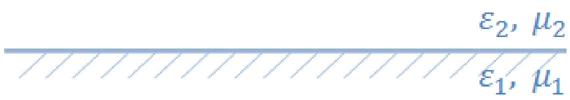
Física IV – Poli – Engenharia Elétrica: 2ª Aula (07/08/2014)

Prof. Alvaro Vannucci

Na última aula vimos:

- *Condições de contorno* para os campos elétrico e magnético na interface entre dois meios dielétricos:



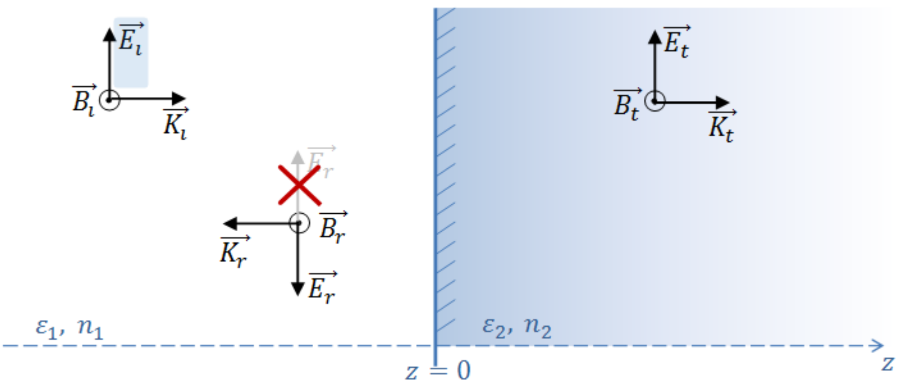
$$\left.\begin{array}{l} D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{livre} \\ B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \\ E_{1//} - E_{2//} = 0 \\ H_{1//} - H_{2//} = \mathrm{K}_{real} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} para\,\sigma = \mathrm{K} = 0 \\ e\,como\,\mu_1 \sim \mu_2 \sim \mu_0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{E_{1//} = E_{2//}} \\ D_{1\perp} = D_{2\perp} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp}} \\ \boxed{B_{1\perp} = B_{2\perp}} \\ \boxed{B_{1//} = B_{2//}} \end{array}\right.$$

- *Solução de onda-plana* para as equações de onda:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t) \end{cases}; \quad K = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = vT = \frac{v}{f}; \quad \omega = 2\pi f$$

- <u>Energia</u> transportada pela onda <u>por unidade de tempo</u> e <u>por unidade de área</u> é dada pelo Vetor de Poynting: $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu}$, sendo que a intensidade de onda é $I = \overline{S}$.

➢ Vejamos agora o que ocorre quando uma onda eletromagnética atinge a interface entre dois meios dielétricos, analisando as ondas <u>refletida</u> e <u>transmitida</u> (refratada). Para simplificar os cálculos, vamos supor que a onda se propaga na direção e sentido do eixo z, que a interface encontra-se localizada exatamente na posição $z = 0$.



- Notemos agora que:

1º) Os campos, exatamente na interface ($z=0$), podem ser escritos como:

$$\begin{cases} E = E_0\cos(Kz-\omega t) = E_0\cos(\omega t) \\ B = B_0\cos(Kz-\omega t) = B_0\cos(\omega t) \end{cases}$$

Ou seja, <u>as amplitudes</u> dos campos na interface variam com o tempo, apenas.

2°) Como o sentido de propagação de onda <u>refletida</u> é <u>contrário</u> ao da onda <u>incidente</u> (e transmitida), então o campo $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ deve ***inverter a fase***, já que $\vec{S} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu}$ fornece sempre o sentido de propagação da onda.

- Vamos inicialmente <u>supor</u> que $\vec{E}$ da onda <u>é que inverte a fase</u> na reflexão e vamos efetuar os cálculos. Se esta hipótese inicial não estiver correta, chegaremos no fim a uma inconsistência (e então será o $\vec{B}$ que deverá ter a fase invertida).

- Iniciamos então aplicado as condições de contorno dos campos que se mostrem mais adequadas, ou seja, as que envolvem as <u>componentes paralelas à interface</u>:

$$\begin{cases} E_{1//} = E_{2//} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_i - E_r = E_t} \quad (1) \\ B_{1//} = B_{2//} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_i + B_r = B_t} \quad (2) \end{cases}$$

- E vamos agora obter os campos das ondas refletida e transmitida em função dos campos de onda incidente, lembrando que $\boxed{n = c/v}$ e que $\boxed{E = vB}$.

