PEF2602
Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

Estruturas Hiperestáticas
&
Não-Linearidade do Comportamento Estrutural

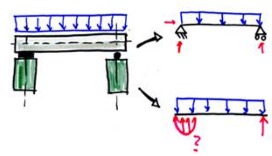
(Aula 7 – 10/10/2016)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti & Leila Meneghetti Valverdes
2º Semestre 2016

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

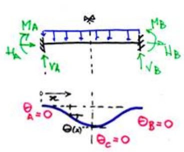
Denominam-se de estruturas hiperestáticas aquelas estruturas que exigem a consideração das deformações, na determinação de suas reações de apoio e de seu estado interno de tensões.

A rigor, todas as estruturas são hiperestáticas! Mesmo uma viga biapoiada, somente é isostática quando os apoios são considerados como pontuais, o que é uma idealização das condições de apoio reais, as quais envolvem uma distribuição de forças cuja determinação requer o estudo das deformações dos materiais.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

No próximo semestre (PEF2603) veremos uma método clássico de resolução de vigas hiperestáticas ('método dos esforços').



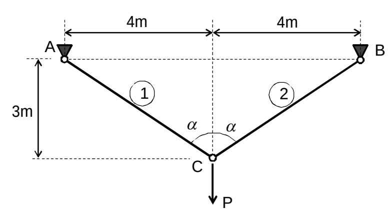
Viga 3 vezes hiperestática!

3 equações de compatibilidade!

Neste semestre (PEF 2602), limitamo-nos à introdução do conceitos de hiperestaticidade e ao estabelecimento das equações de compatibilidade, resolvendo alguns problemas simples de treliças e sistemas estaiados!

TRELIÇAS

Seja a treliça composta por duas barras:



Valem as relações:

$\sin\alpha = 4/5 = 0{,}8$

$\cos\alpha = 3/5 = 0{,}6$

São dados:

$P = 100kN$

$E = 210GPa$

$s = 2$

$\sigma_e = 600MPa$

* Pede-se determinar os esforços nas barras e o deslocamento do ponto C, sob ação da carga P!

Regra de Maxwell

* Cada nó de uma treliça plana treliça fornece duas equações de equilíbrio

- Logo, sendo n o número de nós, tem-se um total de **2n** equações de equilíbrio;

* Cada barra treliça fornece um esforço solicitante, inicialmente incógnito

- Logo, sendo b o número de barras tem-se um total de ***b*** esforços incógnitos;

* Cada vínculo externo também fornece uma incógnita!

- Logo, sendo ***r*** o número de vínculos, tem-se um total de incógnitas igual ***(r+b)***

* Uma condição necessária (mas não suficiente) para que uma treliça seja isostática, isto é, possa ser resolvida exclusivamente por equações de equilíbrio é que $2n = b + r$

* Se $b + r > 2n$, existe um excesso de incógnitas, e novas equações devem ser acrescentadas para a resolução do problema – a treliça é hiperestática!

* Se $b + r < 2n$, existe uma carência de vínculos (internos e externos), e a treliça é hipostática (apresenta movimentos de corpo rígido ou mecanismos!)

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

Regra de Maxwell

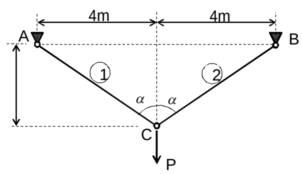
- Reescrevendo e resumindo, tem-se:

Regra de Maxwell
(para treliças planas):

$$2n - b \begin{cases} < \text{r} \;\therefore \text{hiperestática} \\ = \text{r} \;\therefore \text{isostática} \\ > \text{r} \;\therefore \text{hipostática} \end{cases}$$

- Observa-se que a regra de Maxwell apresenta condições necessárias, mas não suficientes, para os casos de treliças isostáticas ou hiperestáticas, pois o arranjo das barras e vínculos pode ser deficiente!

