Física IV – Poli – Engenharia Elétrica: *1ª Aula* (05/08/2014)

Prof. Alvaro Vannucci

- Como vimos no semestre passado, as ***Equações de Maxwell*** se mostraram capazes de descrever todos os fenômenos elétricos e magnéticos até então conhecidos.

- Estas equações, na forma integral e diferencial são:

(1) $\boxed{\oint \vec{D}\cdot d\vec{A} = q_{\text{int.}}^{livre}}$ $\leftrightarrow$ $\boxed{\nabla\cdot\vec{D} = \rho}$ (*Lei de Gauss*)

(2) $\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0}$ $\leftrightarrow$ $\boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$ (*Lei de Gauss para o magnetismo*)

(3) $\boxed{\varepsilon = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_M}{dt}}$ $\leftrightarrow$ $\boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$ (*Lei de Faraday*)

(4) $\boxed{\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enl}^{real} + \varepsilon\frac{d\phi_E}{dt}}$ $\leftrightarrow$ $\boxed{\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$ (*Lei de Ampère Generalizada*)

Sendo que $\boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$; $\boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E}}$ e $\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$.

- Vale também sempre lembrar, junto com as equações de Maxwell, a existência da equação da ***força de Lorentz***: $\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}}$.

- Vimos que <u>no vácuo</u> não há fontes de carga ou corrente, ou seja, $\underline{\rho = J = 0}$, de forma que as equações de Maxwell se resumem a:

(1) $\nabla\cdot\vec{E} = 0$

(2) $\nabla\cdot\vec{B} = 0$

(3) $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

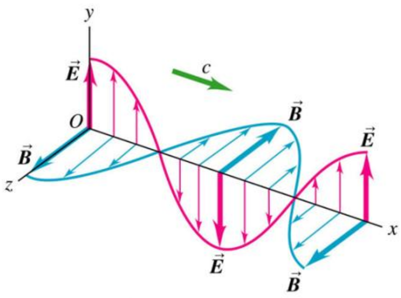
(4) $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

- De onde obtemos as equações (diferenciais) de onda:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0} \quad e \quad \boxed{\nabla^2\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

- Cujas soluções são:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t) \end{cases} \quad \textit{sendo que} \quad \boxed{E = cB};$$



que correspondem a ***ondas (planas) transversais***.

- Lembre que nas expressões acima: $\boxed{K = \dfrac{2\pi}{\lambda}}$; $\boxed{\lambda = \dfrac{c}{f}}$; $\boxed{\omega = 2\pi f}$ e $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$

- Quando a onda eletromagnética propaga-se em um meio dielétrico, a sua velocidade é v, de forma que o "***índice de refração***" do meio será dado por: $\boxed{n = c/v}$.

- Em termos de energia transportada pela onda eletromagnética, vimos no curso anterior que ela era melhor descrita pelo ***Vetor de Poynting***, dado por $\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}}$;

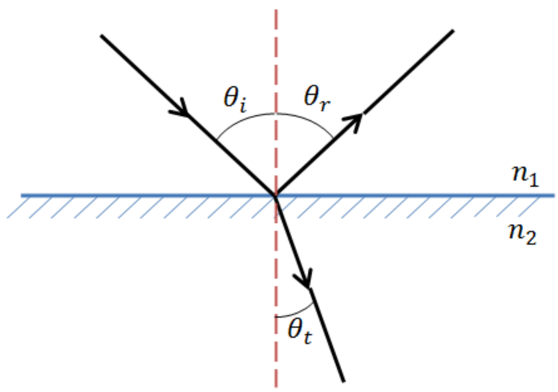
  sendo que a ***Intensidade*** da onda é dada por: $\boxed{I = \bar{S} = \dfrac{E^2}{2\mu_0 c}}$ (*energia/tempo/área*)

- Mas vimos também que a ***densidade volumétrica de energia*** (***u***) da onda era dada por:

$$u = u_E + u_M = \varepsilon_0 E^2 \quad \Rightarrow \quad U = \int u\, dV \quad \text{(energia total)}$$

- Vamos iniciar o nosso curso investigando alguns fenômenos que envolvem as ondas eletromagnéticas que atingem a interface entre dois meios dielétricos (*ar-vidro*, por exemplo).

