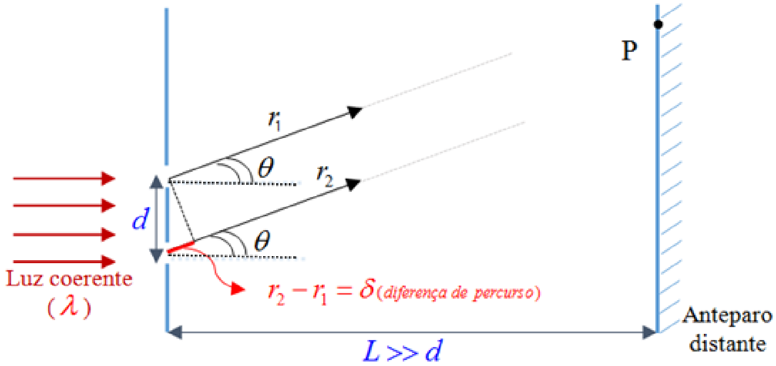
Física IV – Poli – Engenharia Elétrica: *4ª Aula* (14/08/2014)

Prof. Alvaro Vannucci

Na última aula vimos:

- A experiência de fenda-dupla de Thomas Young (1801).



- Se

$$\begin{cases} \delta = \boxed{d\sin\theta = m\lambda} & \Rightarrow \text{ interferência será construtiva (no ponto P do anteparo)} \\ \delta = \boxed{d\sin\theta = (m+1/2)\lambda} & \Rightarrow \text{ interferência será destrutiva} \end{cases}$$

sendo que $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

- Distanciando cada vez mais o anteparo ($L >> d$), menor se torna o ângulo θ, que define o ponto P, de forma que para ângulos muito pequenos:

$$\underline{\sin\theta \sim tg\,\theta = y/L}$$

- Consequentemente: $\begin{cases} \boxed{y_{constr} = m\dfrac{\lambda L}{d}} \\ \boxed{y_{destr} = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda L}{d}} \end{cases}$

- Note agora que escrevendo os campos elétricos das ondas que emergem das duas fendas:

$$\begin{cases} E_1 = E_{01}\cos(\text{k}\,r_1 - \omega t) \\ E_2 = E_{02}\cos\left[\text{k}(r_1 + \Delta r) - \omega t\right] = E_{02}\cos\left[kr_1 - \omega t + \underbrace{k\,\Delta r}_{\#\text{de fase } \phi \text{ entre as duas ondas}}\right] \end{cases}$$

- Ou seja: $\boxed{\phi = k\Delta r = Kd\sin\theta}$; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

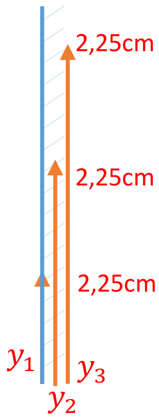
- **Exemplo:** Em um experimento no qual L = 1,2m e d = 0,03mm, observa-se uma franja brilhante de 2ª ordem (m = 2) no anteparo, que se situa a 4,5 cm da franja brilhante principal (m = 0). Determine:

  a) O comprimento de onda da radiação incidente.

  b) A distância entre as franjas brilhantes vizinhas a ela (m = 1 e m = 3).

- **Resolução:**

  a) Para m=2 temos interferência construtiva:

