Física IV para a Escola Politécnica (Engenharia Elétrica)

4320293 – TURMA 3

Professor: Dr. Marcos A. G. Alvarez

Departamento de Física Nuclear (DFN) – IFUSP

Edifício Oscar Sala – (sala 246)

Escaninho 22

malvarez@if.usp.br

LIVRO: Princípios de Física (Óptica e Física Moderna)

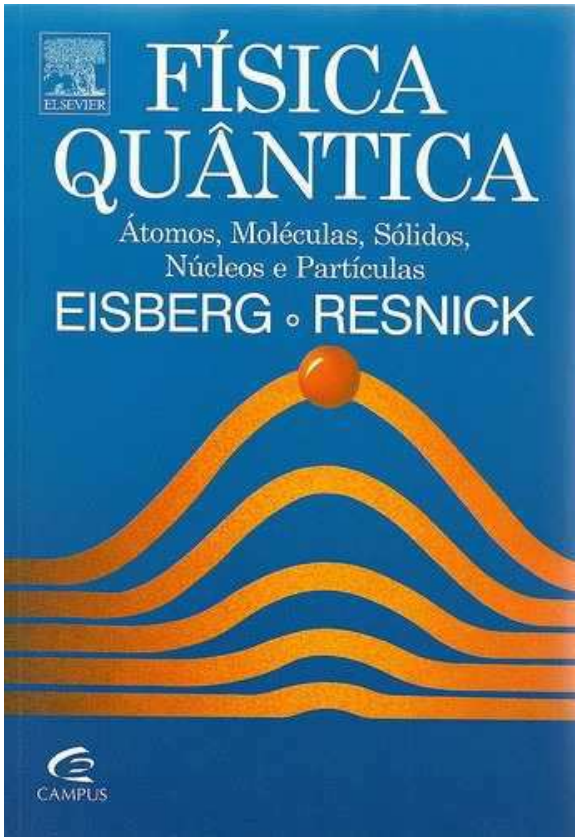
Raymond A. Serway / John W. Jewett Jr.

Volume 4

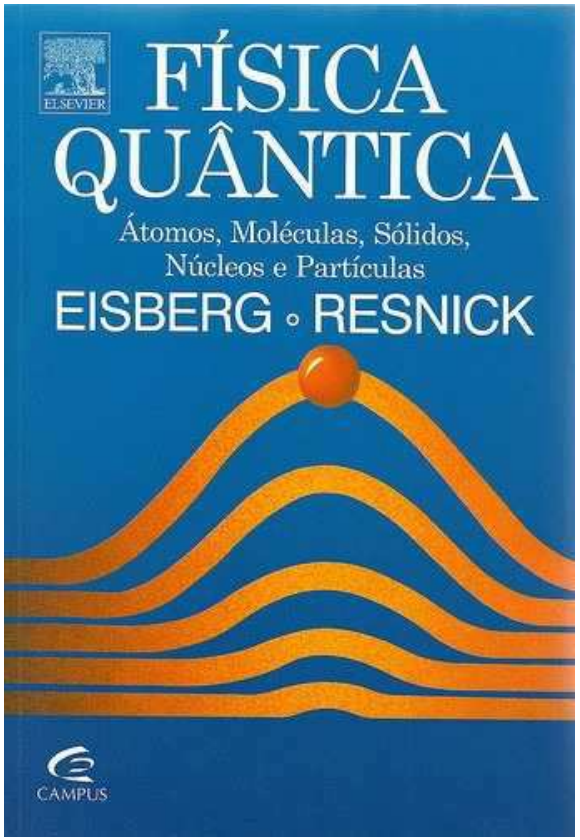
PROVA P2 – Capítulos 28 e 29 – Serway/Jewett vol. 4

CAPÍTULO 28: Física Quântica

- ❑ Radiação de corpo negro e a Teoria de Planck
- ❑ O Efeito Foto-Elétrico
- ❑ O Efeito Compton
- ❑ Fótons e Ondas Eletromagnéticas
- ❑ Propriedades Ondulatórias das Partículas
- ❑ **A Partícula Quântica**
- ❑ **Experiência de Dupla Fenda**



CAPÍTULO 28: Física Quântica



- ❑ **O Princípio da Incerteza**
- ❑ Mecânica Quântica
- ❑ Uma Partícula em uma Caixa
- ❑ A Equação de Schrödinger
- ❑ Tunelamento através de uma Barreira de Energia Potencial

Lista de exercícios sugerida – Capítulo 28:

28.4, .12, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 33, 35, 38, 42, 43, 52