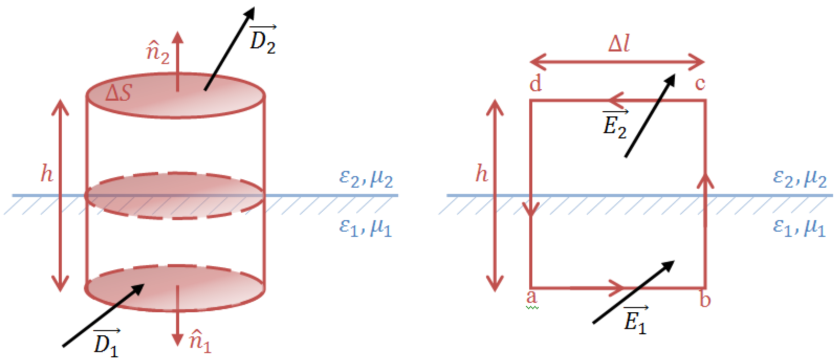
- Nesse contexto, será útil nos lembrarmos da ***lei da reflexão*** ($\theta_i = \theta_r$) e da ***lei de Snell*** ($n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$).



- Estas leis, obtidas inicialmente de maneira puramente geométrica (através de experiências em laboratório) puderam ser deduzidas a partir das equações de Maxwell, demonstrando o poder destas equações.

- Para mostramos isto, é preciso inicialmente determinarmos as condições que precisam ser satisfeitas pelos campos elétrico e magnético da onda nos meios delimitados pela interface de separação.

- Estas chamadas ***condições de contorno*** para o campo elétrico ($\vec{E}$ e $\vec{D}$) são obtidas a partir das *Leis de Gauss* e *Lei de Faraday*, supondo uma superfície cilíndrica gaussiana e uma circuitação retangular bem próximas à interface ($h \to 0$).



- Partindo da ***Lei de Gauss*** ($\oint \vec{D}\cdot d\vec{A} = q_{\text{int}}^{livre}$), $d\vec{A} = dA\,\hat{n}$ e aplicando-a na *pastilha cilíndrica* acima de área ΔS e altura h (muito pequena):

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{A} = \int_{\substack{\text{superf}\\ \text{superior}}} \vec{D}\cdot d\vec{A} + \int_{\substack{\text{superf}\\ \text{inferior}}} \vec{D}\cdot d\vec{A} + \underbrace{\cancel{\int_{lateral} \vec{D}\cdot d\vec{A}}}_{=0\ (\,fluxo\ nulo\ para\ h\to 0\,)} = D_{2\perp}\Delta S - D_{1\perp}\Delta S$$

$$q_{\text{int}}^{livre} = \int \sigma_{livre}\, dA = \sigma_{livre}\Delta S$$

- Portanto: $D_{2\perp}\cancel{\Delta S} - D_{1\perp}\cancel{\Delta S} = \sigma_{livre}\cancel{\Delta S} \;\Rightarrow\; \boxed{D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{livre}}$

- Quando não ***houver cargas livres na interface***:

$$\boxed{D_{2\perp} = D_{1\perp}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{E_{2\perp}}{E_{1\perp}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

- Aplicando a ***Lei de Faraday*** na *circuitação* ***abcd*** (veja o desenho):

$$\varepsilon = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\cancel{\int \vec{B}\cdot d\vec{A}}}_{\substack{fluxo\,=\,0\\ no\,limite\ h\to 0}}$$

