

Física IV – Poli – Engenharia Elétrica: 12ª Aula (25/09/2014)

Prof. Alvaro Vannucci

Na última aula vimos:

- *Modelo de Bohr* para o átomo de hidrogênio: órbitas permitidas são as que possuem momento angular: $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = mvr = n\hbar$; $n = 1, 2, 3, \dots$
- De forma que: $r_n = n^2 a_0$; $a_0 = \frac{\hbar^2}{mKe^2} = 0,53\text{Å} \equiv \begin{matrix} \text{Raio de Bohr} \\ \text{(Estado Fundamental)} \end{matrix}$
- Quanto aos valores de energia de cada nível: $E_n(H) = -\frac{Ke^2}{2a_0} \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2} \text{(eV)}$
- Quando o átomo de um nível passa para outro de menor energia, um fóton com energia $E = E_{inicial} - E_{final} = hf$, sendo que o comprimento de onda deste fóton será dado por:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Ke^2}{2hca_0} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$R_H = 1,097 \times 10^7 \text{m}^{-1} \\ \text{(Constante de Rydberg)}$$

- Generalizando o modelo para átomos hidrogenóides (He^+ , Li^{++} , Be^{+++}):

$$r_n = \frac{a_0}{Z} n^2 \quad \text{e} \quad E_n = \frac{-Ke^2}{2a_0} \left(\frac{Z^2}{n^2} \right); \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

-
- Vimos então que experiências como a emissão de *radiação por um corpo negro*, *efeito fotoelétrico*, *espalhamento Compton* e os *espectros do hidrogênio* não puderam ser explicadas pela Física Clássica (teoria ondulatória): foi preciso quantizar os níveis de energia atômica e, conseqüentemente, a radiação eletromagnética.
 - Por outro lado, se aceitarmos o caráter corpuscular da radiação eletromagnética, como entender os resultados de interferência na experiência de fenda-dupla de Thomas Young?
 - Esta questão acabou ganhando um caráter ainda mais complexa quando Louis de Broglie propôs, em 1923 (prêmio Nobel de 1929), associar ao elétron um comportamento ondulatório (foi sua tese de doutorado).

➤ Pela proposta de de Broglie, toda partícula com momento linear p deveria ter,

associada a ela, um comprimento de onda λ , de forma que: $p = \frac{h}{\lambda}$

(ou $p = \hbar K$; sendo $\hbar = \frac{h}{2\pi}$)

➤ Três anos depois dele realizar esta proposta, o caráter ondulatório do elétron foi confirmado experimentalmente por Davisson-Germer ao observar franjas de interferência após a incidência de um feixe de elétrons em cristais.

➤ **Exemplo 1:** Ache o comprimento de onda de de Broglie para um próton que se move com velocidade de 10^7 m/s e para uma pedra com massa 50 g e velocidade 40 m/s .

➤ **Resolução:**

$$p = \hbar K = \frac{h}{\lambda}; \quad p = mv \Rightarrow \lambda = \frac{h}{mv}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{elétron: } \lambda_e = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{(9,1 \times 10^{-31})(10^7)} \Rightarrow \lambda_e = 7,3 \times 10^{-11} \text{ m} \\ \text{pedra: } \lambda_p = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{(50 \times 10^{-3})(40)} \Rightarrow \lambda_p = 3,3 \times 10^{-34} \text{ m} \end{array} \right.$$

corresponde aproximadamente ao comprimento de onda dos raios-X do espectro eletromagnético.

valor muito menor que qualquer abertura por onde a pedra poderia passar; por isso, o “efeito de difração” da pedra não é observado.

➤ **Exemplo 2:** Tem-se um fóton e um elétron, ambos com energia $E = 1 \text{ eV}$. Determine $\lambda_{\text{fóton}}$ e $\lambda_{\text{elétron}}$, dados que $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ e $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

➤ **Resolução:**

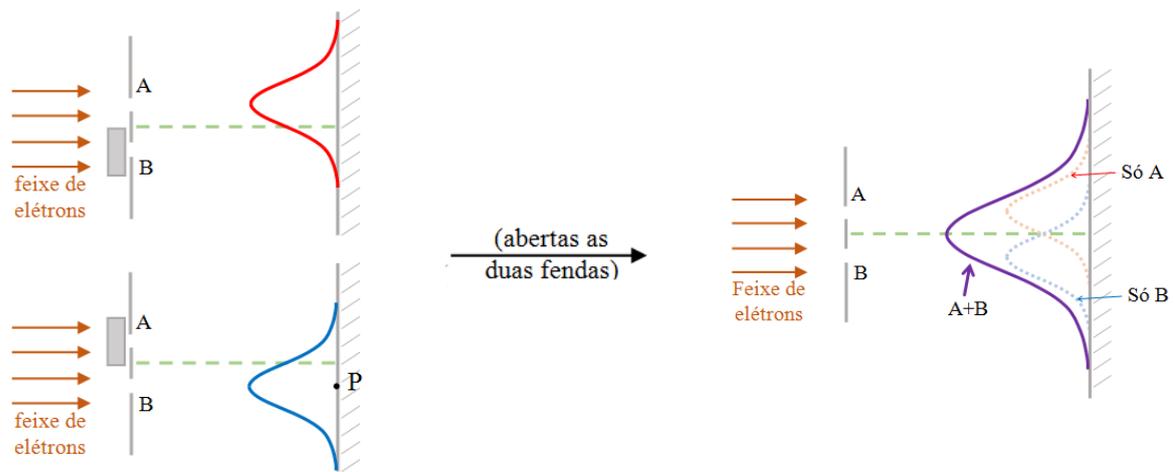
• Fóton: $E = hf = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{(6,63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(1,6 \times 10^{-19})} \Rightarrow \lambda_f = 1,2 \times 10^{-6} \text{ m};$