❑ A partícula quântica

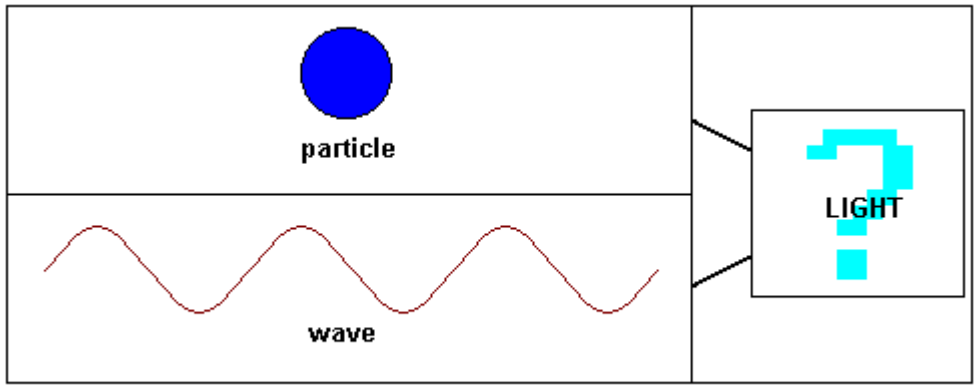
Antes:

- **modelos corpusculares (partículas com carga e massa)**
- **modelos ondulatórios (ondas)**

Depois: **Efeito Foto-Elétrico & Compton**

✓ Tanto a luz como as partículas têm propriedades corpusculares e ondulatórias

De Broglie $$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{mv}$$



How to imagine the wave-particle duality.

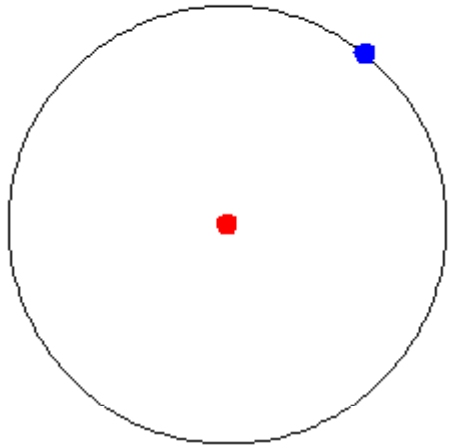
EXEMPLO 28.5 O comprimento de onda de um elétron

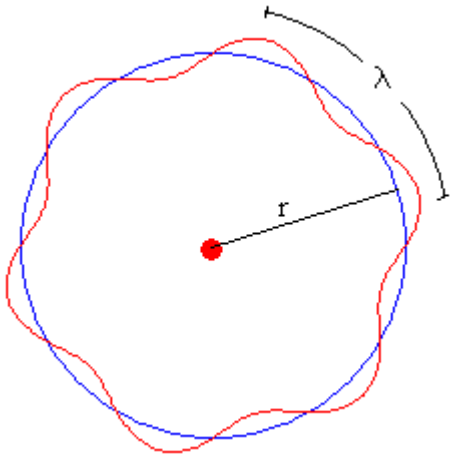
Calcule o comprimento de onda de De Broglie para um elétron deslocando-se com uma velocidade de:

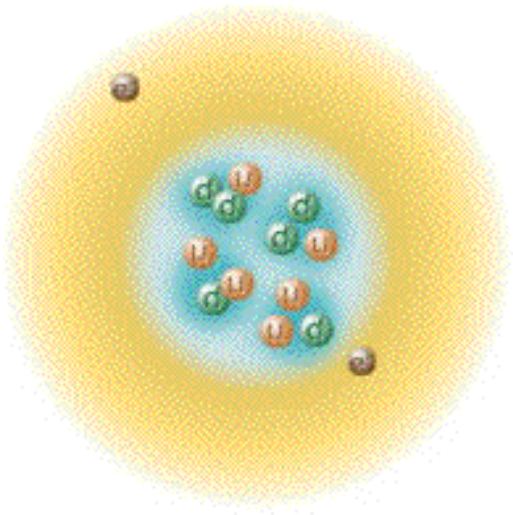
$$\mathrm{v} = 1\times10^{7}\, m/s$$

$$\text{sendo} \quad m_e = 9.11\times10^{-31}\, Kg$$

$$\lambda = \frac{h}{m_e \mathrm{v}}$$







EXEMPLO 28.5 O comprimento de onda de um elétron

Calcule o comprimento de onda de De Broglie para um elétron deslocando-se com uma velocidade de:

$$\mathrm{v} = 1\times10^{7}\, m/s$$

$$\text{sendo} \quad m_e = 9.11\times10^{-31}\, Kg$$

Solução

$$\lambda = \frac{h}{m_e \mathrm{v}} = \frac{6.63\times10^{-34}\, J\cdot s}{\left(9.11\times10^{-31}\, Kg\right)\cdot\left(1.0\times10^{7}\, m/s\right)} = 7.28\times10^{-11}\, m$$