- Partindo da equação (1):

$$v_1(B_i - B_r) = v_2 B_t \quad \Rightarrow \quad \underline{B_t = \frac{v_1}{v_2}(B_i - B_r)} \quad (3)$$

- Das equações (2) e (3): $B_i + B_r = \dfrac{v_1}{v_2}B_i - \dfrac{v_1}{v_2}B_r \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)B_i = \left(\frac{v_1}{v_2} + 1\right)B_r \quad \Rightarrow \quad B_r = \left(\frac{v_1 - v_2}{\cancel{v_2}}\right)\left(\frac{\cancel{v_2}}{v_1 + v_2}\right)B_i \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(usando\ que\ n = \frac{c}{v}\right) \quad \Rightarrow \quad B_r = \frac{c/n_1 - c/n_2}{c/n_1 + c/n_2}B_i = \frac{\dfrac{n_2 - n_1}{\cancel{n_1 n_2}}}{\dfrac{n_2 + n_1}{\cancel{n_1 n_2}}}B_i \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} B_i} \ (4); \quad \textit{para incidência normal } (\textit{perpendicular}) \textit{ ao plano de separação dos dois meios.}$$

- Substituindo este resultado na equação (2):

$$B_i + \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} B_i = B_t \quad \Rightarrow \quad B_t = \frac{n_2 + \cancel{n_1} + n_2 - \cancel{n_1}}{n_2 + n_1} B_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_t = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} B_i}$$

- Quanto ao <u>campo elétrico</u>, se usarmos que $\frac{E}{v} = B$ na equação (2):

$$\frac{1}{v_1}(E_i + E_r) = \frac{1}{v_2} E_t \quad \Rightarrow \quad \textit{da equação (1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2}{v_1}(E_i + E_r) = E_i - E_r \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\textit{sendo } v = \frac{c}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{c/n_2}{c/n_1}(E_i + E_r) = E_i - E_r \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{n_2} E_i + \frac{n_1}{n_2} E_r = E_i - E_r \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{n_1}{n_2} + 1\right) E_r = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) E_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_i} \ (5)$$

- Substituindo este resultado na equação (1): $\boxed{E_t = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_i}$

- Ou seja, se o meio (2) tiver um índice de refração ***maior*** que o meio (1) ($n_2 > n_1$) vemos das equações (4) e (5) que a hipótese inicialmente assumida, de que o campo $\vec{E}$ <u>é que **inverte a fase**</u>, é **consistente**.

- Porém, se $n_2 < n_1$, o sinal negativo que surge ao avaliarmos as equações (4) e (5) indica que a hipótese inicialmente assumida quanto à inversão do campo $\vec{E}$ não é consistente, ou seja, **o campo** $\vec{B}$ **é que inverte** a fase para $n_2 < n_1$.

- A partir destes resultados é interessante definir os ***coeficientes de Fresnel*** para a <u>reflexão</u> e <u>transmissão</u> da onda:

$$\boxed{r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}} \quad \text{e} \quad \boxed{t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}}$$

- Mas, vamos lembrar que existe uma relação direta entre a energia transportada pela onda e a amplitude dos campos que a compõe, ou seja:

$$I = \bar{S} = \overline{\left|\frac{\vec{E} \times \vec{H}}{\mu}\right|} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \underbrace{\overline{\cos^2 \omega t}}_{=1/2} = \left(E_0 = v B_0 = \frac{c}{n} B_0\right) = \frac{n}{2\mu_0 c} E_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \bar{S} \propto n E_0^{\,2}} \ ;$$

ou seja, a intensidade da onda (energia/área/tempo) é proporcional ao quadrado da amplitude da onda!

- De forma que podemos definir a **Refletância** e a **Transmitância** como sendo a razão entre a intensidade da onda refletida (ou transmitida) e da onda incidente:

$$\begin{cases} R = \dfrac{I_r}{I_i} = \dfrac{\cancel{n_1} E_r^{\,2}}{\cancel{n_1} E_i^{\,2}} = r^2 \\ T = \dfrac{I_t}{I_i} = \dfrac{n_2 E_t^{\,2}}{n_1 E_i^{\,2}} = \dfrac{n_2}{n_1} t^2 \end{cases}$$

- Sempre que calcularmos estas grandezas, devido ao *Princípio de Conservação de Energia*, obteremos que $R + T = 1$.

- Para demonstrarmos isto de uma forma geral:

$$R + T = r^2 + \frac{n_2}{n_1} t^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \left(\frac{2n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 = \ \dots \ = 1$$

(faça as contas!)