• Elétron: $E = E_c = \frac{p^2}{2m}$; sendo que $p = \frac{h}{\lambda}$.

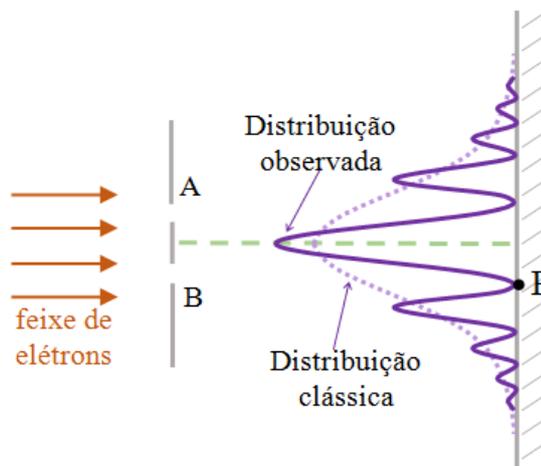
$$\therefore \frac{h^2}{\lambda^2} = 2mE \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{\sqrt{(2)(9,1 \times 10^{-31})(1,6 \times 10^{-19})}} \Rightarrow \lambda_e = 1,6 \times 10^{-9} \text{ m}$$

➤ Portanto, com mesma energia, $\lambda_f \cong 10^3 \lambda_e$.

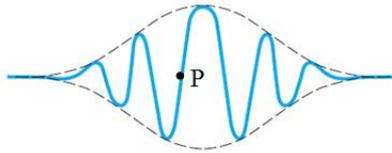
- Retornando à experiência de Davisson-Germer, o resultado esperado classicamente em uma experiência de fenda dupla usando-se partículas, seria uma distribuição de impactos no anteparo como a mostrado abaixo.



- Porém, o que se observou experimentalmente é:



- E este padrão é obtido mesmo fazendo-se passar pelas fendas apenas um elétron de cada vez!!
- Como entender este comportamento, sabendo-se que não dá para “dividir” um elétron (por comprovação experimental)?
- Ou seja, colocando-se um detector no ponto P do anteparo (figura acima) e abrindo apenas a fenda B, 100 elétrons/s são medidos, por exemplo.
- E quando as duas fendas são abertas, esperando-se detectar no tempo um número maior de elétrons, quase nada é medido!
- Uma maneira de se tentar compreender observações experimentais deste tipo é associar algum tipo de *função de onda* ou talvez um *pacote de ondas*, que resultaria da soma de várias ondas planas de diferentes frequências e amplitudes:



- Neste contexto, é importante ressaltar a diferença entre *velocidade de fase* da onda (o ponto P da figura percorre toda a trajetória sinusoidal) e a *velocidade de grupo* (relacionada com o deslocamento do pacote de ondas como um todo).
- O cálculo de uma velocidade e outra se faz através das expressões:

$$\boxed{v_{fase} = \frac{\omega}{K}} \text{ e } \boxed{v_{grupo} = \frac{d\omega}{dK}} \text{ ou } \boxed{\omega_{grupo} = \frac{dE}{dp}}$$

- Nossa tarefa, a partir de agora, será descobrir qual é a **função de onda** ψ mais adequada para descrever os vários sistemas de interesse.
- No caso de uma partícula livre que se desloca ao longo do eixo x :

$$\underline{\psi(x,t) = Ae^{i(Kx-\omega t)}} \text{ (em 1D)}$$

- Sendo que, da relação de Euler ($e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$):

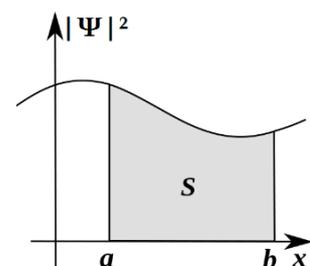
$$\underline{\text{Re}(\psi) = A \cos(Kx - \omega t)} \text{ e } \underline{\text{Im}(\psi) = A \sin(Kx - \omega t)}$$