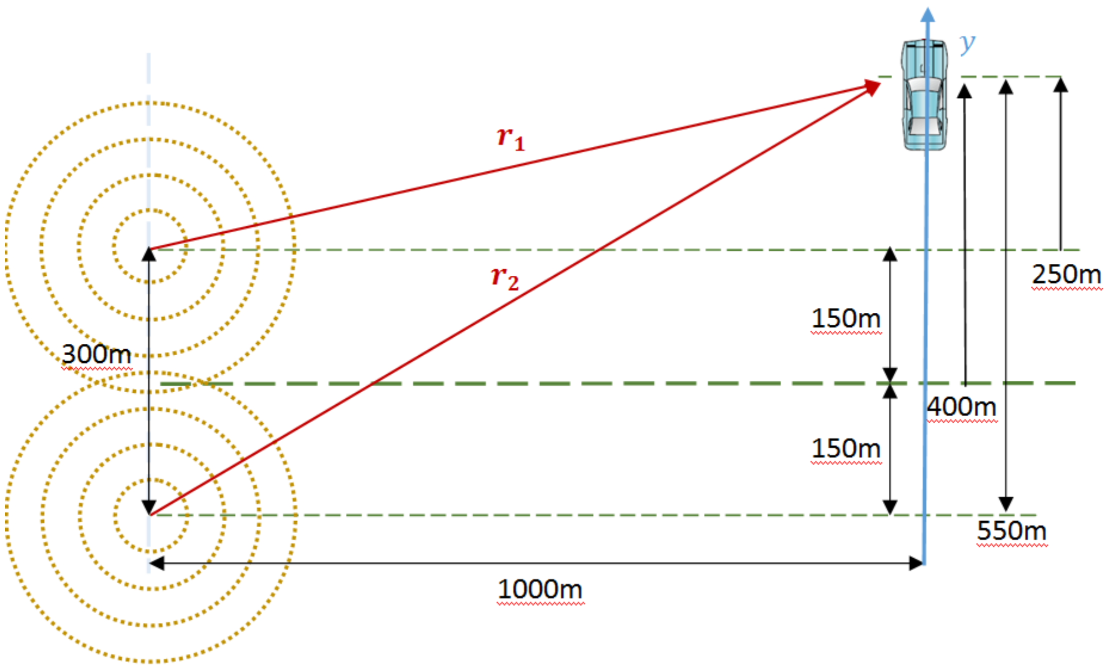


$$d\,\frac{y_2}{L} = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{dy_2}{2L} = \frac{(3\times10^{-5})(4,5\times10^{-2})}{(2)(1,2)} = 5,6\times10^{-7}\,m \Rightarrow \underline{\lambda = 560nm}$$

b) Para:
$$\begin{cases} m=1 \Rightarrow y_1 = \dfrac{\lambda L}{d} = \dfrac{(5,6\times10^{-7})(1,2)}{(3\times10^{-5})} \Rightarrow y_1 = 2,25cm \\ m=3 \Rightarrow y_3 = \dfrac{3\lambda L}{d} = 3y_1 \Rightarrow y_3 = 6,75cm \end{cases}$$

E se o problema tivesse pedido a distância entre a 2ª franja brilhante e a 3ª franja escura, como você determinaria isto?

- **Exercício 3** (*do Livro*)**:** Duas antenas de rádio, separadas de 300m, emitem ondas eletromagnéticas coerentes e de mesmo comprimento de onda. Um carro que se desloca conforme o desenho, recebe os sinais das duas antenas. Se na posição indicada o carro encontra-se no ponto de máximo de 2ª ordem, calcule o comprimento de onda da radiação.



- **Resolução:** Note que neste problema ***não podemos*** considerar $L >> d$!

- No entanto, ***sempre podemos*** considerar que a <u>diferença de percurso</u> $\delta = r_2 - r_1 = m\lambda$ para que a interferência seja <u>construtiva</u>!

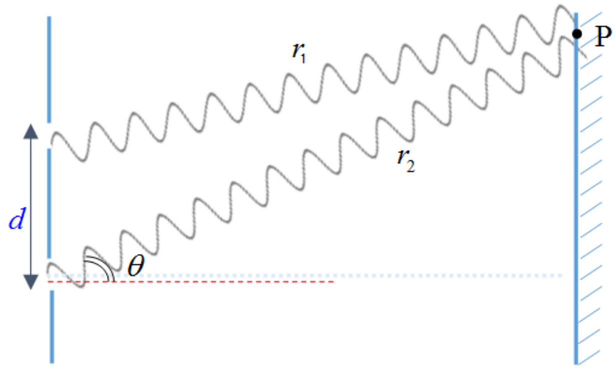
- Neste problema: $r_2 - r_1 = 2\lambda$; sendo que, do desenho: $\begin{cases} r_1 = \sqrt{(10^3)^2 + (250)^2} = 1030m \\ r_2 = \sqrt{(10^3)^2 + (550)^2} = 1141m \end{cases}$

$\therefore \quad \Delta r = \delta = 2\lambda \quad \Rightarrow \quad r_2 - r_1 = 111m = 2\lambda \;\Rightarrow\; \underline{\lambda = 55{,}5m}$

- Vejamos agora como determinar a ***intensidade*** da radiação em um <u>ponto qualquer</u> do anteparo.