Este comprimento de onda corresponde ao **comprimento de onda típico dos raios-X**

Exemplo 3-1 Eisberg & Resnick: Comprimento de onda de uma bola

Qual é o comprimento de onda de “De Broglie” de uma bola de beisebol com uma massa de 1Kg movendo-se a uma velocidade de 10m/s

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\mathrm{v}} = \frac{6.63\times10^{-34}\,J\cdot s}{1.0Kg\times10\,{}^{m}\!/_{s}} = 6.6\times10^{-35}m$$

Exemplo 28.7: Uma carga acelerada

Uma partícula de carga “q” e massa “m” é acelerada a partir do repouso por uma diferença de potencial ΔV. Supondo que a partícula desloca-se com velocidade não relativística, encontre seu comprimento de onda de de Broglie.

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = q\Delta V$$

$$p = m\mathrm{v}$$

Calcule o comprimento de onda de “de Broglie” de um elétron acelerado por uma diferença de potencial de 50V.

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

$$q_e = 1.6\times10^{-19}C$$

$$m_e = 9.11\times10^{-31}Kg$$

Exemplo 28.7: Uma carga acelerada

Uma **partícula de carga "q" e massa "m"** é acelerada a partir do repouso por uma **diferença de potencial ΔV**. Supondo que a partícula com velocidade não relativística, encontre seu **comprimento de onda de de Broglie**.

$$\lambda(q, m, \Delta V)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$$

$$p = mv$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = q\Delta V \quad \text{ou}$$

$$p = \sqrt{2mq\Delta V}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2emU_A}} \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{2qm\Delta V}}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2emU_A}}$$

Calcule o comprimento de onda de de Broglie de um elétron acelerado por uma diferença de potencial de 50V.

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2emU_A}} = \frac{6.63\times10^{-34}\,J\cdot s}{\sqrt{2\times1.6\times10^{-19}C\times9.11\times10^{-31}Kg\times50V}}$$

carga **massa**

$$\lambda = \frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{1457.6\times10^{-50}}} = \frac{6.63\times10^{-34}}{38.178\times10^{-25}} \approx 0.17nm$$

ENTIDADES CORPUSCULARES

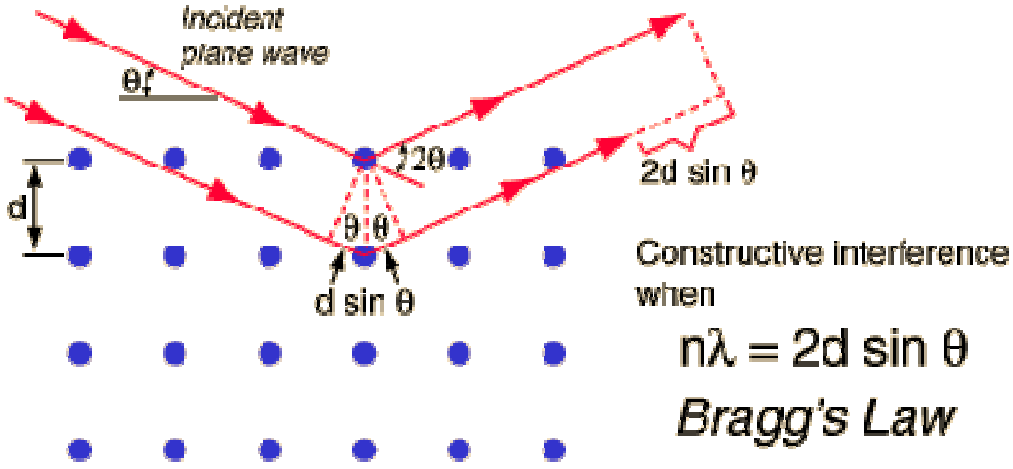
Resultados experimentais deveriam mostrar que
elétrons são difratados pelos planos de um cristal de maneira similar aos raios-X, sendo portanto aplicável a condição de Bragg.

$$2d sen\theta = n\lambda \quad (n = 1,2,3...)$$

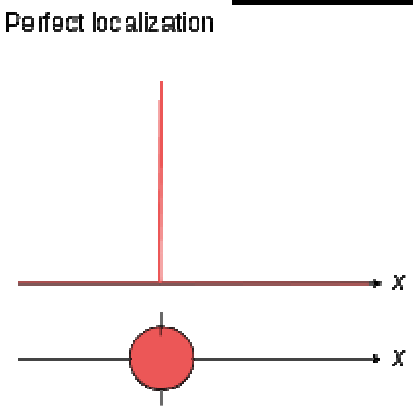
O comprimento de onda que devemos associar aos elétrons é previsto pela **hipótese de "De Broglie",** segundo a qual:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$$2d sen\theta = n\lambda \quad (n = 1,2,3...)$$

