Física IV – Poli – Engenharia Elétrica: 6ª Aula (21/08/2014)

Prof. Alvaro Vannucci

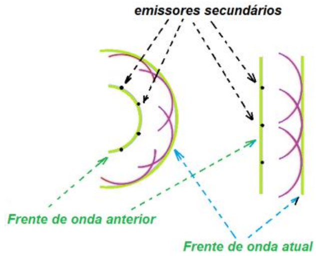
Na última aula vimos:

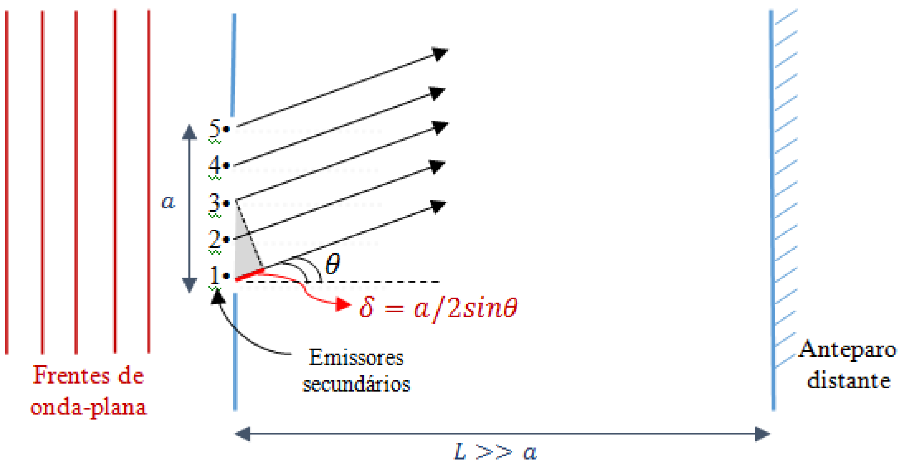
- Interferência em Filmes Finos: se a diferença de percurso (2*t*) for igual a um número inteiro de comprimentos de onda no meio (ou de meio-comprimentos de onda) a interferência será construtiva (ou destrutiva) de acordo com as possíveis ocorrências de mudanças de fase nas reflexões:

$$\text{sendo } \lambda' = \frac{\lambda}{n} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{2nt = m\lambda} \\ \boxed{2nt = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda} \end{cases} \quad ; \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- Películas em forma de cunha (espessura variável) formam uma sequência de franjas claras/escuras.

- Difração por fendas e obstáculos: é preciso que a largura $a \lesssim \lambda$; e uma análise mais simplificada pode ser realizada através do *Princípio de Huygens*, que considera cada ponto de uma frente de onda como um emissor (secundário) que, todos juntos, formarão a nova frente de onda (frente de onda seguinte).





➢ Na figura, tomando, por exemplo, as ondas emergentes dos emissores secundários *1* e *3*, separados de *a/2*, é exato dizer que se a diferença de percurso $\delta = \frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2}$, então haverá interferência destrutiva?

   ➢ Ou seja, interferência será destrutiva se $\underline{a\sin\theta = \lambda}$.

   ➢ Agora, no caso das ondas partirem dos pontos separados de *a/4* (pontos *1* e *2*, por exemplo), teremos novamente interferência destrutiva para:

$$\delta = a/4 \sin\theta = \lambda/2 \quad \Rightarrow \quad \underline{a\sin\theta = 2\lambda}$$

- Seguindo o mesmo raciocínio para emissores separados de *a*/6, teremos $\underline{a\sin\theta = 3\lambda}$ para interferência destrutiva; e assim por diante.

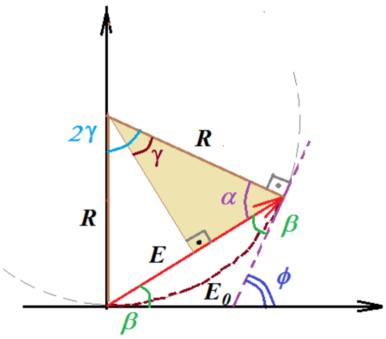
- Podemos então inferir destes resultados um ***critério geral*** para que ocorra ***interferência destrutiva*** no sistema de ***fenda única***:

$\boxed{a\sin\theta = m\lambda}$; $m = \cancel{0}, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Quando $\theta = 0°$, a interferência será **construtiva**!

- Quanto à ***intensidade*** da radiação ***em cada ponto do anteparo***, considerando que a onda de cada emissor secundário tem amplitude E', e que dois centros emissores adjacentes emitem ondas que terão a mesma diferença de fase ϕ, então podemos ***somar*** os campos elétricos das ondas dos *N* centros emissores (*N* muito grande) através de um <u>diagrama de fasores</u>.

