A intensidade média do padrão de interferência de dupla fenda (Capítulo 27)

Cálculo da Intensidade da radiação em cada ponto “P” da figura de interferência projetada em um anteparo situado a uma distância “L”>>”d” (distância) entre as fendas.

Supondo que as ondas emergentes das fendas “S1” e “S2” são coerentes (matêm uma relação de fase constante entre sí), com campo elétricos dados por:

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

No ponto “P” do anteparo, consideramos x=0 e portanto:

$$E = E_0 \cos(-\omega t) = E_0 \cos \omega t$$

No ponto “P” do anteparo, por terem percorrido distâncias diferentes, as duas ondas podem ou não estar em fase.

Para expressar uma possível diferença de fase podemos formular:

$$E_1 \cos(\omega t)$$
$$E_2 \cos(\omega t + \phi)$$

onde ϕ é a diferença de fase entre as duas ondas no anteparo e que depende da diferença de percurso:

$$\delta = r_1 - r_2 = dsen\theta$$

Para L>>d

Para uma diferença de percurso que seja λ (para interferência construtiva) a diferença de fase será de 2π

Para uma diferença de percurso qualquer a diferença de fase é dada por:

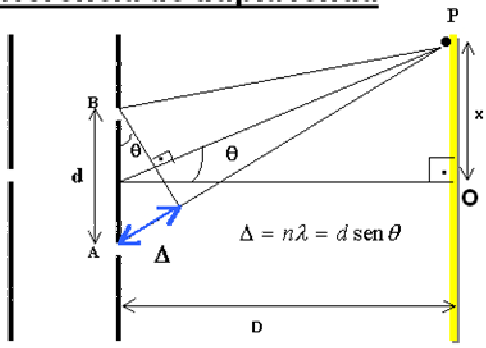
$$\frac{\lambda}{\delta}=\frac{2\pi}{\phi}\Rightarrow\phi=\frac{2\pi\delta}{\lambda}$$ (como visto em sala de aula)

$$\frac{\lambda}{\delta}=\frac{2\pi}{\phi}\Rightarrow\phi=\frac{2\pi\delta}{\lambda}=\frac{2\pi}{\lambda}dsen\theta=kdsen\theta$$

A intensidade média do padrão de interferência de dupla fenda

Duas fendas iluminadas pela mesma luz **monocromática** (λ) de modo que as duas fendas representam **fontes coerentes** de ondas senoidais **(relação de fase constante).**

Neste caso as **duas ondas têm a mesma frequência angular "ω"** e uma **diferença de fase constante em um ponto "P"** que **depende da diferença de percurso:**



$$\delta=dsen\theta$$

$$dsen\theta=n\lambda=\lambda(n=1)\Rightarrow$$ uma **diferença de percurso "λ"** corresponde a uma **diferença de fase** de **2π rad**,

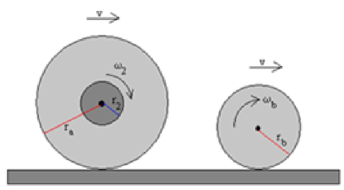
$$\delta=\lambda\Rightarrow$$

$$\phi=2\pi$$

de modo que podemos considerar as igualdades

$$\frac{\delta}{\phi}=\frac{\lambda}{2\pi}\Rightarrow\phi=\frac{2\pi}{\lambda}dsen\theta$$

$$\phi(\theta)$$



Para determinar o campo elétrico (e consequentemente, a intensidade da radiação) resultante no anteparo, usamos o princípio da superposição:

$$E_p=E_1+E_2=E_0\left[\cos\omega t+\cos(\omega t+\phi)\right]$$

Lembrando que $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}$

E assumindo

$$A = \omega t + \phi$$

$$B = \omega t$$

$$\frac{A+B}{2} = \frac{\omega t + \omega t + \phi}{2} = \frac{2\omega t + \phi}{2}$$

$$\frac{A-B}{2} = \frac{\omega t - \omega t + \phi}{2} = \frac{\phi}{2}$$

$$E_p = E_1 + E_2 = E_0[\cos\omega t + \cos(\omega t + \phi)] =$$

$$2E_0\cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Isto é, a onda resultante no ponto "P" tem a mesma frequência que as ondas originais mas a amplitude (que caracteriza a intensidade da onda) depende da diferença de fase de acordo com o termo:

$$2E_0\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Quando ϕ=0,2π,4π,.... a amplitude E_P da onda é máxima $2E_0$

Quando ϕ=0,π,3π,.... a amplitude E_P da onda é nula (interferência destrutiva)

Como detalhado em sala de aula:

Ondas eletromagnéticas transportam energia e a <u>**taxa de fluxo de energia**</u> atravessando uma unidade de área <u>***“A”***</u> é descrita pelo vetor de pointing <u>***“S”***</u>

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} = \vec{E} \cdot \vec{B}$$

Calculando $\vec{S}$ para uma onda eletromagnética plana.

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares entre si $\Rightarrow \left|\vec{E} \cdot \vec{B}\right| = EB$, assim neste caso :

$S = \dfrac{EB}{\mu_0}$, sendo $B = \dfrac{E}{c}$ também podemos formular :

$S = \dfrac{E^2}{\mu_0 c} = \dfrac{cB^2}{\mu_0}$ equações para S que se aplicam a $\forall$ instante de tempo.

A média temporal de S por um ou mais ciclos é a intensidade.

Isso involve a média temporal de $\cos^2(kx - \omega t)$ que é igual a $\dfrac{1}{2}$.

Desta forma, o valor médio de S ou a intensidade da onda é :

$$I = \overline{S} = \frac{E_{max} \cdot B_{max}}{2\mu_0} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c} = \frac{cB_{max}^2}{2\mu_0}$$

Portanto:

$$I \propto E_P^2 \Rightarrow I = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos^2\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Substituindo $\phi = kdsen\,\theta = \dfrac{2\pi d}{\lambda} sen\,\theta$

$$I_{med} = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d sen\theta}{\lambda}\right)$$

$$d sen\theta = \lambda \Rightarrow \cos^2(\pi) = 1$$

$$d sen\theta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$L >> d \Rightarrow sen\theta \approx tg\theta \approx \frac{x}{L} \Rightarrow$$

$$I_{med} = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d sen\theta}{\lambda}\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda L}x\right)$$

A intensidade média do padrão de interferência de dupla fenda é

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 27.4 (bottom)

$$I_{méd} = I_{máx} \cos^2\left(\frac{\pi \cdot d \cdot sen\theta}{\lambda}\right)$$

alternativamente, como $sen\theta \approx \dfrac{x}{L = D}$

para valores pequenos de θ temos

$$I_{méd} = I_{máx} \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda L}x\right)$$

onde $I_{máx}$ é a intensidade máxima na tela

$$\delta = d sen\theta = n\lambda = \lambda(n = 1) \Rightarrow$$

$$\delta = \lambda \Rightarrow$$

$$\phi = 2\pi \quad \div$$

$$\frac{\delta}{\phi} = \frac{\lambda}{2\pi} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{\lambda} d sen\theta$$