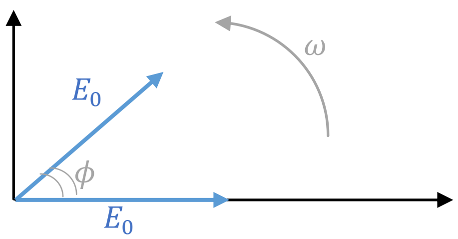
- Como vimos, devido à diferença de percurso das ondas que emergem das fendas ***1*** e ***2***, haverá uma ***diferença de fase*** entre elas, de forma que os campos elétricos podem ser escritos:

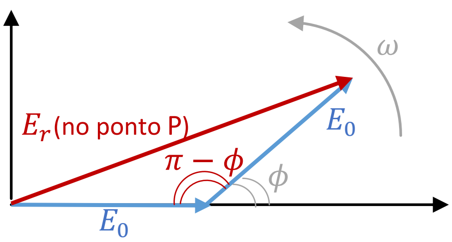
$$\begin{cases} E_1 = E_0 \cos(k\, r_1 - \omega t) \\ E_2 = E_0 \cos\left(kr_1 - \omega t + \phi\right) \end{cases}$$



- O campo resultante no ponto P (qualquer) do anteparo será a <u>soma</u> destes dois campos; e a maneira mais simples de realizar esta soma é através de um ***Diagrama de Fasores***.

- Apenas lembrando: a amplitude de cada campo elétrico é representada em um diagrama por um ***fasor*** de forma que o ângulo de separação entre eles será a diferença de fase ϕ; e todo conjunto <u>gira no sentido anti-horário</u> com velocidade angular ω. A amplitude do campo resultante será a soma ("*vetorial*") dos dois fasores.





- Aplicando a *Lei dos Cossenos* para determinar E_r :

$$E_R^2(P) = E_0^2 + E_0^2 - 2E_0^2 \underbrace{\cos(\pi - \phi)}_{= -\cos(\phi)} = 2E_0^2(1 + \cos\phi) \quad (1)$$

- Lembrando agora a identidade trigonométrica:

$$\cos\left(A \pm B\right) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \quad \Rightarrow \quad para \;\; A = B = \phi/2 \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\phi/2+\phi/2)=\cos\phi=\cos^2(\phi/2)-\underbrace{\sin^2(\phi/2)}_{=1-\cos^2(\phi/2)}=\cos^2(\phi/2)-1+\cos^2(\phi/2)$$

$$\therefore \quad \cos\phi = 2\cos^2(\phi/2)-1 \quad (2)$$

- Substituindo (2) em (1): $E_R^2(P)=2E_0^2(\cancel{1}+\cos^2(\phi/2)\cancel{-1})$

- Agora, como $\underline{I=\bar{S}\propto E^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{I(P)=4I_0\cos^2(\phi/2)}$

  Ou então, substituindo $\phi = Kd\sin\theta = \dfrac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$: $\boxed{I(P)=4I_0\cos^2\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$

- Note que a intensidade será máxima (interferência construtiva) quando:

$$\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)=1 \;\Rightarrow\; \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)=\pm1 \;\Rightarrow\; \frac{\cancel{\pi} d}{\lambda}\sin\theta = m\cancel{\pi} \;\Rightarrow$$

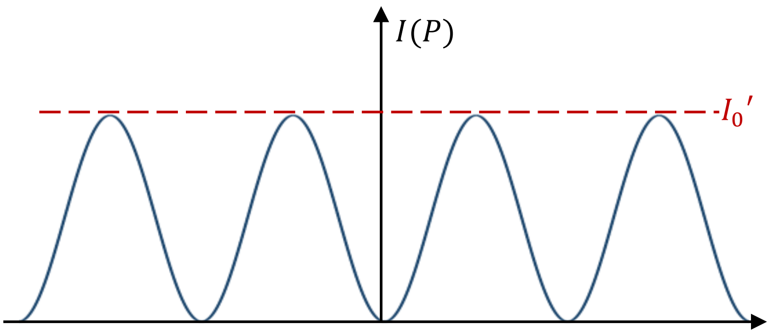
$$\Rightarrow \quad \boxed{d\sin\theta = m\lambda} \text{ (condição de máximo já obtida antes)}$$

$(m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

- Nas situações em que a aproximação $L >> d$ é válida, então como já vimos, $\sin\theta \sim tg\theta = y/L$.

- Chamando também $4I_0 = I_0'$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{I(P)}=\mathrm{I_0'}\cos^2\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}\dfrac{y}{L}\right)}$

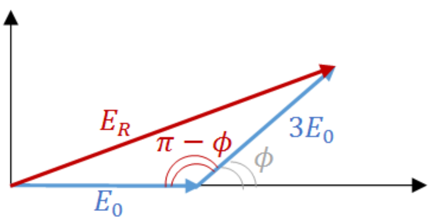
- Gráfico de interferência correspondente (duas fendas iguais):



- **Exemplo:** Supor que em uma experiência de fenda dupla, uma das fendas é três vezes mais larga que a outra, de forma que os campos elétricos correspondentes em um ponto P do anteparo distante são: $E_1 = E_0\cos\omega t$ e $E_2 = 3E_0\cos(\omega t+\phi)$. Qual a intensidade da radiação $I(\phi)$ no anteparo distante?