- Note que, sendo *N* muito grande, a diferença de fase entre as ondas que emergem de centros emissores adjacentes será muito pequena e, portanto, a diferença de fase ϕ entre <u>o 1º centro</u> e <u>o último</u> será determinada pela *tangente* ao arco de circunferência da figura.



- De forma que o campo resultante ***E*** será a <u>corda</u> deste arco; e vamos chamar de E_0 o campo resultante máximo que se obteria caso não houvesse diferença de fase alguma ($\theta = 0°$), e que vai corresponder ao comprimento do arco da figura.

- Chamando de β o ângulo que o campo resultante *E* faz com o eixo horizontal; de α o ângulo complementar; e de 2γ o ângulo de abertura do arco, temos então que (da figura):

  (i) $180° - 2\beta = 180° - \phi \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{\phi}{2}$

  (ii) $\alpha + \beta = 90° \quad \Rightarrow$ (do último resultado) $\Rightarrow \quad \alpha = 90° - \dfrac{\phi}{2} = \dfrac{180° - \phi}{2}$

  (iii) $\alpha + \gamma = 90° \quad \Rightarrow$ (do último resultado) $\Rightarrow \quad \boxed{\phi = 2\gamma}$ (1)

- Finalmente, do triângulo sombreado na figura: $\boxed{\sin\gamma = \dfrac{E/2}{R}}$;

e da relação entre o *raio* e o *arco* de circunferência: $E_0 = (R)(2\gamma) \quad \Rightarrow \quad \boxed{1/R = \dfrac{2\gamma}{E_0}}$

- Substituindo *1/R* : $\sin\gamma = \frac{E}{2}\frac{2\gamma}{E_0}$ $\Rightarrow$ (usando *eq. (1)*) $\Rightarrow$

  $\Rightarrow\ \sin\phi/2 = \frac{E}{E_0}\frac{\phi}{2}\ \Rightarrow\ \frac{E}{E_0} = \frac{\sin\phi/2}{\phi/2} \Rightarrow (como\ I\alpha E^2)\ \Rightarrow\ \boxed{I = I_0\left[\frac{\sin(\phi/2)}{\phi/2}\right]^2}$

  resultado válido para o caso de fenda única, onde $\boxed{\phi = ka\sin\theta}$

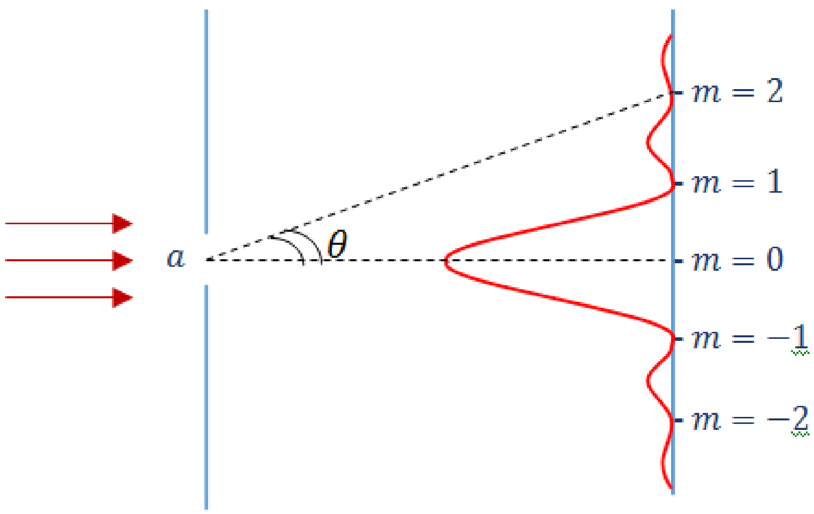
- Sendo que I_0 corresponde à intensidade máxima nos pontos do anteparo nas quais a diferença de fase das ondas que ali chegam é *zero*; e quando θ = 0°, teremos o máximo central.

- Note que os pontos de mínimo (*I=0*) são os que correspondem a $\sin\phi/2 = 0$; ou seja, $\phi/2 = m\pi\ \Rightarrow\ \frac{ka\sin\theta}{2} = m\pi\ \Rightarrow\ \frac{2a\pi\sin\theta}{2\lambda} = m\pi\ \Rightarrow\ \boxed{a\sin\theta = m\lambda}$; que corresponde à condição para interferência destrutiva, já obtida acima.