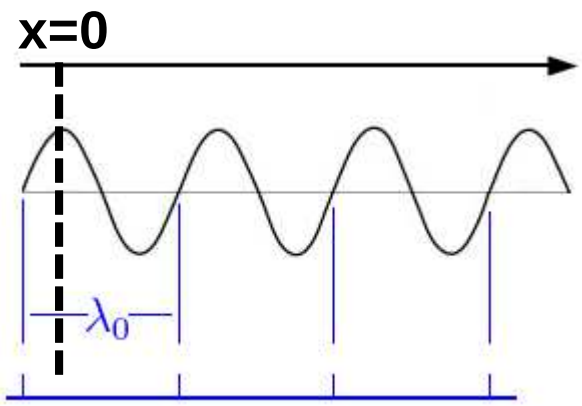


Uma característica essencial de uma **partícula** é que ela está ***localizada*** **no espaço.**



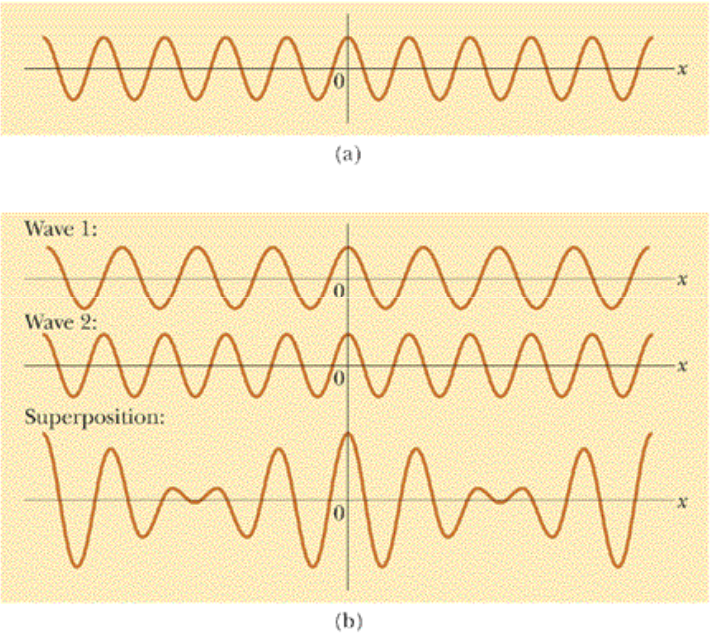
O primeiro passo é mostrar que podemos **construir uma entidade localizada** a partir de considerações **ondulatórias.**

Imagine traçar uma onda ao longo do eixo "x" com **uma de suas cristas *localizadas* em "x=0".**



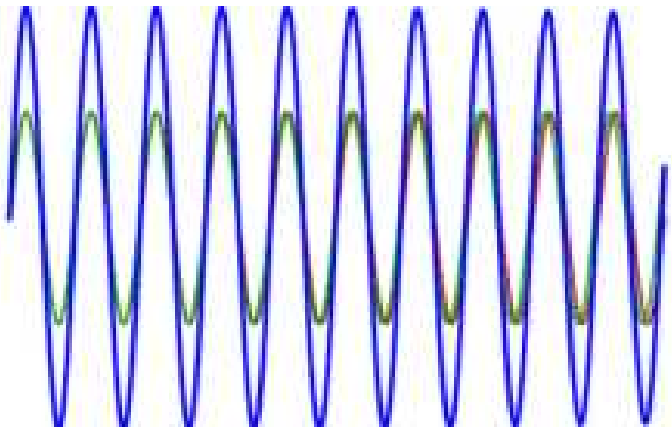
Logo uma **segunda onda** de **mesma amplitude** mas com uma **frequência diferente,** porém também com **uma de suas cristas em "x=0".**