- Conceito importante: a função de onda ψ , na verdade, não possui significado físico algum; é apenas uma função matemática que nos ajudará a entender o caráter ondulatório relacionado com os vários sistemas que iremos estudar.
- Porém, o módulo ao quadrado, $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ (denominamos ψ^* como sendo o *complexo conjugado de ψ*) terá um significado muito importante. Ele fornecerá a “probabilidade por unidade de volume (3D) de se encontrar o sistema em um dado estado, em um certo instante t ”.
- No caso de uma partícula, por exemplo, a probabilidade de ser encontrada em um certo elemento infinitesimal de volume dV em um certo instante t será:

$$\underline{P = |\psi|^2 dV} ; \text{ sendo que em uma dimensão: } \underline{P = |\psi|^2 dx}$$

- Em relação a esta última expressão, note que se construirmos o gráfico de $|\psi|^2$ (para um instante de tempo t qualquer) por x teremos uma **curva de distribuição de probabilidades** de forma que se desejarmos a “probabilidade de se encontrar a partícula no intervalo $a \leq x \leq b$ ”, devemos calcular:

$$\boxed{P = \int_a^b |\psi|^2 dx} ; \text{ ou então determinar a área sob a curva.}$$



➤ Pergunta: Qual a probabilidade de se encontrar a partícula em todo o espaço $(-\infty \leq x \leq \infty)$?

➤ Resposta: Tem que ser 100%! Nem mais e nem menos! Isto significa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

➤ Em muitas situações, após encontrarmos a função ψ para um dado sistema, precisamos verificar se a condição acima está de fato sendo satisfeita; ou seja, precisamos verificar se a função obtida encontra-se *normalizada*.

➤ Se precisarmos normalizar uma função de onda, devemos então impor que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

➤ Agora, se estivermos lidando com uma grandeza $f(x)$ qualquer que envolve a partícula (como a posição, o momento linear, a velocidade, etc.) se quisermos saber o *valor médio (valor esperado)* desta grandeza, basta fazer:

$$\overline{f(x)} = \langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi f(x) \psi^* dx$$

➤ **Exercício 55 – capítulo 28:** Um elétron é representado pela função de onda independente do tempo:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-Kx} & \text{para } x > 0 \\ Ae^{+Kx} & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

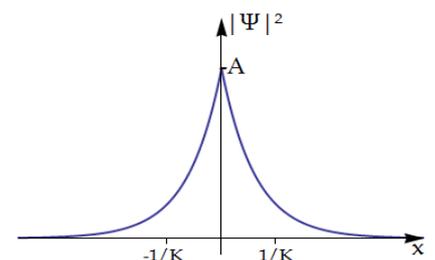
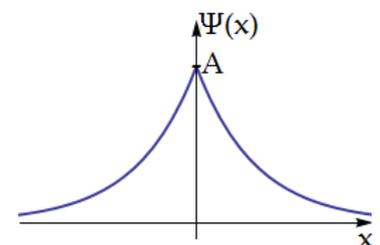
- Construa o gráfico da função de onda para todos os x .
- Construa o gráfico da densidade de probabilidade de se encontrar o elétron em um intervalo x e $x+dx$ qualquer.
- Normalize a função de onda.
- Qual a probabilidade de encontrar o elétron entre $x_1 = -\frac{1}{2K}$ e $x_2 = \frac{1}{2K}$?

➤ **Resolução:**

$$\text{a) } \psi(x) = \begin{cases} Ae^{-Kx} & \text{para } x > 0 \text{ (decaimento exponencial)} \\ Ae^{+Kx} & \text{para } x < 0 \text{ (decaimento exponencial)} \end{cases}$$

sendo que para $x=0 \rightarrow \underline{\psi(x=0) = A}$

$$\text{b) } |\psi(x)|^2 = \begin{cases} Ae^{-2Kx} & \text{para } x > 0 \text{ (decrece mais rapidamente)} \\ Ae^{+2Kx} & \text{para } x < 0 \text{ (decrece mais rapidamente)} \end{cases}$$



c) Notando que a curva $|\psi|^2$ é simétrica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 2 \int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 2 \int_0^{\infty} A^2 e^{-2Kx} dx = 1$$

$$\therefore (2A^2) \left(-\frac{1}{2K} e^{-2Kx} \right) \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \left(-\frac{2A^2}{2K} \right) (e^{-\infty} - e^0) = 1 \Rightarrow \underline{A = \sqrt{K}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{constante de} \\ \text{normalização} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{d)} \quad P = (2) (\sqrt{K})^2 \int_0^{1/2K} e^{-2Kx} dx = (\cancel{2K}) \left(-\frac{1}{\cancel{2K}} \right) (e^{(\cancel{2K})(1/\cancel{2K})} - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = 1 - e^{-1} = 0,63}$$