Voltando ao nosso exemplo:



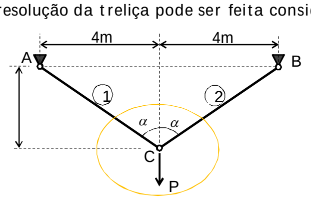
$$\{n = 3\,;\, b = 2\,;\, r = 4\}$$

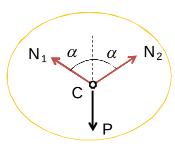
$$\therefore$$

$$2 \cdot 3 - 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Treliça Isostática!}$$

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

A resolução da treliça pode ser feita considerando o equilíbrio do nó C:





$$\sum F_X = 0 \quad \therefore \quad (N_2 - N_1)\sin\alpha = 0 \quad \therefore \quad N_1 = N_2 = N$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \therefore \quad 2N\cos\alpha - P = 0 \quad \therefore \quad N = \frac{P}{2\cos\alpha} = \frac{100}{2\cdot(3/5)} \qquad \boxed{N = 83{,}33kN}$$

Note que, por ser um problema isostático, a resolução não depende do material, ou do dimensionamento, ou das deformações da estrutura, apenas das forças!

Note também que o equilíbrio foi determinado considerando a geometria inicial da estrutura, ou seja, desprezando as deformações que o sistema experimenta!

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

Dimensionamento

Recordando: $E = 210GPa$
$\sigma_e = 600MPa$
$s = 2$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{s} = \frac{600}{2} = 300MPa$$

Critério de Dimensionamento: $\sigma_{\max} \leq \bar{\sigma}$

$$\frac{N_{\max}}{A} = \frac{N}{\left(\frac{\pi\phi^2}{4}\right)} \leq \bar{\sigma}$$

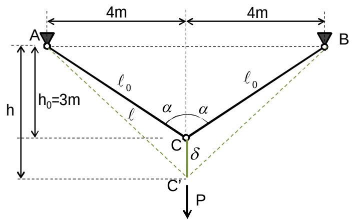
$$\phi \geq \sqrt{\frac{4 \cdot N}{\pi\bar{\sigma}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 83{,}33 \times 10^3}{\pi \cdot 300 \times 10^6}} = 0{,}0188m$$

$$\boxed{\phi_{\min} = 18{,}8mm}$$

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

Deformações

Problema: determinar o deslocamento do ponto C:



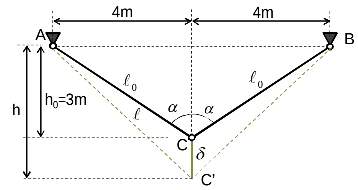
1) deformações das barras, admitindo que as mesmas sejam dimensionadas com $\phi_{\min}$:

Por definição: $\varepsilon = \dfrac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad \therefore \quad \ell = (1+\varepsilon)\ell_0$

Lei de Hooke: $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{300\times10^6}{210\times10^9} = 1{,}43\times10^{-3} \quad \therefore \quad \ell = \left(1+1{,}43\times10^{-3}\right)\cdot 5 = 5{,}0071m$

Deformações

Problema: determinar o deslocamento do ponto C:

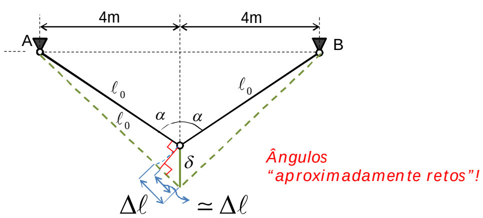


Deslocamento do ponto C: $\delta = h - h_0 = \sqrt{\ell^2 - a^2} - h_0$

$$\delta = \sqrt{5{,}0071^2 - 4^2} - 3 = 0{,}0118m = 1{,}18cm$$

Note que no cálculo acima considerou-se que as forças normais não são afetadas pelas variações geométricas, o que parece razoável, já que os deslocamentos são pequemos em relação às dimensões da estrutura!

Cálculo aproximado (´Diagrama de Williot´)

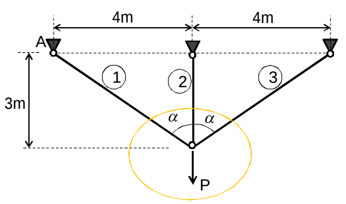


$\Delta\ell \simeq \delta\cos\alpha \qquad \delta = \dfrac{\Delta\ell}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}0071}{3/5} = 0{,}0118m = 1{,}18cm$ *Ok!*

O Diagrama de Williot é válido para pequenos deslocamentos e rotações!!