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.13



→ **Frequências diferentes** e

→ **Amplitudes** **que coincidem em x=0**



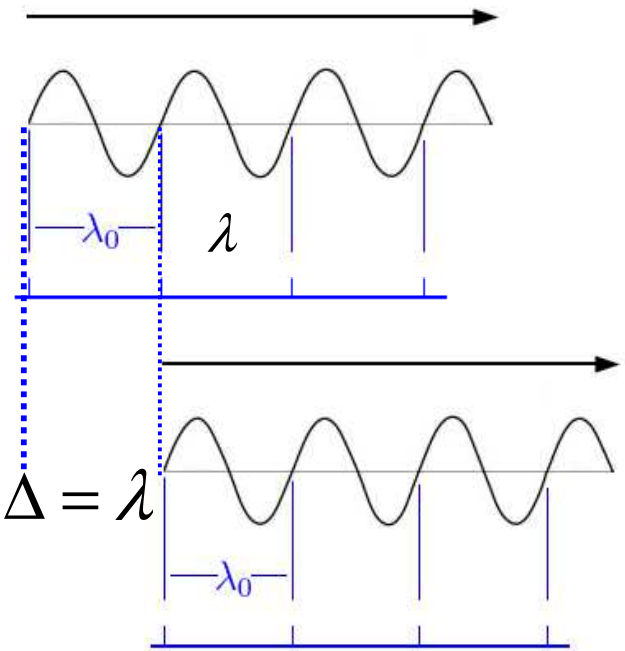
Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

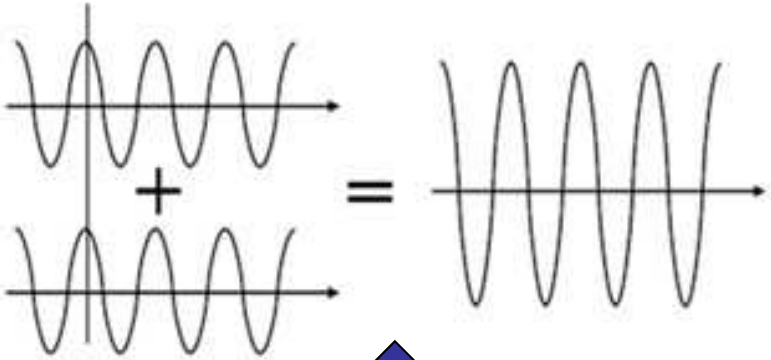
O **resultado da superposição** dessas duas ondas é um ***"batimento"*** pois as **ondas estão alternadamente em fase e fora de fase.**

Interferência entre ondas está conectada à
(diferença de) fase entre as ondas.