- **Resolução:**

- Construindo o diagrama de fasores correspondente:

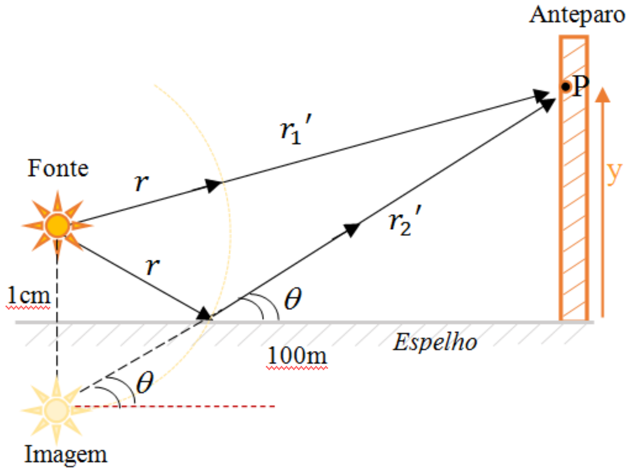


- E aplicando a *lei dos cossenos*:

$$E_R^2 = E_0^2 + 9E_0^2 - 2(E_0)(3E_0)\underbrace{\cos(\pi - \phi)}_{=-\cos(\phi)} \quad \Rightarrow \quad como\, I \propto E^2 \quad \Rightarrow \quad I = 10I_0 + 6I_0 \cos\phi$$

$$\therefore \quad \underline{I(\phi) = 2I_0(5 + 3\cos\phi)} \quad ; \; I_0 \equiv Intensidade\, da\, onda\,(plana)\, que\, emerge\, da\; fenda\; 1$$

- **Exercício 43 (*do Livro*):** Efeitos de interferência são observados em um anteparo devido aos raios luminosos vindos de uma fonte ($\lambda = 500nm$) e dos raios refletidos no espelho, conforme a figura. Se a distância entre a frente e o anteparo é de 100m e a fonte está 1,0cm acima do espelho, encontre a distância y corresponde à primeira franja escura.



- Pelos dados do exercício, o ângulo θ é muito pequeno.
- Considerando o raio refletido como tendo sido produzido pela "*fonte-imagem*", o problema resume-se à interferência devido a um sistema de "*fenda-dupla*", de forma que:

$$y_{claros} = m\frac{\lambda L}{d} \;\; \text{e} \;\; y_{escuros} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda L}{d};$$

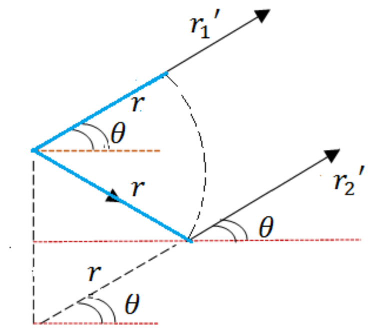
Sendo d a distância entre fonte real e fonte imagem.

- Porém, quando ocorre a reflexão ($n_2 > n_1$), o campo elétrico inverte a fase!

Portanto, neste caso, $y_{escuros} = m\dfrac{\lambda L}{d} \quad \Rightarrow \quad y_{1^o escuro} = \dfrac{(500\times10^{-9})(100)}{2\times10^{-2}} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \underline{y_{1^o escuro} = 2,5\times10^{-3}m = 2,5mm}$$

- Analisando a questão da diferença de percurso com mais atenção, da figura:



- Temos que: $r_1 = r_1' + r$ e $r_2 = r_2' + \mathrm{r}$;

  então, somando e subtraindo r:

$$\Delta r = \underbrace{r_2' + r}_{=r_2} - \underbrace{(r_1' + r)}_{=r_1} \equiv \textit{diferença de percursos totais}$$

- Ou seja, $\Delta r = r_2 - r_1$; e vemos que reencontramos a situação de interferência por fenda dupla onde $\Delta r = d\sin\theta = m\lambda$;

  e como θ é muito pequeno: $d\sin\theta = d\,tg\theta = \dfrac{dy}{L} = m\lambda \quad \Rightarrow \quad \underline{y_{escuro} = m\dfrac{\lambda L}{d}}$