- E <u>sempre lembrar</u> que este critério envolve valores de $m = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ Já que para ***m = 0*** $\Rightarrow \phi \to 0 \Rightarrow \sin\phi/2 \to 0 \therefore \sin\phi/2 \to \phi/2$; de maneira que

  $I \to I_0\left(\frac{\phi/2}{\phi/2}\right)^2\ \Rightarrow\ I(m=0) \to I_0$ (ponto de máximo); sendo $\boxed{\phi = ka\sin\theta}$

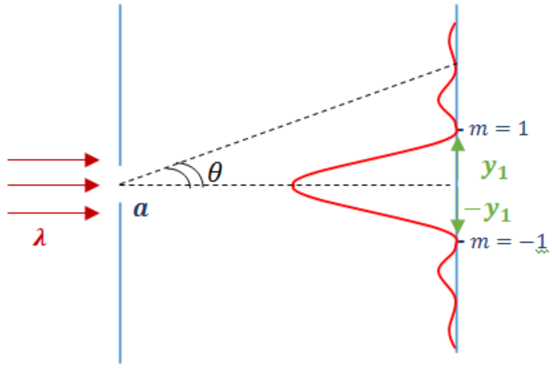
- Diagrama de intensidade em cada ponto do anteparo (fenda única):



➢ **Exemplo:** Um feixe de luz monocromática, com comprimento de onda $\lambda = 580nm$, incide em uma fenda com abertura $a = 0,3mm$. Se o anteparo encontra-se à distância $L = 2m$ da fenda, determine:

a) A posição da primeira franja escura.

b) A largura da franja central brilhante.



➢ ***Resolução:***

a) Como $L >> a \;\Rightarrow\; \sin\theta \sim tg\theta = y/L$

Condição de Mínimo: $a\sin\theta = m\lambda; \;\; m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Primeiro mínimo: $m = \pm 1 \;\Rightarrow\; (a)(y_1/L) = \pm\lambda \;\Rightarrow\; \underline{y_1 = \pm\dfrac{L\lambda}{a} = \pm 3,9mm}$

b) Portanto a largura Δy da franja central brilhante será: $\underline{\Delta y = 2y_1 = 7,8mm}$

➢ Observe, deste exercício, que y_1 (e portanto Δy) é **inversamente proporcional** à largura **a** da fenda.

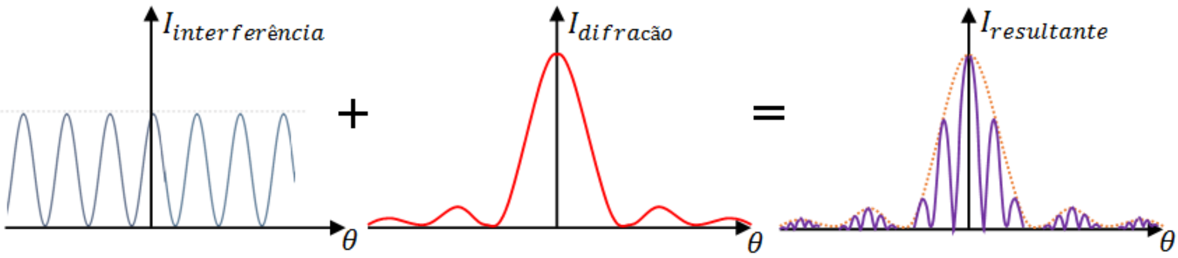
➢ Ou seja, quanto mais larga for a fenda, mais estreita será a franja central brilhante:

➢ Caso o problema tivesse pedido a **abertura angular** correspondente à franja brilhante central (definida pelos pontos de mínimo $m = -1$ e $m = +1$), ainda na condição de $L >> a$:

$$tg\theta \sim \sin\theta \sim \theta = \pm\frac{\lambda}{a} \;\Rightarrow\; \boxed{\Delta\theta = \frac{2\lambda}{a}}$$

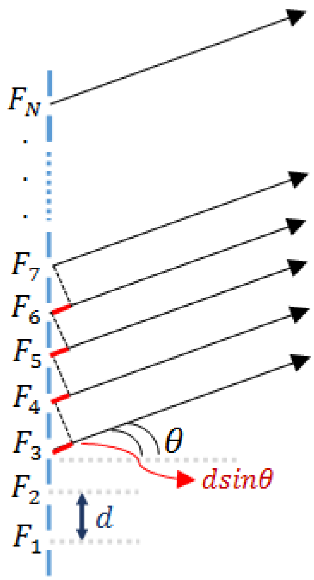
➢ Retornando ao estudo realizado sobre interferência devido a um sistema de fendas duplas, lembre que em nenhum momento se especificou a <u>largura das fendas</u>; utilizamos somente a <u>distância de separação</u> entre elas.

- Na verdade, o efeito que a largura das fendas irá provocar na configuração final das franjas luminosas no anteparo é o de **modular** a intensidade da luz, devido ao fenômeno da interferência, de acordo com a figura de difração



- Note os vários pontos de <u>mínimo de interferência</u> entre os dois primeiros <u>mínimos</u> ($m = +1$ e $m = -1$) <u>de difração</u>.