A diferença de fase entre duas ondas pode mudar

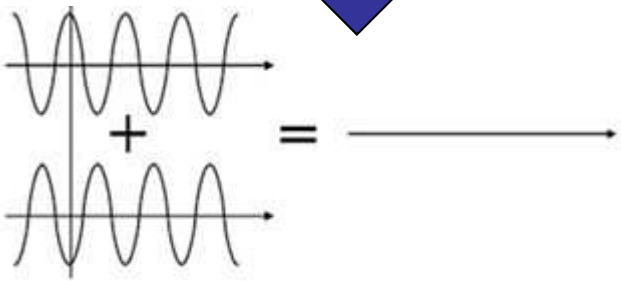
Interferência construtiva

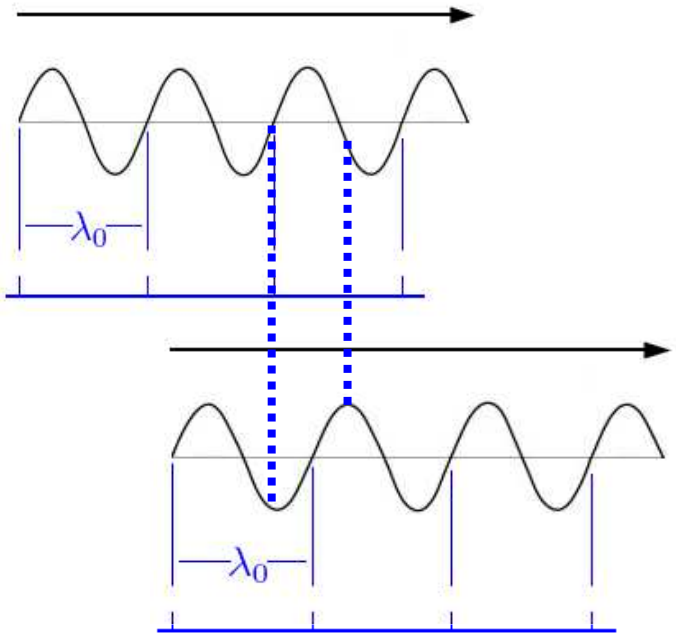


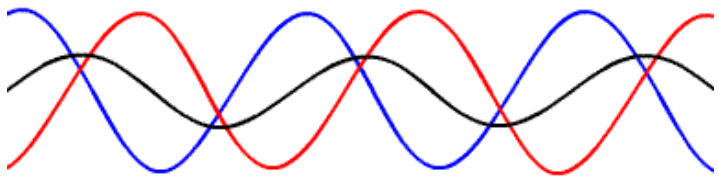


Dois casos extremos de interferência

Interferência destrutiva







Interferência de duas ondas com

- ❑ **mesma amplitude e**
- ❑ **mesma frequência**

Padrão de interferência contínuo no tempo
onda de cor preta é estacionária

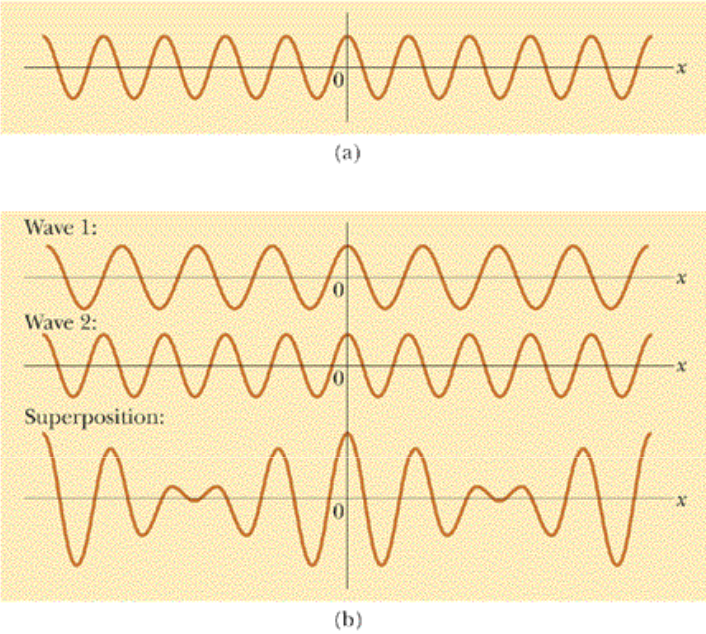
❑ **Interferências construtivas e destrutivas** entre ondas está conectada à (**diferença de) fase** entre as ondas.

❑ Duas **ondas podem ter distintas frequências (comprimentos de onda).**

❑ A **diferença de fase** entre duas ondas **pode mudar**.

❑ Considerando duas ondas com distintas frequências e mesma amplitude (A), existe uma amplitude (2A) máxima para a amplitude de uma interferência construtiva.

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.13



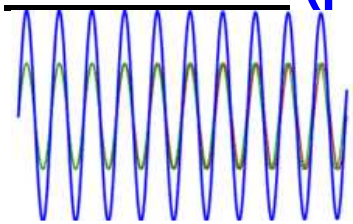
Interferência de duas ondas com

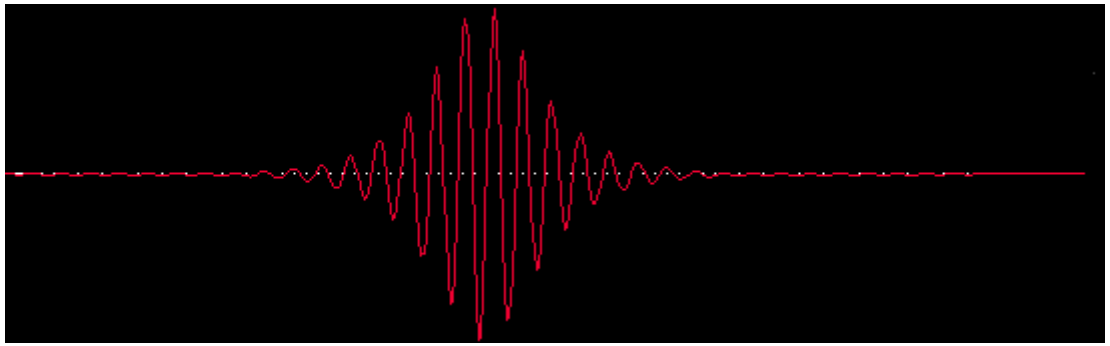
- ❑ mesma amplitude e
- ❑ **diferentes frequências**

Padrão de interferência **descontínuo** no tempo

(a) Uma onda idealizada com uma única frequência exata é a mesma por todo o espaço e em todo instante; (b) se são combinadas duas ondas ideais com frequências ligeiramente diferentes, surgem

