***orifício circular***, o processo de soma em *3D* dos campos elétricos dos centros emissores (segundo o princípio de Huygens, como já vimos), se torna bem mais complexo (havendo a necessidade de utilizar *Funções de Bessel de 1ªordem* – funções polinomiais), o que não faremos neste curso.

- A solução, porém, da intensidade da radiação nos pontos do anteparo será:

$$\boxed{I = I_0\left[2\frac{J_1(\phi/2)}{\phi/2}\right]^2}\text{; sendo } \boxed{\phi = KD\sin\theta}\text{; } D \equiv \text{diâmetro do orifício}$$

- Note a semelhança com a expressão de intensidade devido a uma fenda única:

$$I = I_0\left[\frac{\sin\phi/2}{\phi/2}\right]^2 \; ; \quad \phi = Ka\sin\theta$$



- E da mesma forma que na fenda única, os mínimos são obtidos quando $I = 0 \Rightarrow \sin\phi/2 = 0$, no orifício circular teremos $I = 0$ quando $J_1(\phi/2) = 0$, ou seja, quando $\phi/2 = 3.84$.

- Portanto:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{\lambda}D\sin\theta\right) = 3{,}84 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin\theta_{\min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}} \quad (\textit{para orifícios circulares})$$

- Como estaremos sempre interessados nas situações de ângulos pequenos:

$$\boxed{\theta_{\min} = 1{,}22\lambda/D}$$

- Note que este resultado, comparado com o de uma fenda única ($\theta_{\min} = \lambda/\text{a}$) difere em 22% (além de trocarmos a largura de fenda a pelo diâmetro D do orifício, que também pode ser a pupila do olho ou a abertura de um telescópio, por exemplo).

- ***Exemplo***: Limite de resolução de um microscópio: Dois objetos muito pequenos e próximos são iluminados com a luz de uma lâmpada de sódio ($\lambda = 589nm$). Se a objetiva do microscópio tem diâmetro $D = 0{,}9cm$, determine:

  a) Qual o ângulo limite de resolução dos dois objetos?

  b) Qual frequência do espectro da luz visível fornece o maior ângulo limite de resolução? Quanto vale este ângulo limite?

  c) Se no caso da luz de sódio, todo o sistema de observação for imerso na água ($n = 1{,}33$), qual o efeito observado na resolução do microscópio?

- ***Resolução***:

a) $\theta_{\min} = 1,22\dfrac{\lambda}{D} = (1,22)\left(\dfrac{589\times10^{-9}}{9\times10^{-3}}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta_{\min} = \underbrace{8,0\times10^{-5}\,rad}_{2\pi rad = 360^\circ}$

b) Da expressão acima, para o mesmo D, quanto menor λ, menor o $\theta_{\min}$ e portanto maior a resolução.

Como $\underbrace{400nm}_{violeta} \lesssim \lambda_{visível} \lesssim \underbrace{700nm}_{vermelho} \Rightarrow$ *luz violeta fornecerá a maior resolução*

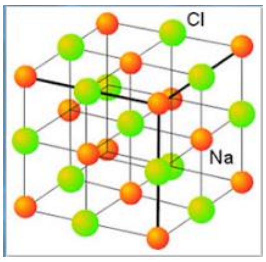
$\therefore \theta_{\min}^{violeta} = 1,22\dfrac{\lambda}{D} = (1,22)\left(\dfrac{400\times10^{-9}}{9\times10^{-3}}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\theta_{\min}^{violeta} = 5,4\times10^{-5}\,rad}$

c) Na água: $\theta_{\min} = 1,22\dfrac{\lambda^{água}}{D}$; $\quad \lambda^{água} = \dfrac{\lambda}{n}$, como já vimos.

$\therefore \quad \theta_{\min} = \left(\dfrac{1,22}{1,33}\right)\left(\dfrac{589\times10^{-9}}{9\times10^{-3}}\right) = \underline{6\times10^{-5}\,rad}$

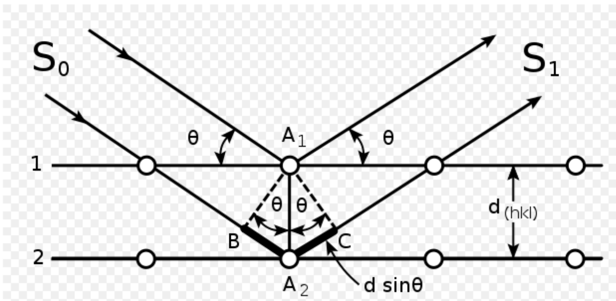
Difração de Raios-X em Cristais

- Os raios-X foram descobertos por *Roentgen* em 1895, após as famosas experiências realizadas por *Sir William Crookes*, com os tubos de raios catódicos.
- Como $\lambda_{raios-x} \sim 1\mathring{A} = 10^{-10}m = 0,1\text{nm}$; e percebendo que é exatamente desta ordem de grandeza o espaçamento entre átomos em um sólido, foi imediato se pensar na possibilidade de espalhamento de raios-X como uma forma (poderosa!) de se investigar a estrutura da matéria.
- As primeiras experiências deste tipo foram realizadas em 1913.
- Em uma rede cristalina (como o *NaCl* – ver figura) os íons que formam o sólido localizam-se em vários planos igualmente espaçados.



- Considerando que o feixe de raios-X que é refletido no plano superior interfere com o refletido no inferior, tem-se então que a diferença de percurso será:

$\boxed{\delta = 2d\sin\theta = m\lambda_{RX}}$; $\quad m = 1,2,3...$ para que ocorra ***interferência construtiva***.



- Perceba que esta análise vale para toda a família de planos paralelos aos dois escolhidos na figura.
- Esta relação é conhecida como a ***Lei de Bragg***, em homenagem a William Henry Bragg (pai) e William Lawrence Bragg (filho), prêmios Nobel de 1915.
- Veja que se λ_{RX} for conhecido e os ângulos de difração θ forem medidos, o espaçamento entre planos atômicos podem ser determinados experimentalmente.

- **Exercício 37 – Livro:** Se o espaçamento interplanar do $NaCl$ é de $d = 0,281nm$, qual é o ângulo previsto no qual raios-X de $\lambda = 0,140nm$ são difratados em um máximo de primeira ordem (m=1)?

- ***Resolução*:**

Lei de Bragg: $\underline{2d\sin\theta = m\lambda}$ $\Rightarrow$ $para\, m = 1$: $\sin\theta = \dfrac{(0,14\times10^{-9})}{(2)(0,281\times10^{-9})} = 0,249$

$$\therefore \quad \underline{\theta_1 = \arcsin(0,249) = 14,4^\circ}$$

Note que, em radianos: $\begin{cases} 360^\circ - 2\pi \\ 14,4^\circ - \ x \end{cases} \Rightarrow \underline{x = 0,251\ rad}$

Ou seja: $\underline{\underline{\sin\theta \sim \theta}}$.