- Vamos agora investigar o que ocorre quando radiação monocromática incide em um número $\boldsymbol{N}$ muito grande de fendas, todas igualmente espaçadas de $\boldsymbol{d}$; ou seja, teremos uma ***rede de difração.***



- Para evitar efeitos significativos de difração, vamos considerar a largura de cada fenda $a << \lambda$.

- Vemos, da figura ao lado, que pegando duas fendas adjacentes quaisquer, a diferença de percurso das ondas será: $\delta = d\sin\theta$, de forma que se ela corresponder a um número inteiro de comprimentos de ondas, ocorrerá ***interferência construtiva***:

$$\boxed{d\sin\theta = m\lambda}$$
$m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

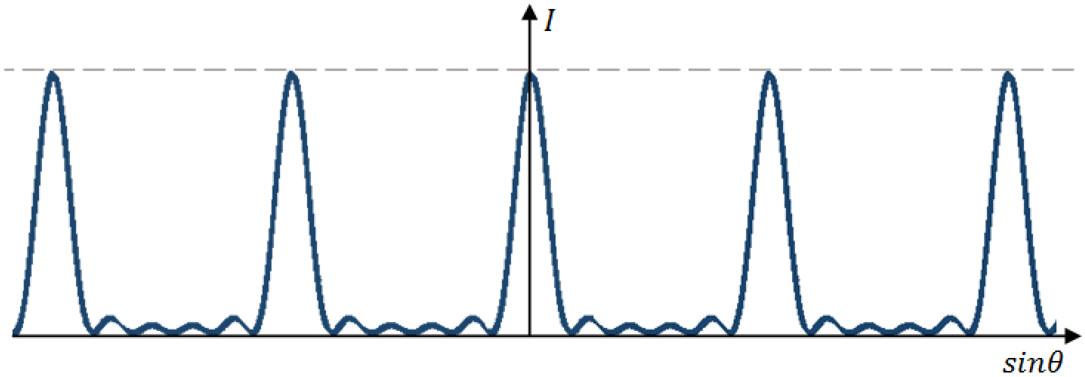
Critério para interferência construtiva em um ponto P de um anteparo distante.

- O interessante das redes de difração é que, se calcularmos a intensidade da radiação em qualquer ponto P do anteparo, somando os campos elétricos de todas as ondas através de um diagrama de fasores, temos que: (*Ver Apêndice*)

$$\boxed{I = I_0 \frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}}; \; sendo \;\; \phi = Kd\sin\theta \equiv \begin{matrix} diferença\ de\ fase\ entre\ as\ ondas \\ de\ duas\ fendas\ adjacentes \end{matrix}$$

- Nesta equação, I_0 corresponde à intensidade da onda de cada fenda ao atingir individualmente o ponto P do anteparo.

- O espectro de franjas correspondentes no anteparo será:



- Observe que para $\phi \to 0$ $(\sin\phi \to 0)$:

$$I \to I_0 \frac{(N\phi/2)^2}{(\phi/2)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I \to N^2 I_0} \quad \left(\begin{array}{c}\text{nos pontos de} \\ \text{interferência construtiva}\end{array}\right)$$

- De forma que quanto maior for o número de fendas, muito mais intenso será o brilho nos pontos de máximo do anteparo.

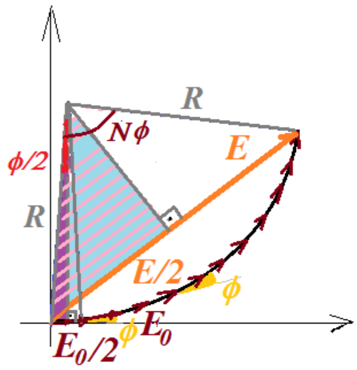
- Na prática, consegue-se construir uma rede de difração fazendo N riscas paralelas em uma pequena placa de material transparente. A região entre dois riscos comporta-se como uma fenda.

Apêndice

- Para se obter a expressão que fornece a intensidade resultante em cada ponto P do anteparo, vamos construir um diagrama de fasores, considerando E_0 como sendo o campo da onda que emerge de cada fenda e que ele encontra-se defasado de $\phi = Kd\sin\theta$ em relação à onda proveniente de uma fenda vizinha:

- Na figura os fasores foram aumentados para facilitar a visualização. O raio R é equidistante em relação ao início e final de cada fasor.

- Observando os dois triângulos (sombreado e hachurado):



$$\begin{cases} \sin(N\phi/2) = \dfrac{E/2}{R} \\ \sin(\phi/2) = \dfrac{E_0/2}{R} \end{cases} \Rightarrow (\div) \Rightarrow \frac{E}{E_0} = \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \Rightarrow (I \alpha E^2) \Rightarrow \boxed{I = I_0 \frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}}$$

sendo que $\boxed{\phi = Kd\sin\theta}$