(b) ***batimentos*** **(posições alternadamente em fase e fora de fase)**





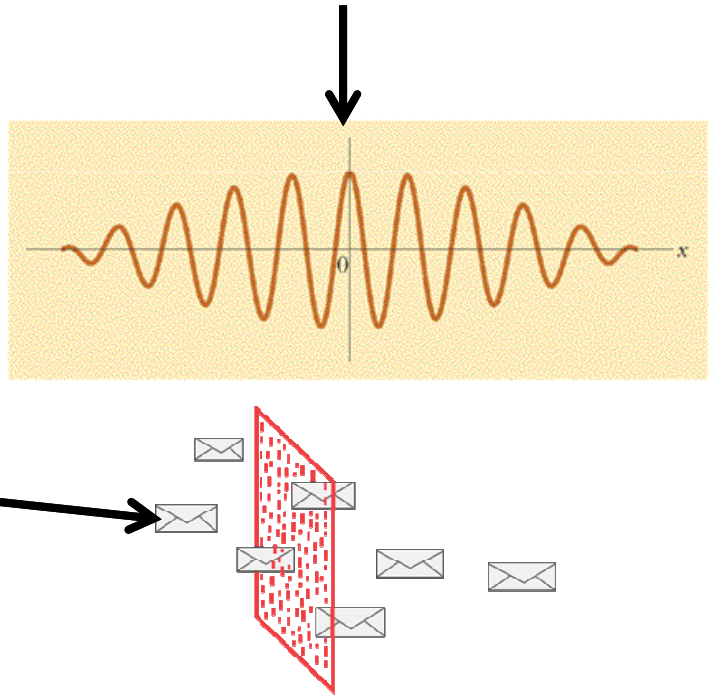
Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.14

Se adicionamos ondas, de modo que suas cristas coincidam com as demais ondas em x=0, a pequena região de interferência construtiva é denominada ***pacote de onda.***

Esta é uma ***região localizada*** do espaço que é diferente de todas as outras.

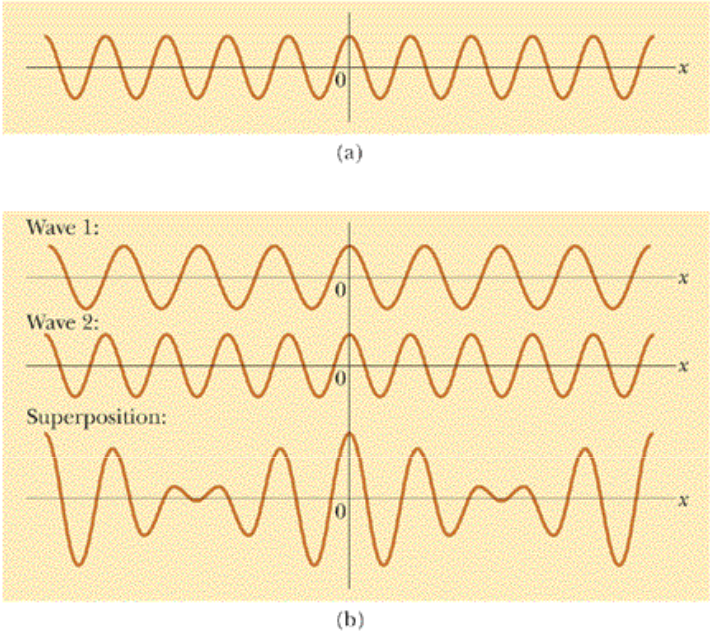
Aquí, podemos assumir (aproximar) o ***pacote de ondas*** como/por uma **"partícula".**

Interferência máxima em x=0



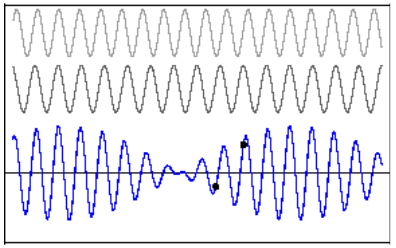
Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

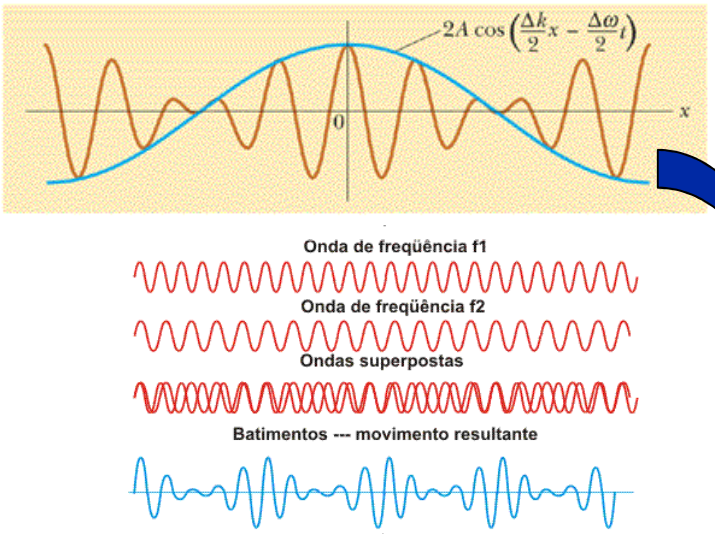
Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.13