TRELIÇAS HIPERESTÁTICAS

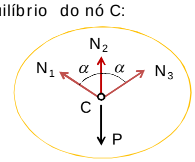
Acrescentando mais uma barra ao exemplo anterior:



$$2n - b \begin{cases} < \text{r} \ \therefore \text{hiperestática} \\ = \text{r} \ \therefore \text{isostática} \\ > \text{r} \ \therefore \text{hipostática} \end{cases}$$

$2\cdot4-3 = 5 < 6 \quad 1\times$ hiperestática

Equilíbrio do nó C:



$\sum F_X = 0 \quad \therefore \quad (N_3 - N_1)\sin\alpha = 0 \quad \therefore \quad N_3 = N_1$

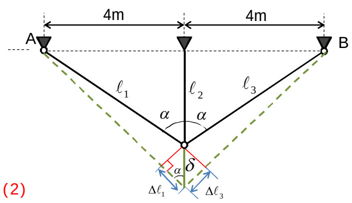
$\sum F_Y = 0 \quad \therefore \quad 2N_1\cos\alpha + N_2 - P = 0$ (1)

A resolução desta treliça requer uma equação adicional às equações do equilíbrio!

TRELIÇAS HIPERESTÁTICAS

Esta equação adicional é dada pela necessária compatibilidade entre as deformações das barras!

Diagrama de Williot:



$$\boxed{\Delta\ell_2 = \delta}$$

$$\boxed{\Delta\ell_1 = \Delta\ell_3 \simeq \delta\cos\alpha} \quad (2)$$

(2 equações de compatibilidade de deslocamentos, sendo que uma reflete a simetria do problema)

TRELIÇAS HIPERESTÁTICAS

Sabendo que: $\Delta\ell_i = \dfrac{N_i\ell_i}{E_iA_i} \quad \therefore \quad N_i = \dfrac{E_iA_i}{\ell_i}\Delta\ell_i$ (3) (Incorpora a Equação Constitutiva – Lei de Hooke)

Admitindo: $E_iA_i = EA,$ constante (barras de mesmo material e mesma seção transversal!)

Combinando (3) e (2):

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell_1}{EA} = (\delta\cos\alpha)$$

$$\frac{N_1\ell_1}{EA\cos\alpha} = \delta$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{N_2\ell_2}{EA} = \delta$$

$$\delta = \frac{N_1\ell_1}{EA\cos\alpha} = \frac{N_2\ell_2}{EA}$$

$$\boxed{N_1 = \frac{N_2\ell_2\cos\alpha}{\ell_1}} \quad (4)$$

TRELIÇAS HIPERESTÁTICAS

Substituindo (4) em (1), temos:

$$2\cdot\frac{N_2\ell_2}{\ell_1}\cos^2\alpha + N_2 = P \quad \therefore \quad \boxed{N_2 = \left(\frac{\ell_1}{\ell_1 + 2\ell_2\cos^2\alpha}\right)P} \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4): $\boxed{N_1 = \left(\dfrac{\ell_2\cos\alpha}{\ell_1 + 2\ell_2\cos^2\alpha}\right)P}$

Para dos dados do problema : $\left\{\ell_1 = \ell_3 = 5m\,;\, \ell_2 = 3m\,;\, \cos\alpha = \dfrac{3}{5}\right\}$

$$\boxed{N_2 = \left(\frac{5}{5+2\times3\times(3/5)^2}\right)P = \frac{125}{179}P \simeq 0{,}7P} \qquad \boxed{N_1 = \left(\frac{3\times(3/5)}{5+2\times3\times(3/5)^2}\right)P = \frac{45}{179}P \simeq 0{,}2514P}$$

Verificando com (1): $2\times\left(\dfrac{45}{179}P\right)\times\dfrac{3}{5} + \left(\dfrac{125}{179}P\right) = P$ OK!

TRELIÇAS HIPERESTÁTICAS

Outra verificação interessante, consiste em considerar o caso particular de três barras iguais atuando em paralelo

Nesse caso $\begin{cases} \alpha = 0 \quad \therefore \quad \cos\alpha = 1 \\ \ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell \\ EA = cte \end{cases}$

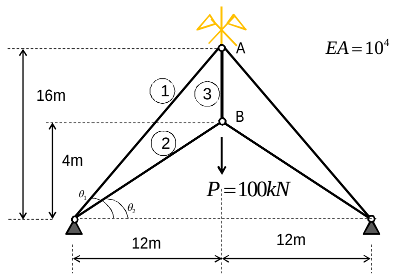
E por simetria, $N_1 = N_2 = N_3 = \dfrac{P}{3}$

De fato, considerando as expressões obtidas anteriormente,

$$N_1 = N_3 = \left(\frac{\ell\times1}{\ell + 2\times\ell\times(1)^2}\right)P = \frac{P}{3} \qquad N_2 = \left(\frac{\ell}{\ell+2\times\ell\times(1)^2}\right)P = \frac{P}{3}$$

OK!