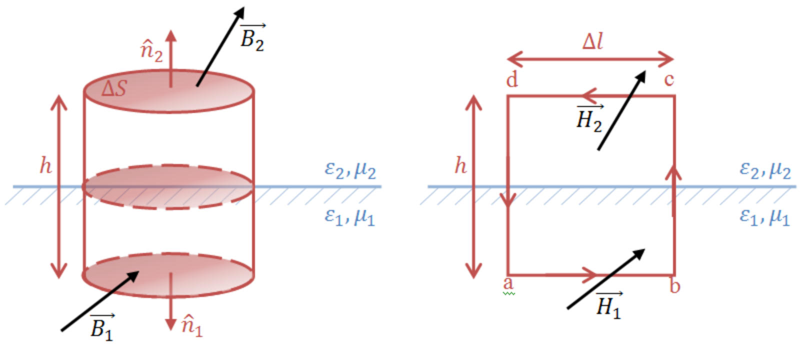
$$\Rightarrow \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \underbrace{\cancel{\int_b^c \vec{E}\cdot d\vec{l}}}_{=0\ (h\to 0)} + \int_c^d \vec{E}\cdot d\vec{l} + \underbrace{\cancel{\int_d^a \vec{E}\cdot d\vec{l}}}_{=0\ (h\to 0)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_{1//}\Delta l - E_{2//}\Delta l = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{E_{1//} = E_{2//}} \;\; (Sempre!!)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{D_{1//}}{D_{2//}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

- Seguindo o mesmo procedimento para o campo magnético usando agora as outras duas equações de Maxwell:



- Usando que $\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$:

$$-B_{1\perp}\Delta S + B_{2\perp}\Delta S = 0 \Rightarrow \boxed{B_{1\perp} = B_{2\perp}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{H_{1\perp}}{H_{2\perp}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

- E da *Lei de Ampère*:

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enl}^{real} + \underbrace{\varepsilon \frac{d\phi_E}{dt}}_{\substack{\text{corrente de}\\ \text{deslocamento}}} \;; \qquad \text{sendo que: } \frac{d\phi_E}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{\cancel{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}}_{\substack{\text{fluxo=0}\\ \text{para } h\to 0}} = 0$$

- Assim: $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{H}\cdot d\vec{l} + \underbrace{\cancel{\int_b^c \vec{H}\cdot d\vec{l}}}_{=0\ (h\to 0)} + \int_c^d \vec{H}\cdot d\vec{l} + \underbrace{\cancel{\int_d^a \vec{H}\cdot d\vec{l}}}_{=0\ (h\to 0)} = I_{enl}^{real}$

- Enquanto que a corrente enlaçada, na condição $h \to 0$, envolverá somente uma corrente superficial (real) que atravessa perpendicularmente a área delimitada pela circuitação (K).

- Ou seja:

$$H_{1//}\cancel{\Delta l} - H_{2//}\cancel{\Delta l} = \mathrm{K}\cancel{\Delta l} \Rightarrow \boxed{H_{1//} - H_{2//} = \mathrm{K}_{real}^{superf}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{B_{1//}}{\mu_1} - \frac{B_{2//}}{\mu_2} = \mathrm{K}}$$

- Agora, na grande maioria dos materiais temos que $\mu_1 \sim \mu_2 \sim \mu_0$ e <u>quando</u> $\sigma = \mathrm{K} = 0$, temos que as condições de contorno dos campos elétrico e magnético a serem satisfeitas ***na interface entre dois dielétricos*** são:

$$\begin{cases} \boxed{E_{1//} = E_{2//}} \\ \boxed{D_{1\perp} = D_{2\perp}} \\ \boxed{B_{1\perp} = B_{2\perp}} \\ H_{1//} = H_{2//} \Rightarrow \boxed{B_{1//} = B_{2//}} \end{cases}$$

- Na próxima aula, veremos o que ocorre com uma onda eletromagnética, ao incidir na interface entre dois meios dielétricos.