Exercício: **Determinar os esforços nas barras da treliça:**



$2n - b \;< \text{r} \;\therefore \text{hiperestática}$

$= \text{r} \;\therefore \text{isostática}$

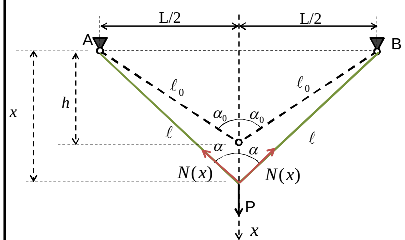
$> \text{r} \;\therefore \text{hipostática}$

$2 \cdot 4 - 5 = 3 < 4 \quad 1 \times \text{hiper}$

Não Linearidade Geométrica

Quando os deslocamentos não puderem ser desprezados, o problema se torna não-linear!

Nota: Esta seção é incluída apenas como ilustração -- não cai em prova!



$$\ell(x) = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + 4x^2}$$

$$\ell_0 = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + 4h^2}$$

$$\cos\alpha(x) = \frac{x}{\ell(x)}$$

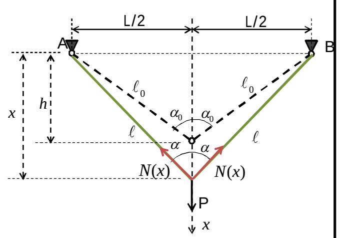
Não Linearidade Geométrica

(1) As forças normais nas barras variam com a geometria:

$$N(x) = EA\frac{\Delta\ell(x)}{\ell_0} = \frac{EA}{\ell_0}\left(\ell(x) - \ell_0\right)$$

$$\boxed{N(x) = k\left(\ell(x) - \ell_0\right)}$$

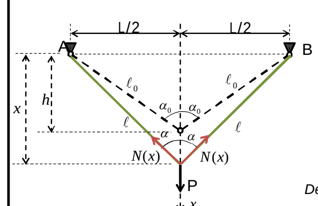
onde $k = \frac{EA}{\ell_0}$



(2) O equilíbrio vertical do nó C depende do ângulo $\alpha(x)$

$$2N(x)\cos\alpha(x) - P = 0 \quad \therefore \quad \boxed{2k\left(\ell(x) - \ell_0\right)\frac{x}{\ell(x)} - P = 0}$$

Não Linearidade Geométrica



Substituindo valores:

$$2k\left(\ell - \ell_0\right)\frac{x}{\ell} - P = 0$$

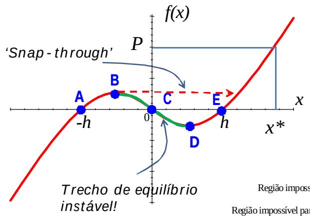
$$2k\left(1 - \frac{2\ell_0}{\sqrt{L^2 + 4x^2}}\right)x - P = 0$$

Definindo a resultante das forçar internas:

$$f(x) = 2k\left(1 - \frac{2\ell_0}{\sqrt{L^2 + 4x^2}}\right)x$$

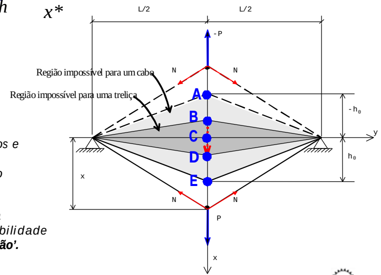
O equilíbrio é expresso por: $\boxed{f(x) - P = 0}$

Para cada valor de P, encontra-se numericamente a configuração de equilíbrio x!*



Para os dados do problema:

$P=100kN \rightarrow x^*=+3,115m$
$x_B=-1,602m \rightarrow P(x_B)=599\ kN=P_{crit}$
$x_D=1,602m \rightarrow P(x_D)=-599\ kN$



*O '**snap-through'** é um tipo de instabilidade característica de arcos e cascas abatidas esbeltas, matematicamente conhecido como **'ponto limite'.***

*Por outro lado, a **flambagem**, vista anteriormente, é um caso de instabilidade conhecido como **'ponto de bifurcação'.***