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.15





Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

O padrão de batimentos da figura da esquerda com uma **função envoltória sobreposta (figura da direita).**

Cada vez que ocorre um máximo de amplitude se diz que ocorreu um ***batimento.***

Considere **duas ondas com amplitudes iguais**, mas **frequências diferentes *f₁* e *f₂***. Podemos representar estas ondas matemáticamente como:

.

$$y_1 = A\cos(k_1 - \omega_1 t) \text{ e } y_2 = A\cos(k_2 - \omega_2 t)$$

$$\omega = 2\pi f \quad \text{e} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Princípio de Superposição $y = y_1 + y_2 = A\cos\underbrace{(k_1 x - \omega_1 t)}_{a} + A\cos\underbrace{(k_2 - \omega_2 t)}_{b}$

na forma trigonométrica

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

sendo $a = k_1 x - \omega_1 t$ e $b = k_2 - \omega_2 t$ temos:

$$y = 2A\cos\left[\frac{(k_1 x - \omega_1 t) - (k_2 x - \omega_2 t)}{2}\right]\cos\left[\frac{(k_1 x - \omega_1 t) + (k_2 x - \omega_2 t)}{2}\right] =$$

$$= \left[2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right]\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

O segundo fator co-seno representa uma onda com um **número de onda e frequência iguais às médias dos valores das ondas individuais**.

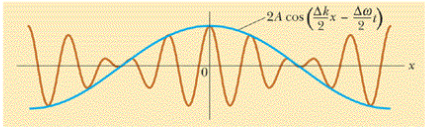
$$= \left[2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t \right) \right] \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$$

O segundo fator co-seno representa uma onda com um **número de onda e frequência iguais às médias dos valores das ondas individuais**.

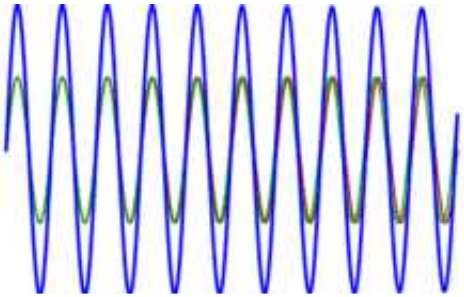
O fator entre colchetes representa a **envoltória da onda**, como mostrado
Observe que este fator também tem a forma matemática
de uma onda

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.15

$$y_1 = A\cos(k_1 - \omega_1 t) \quad \text{e} \quad y_2 = A\cos(k_2 - \omega_2 t)$$

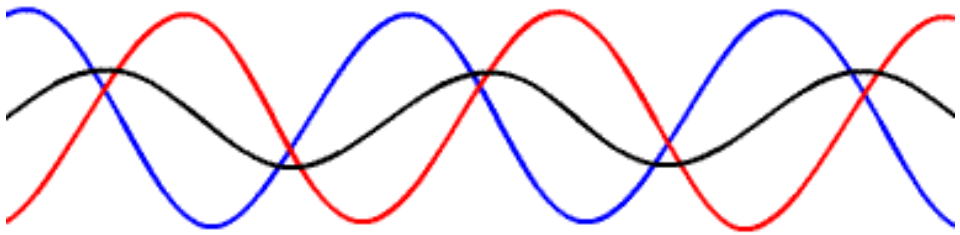


Esta **onda descrita pela função envoltória** pode deslocar-se
no espaço com uma **velocidade diferente das ondas individuais.**

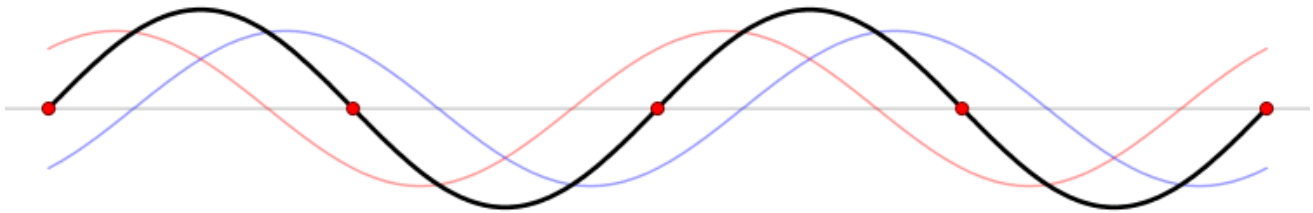


Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

Como um exemplo extremo dessa possibilidade, **imagine combinar** **<u>duas ondas idênticas deslocando-se em direções opostas.</u>**



As duas ondas deslocam-se com a mesma velocidade escalar, mas a envoltória tem uma ***velocidade nula***, pois construímos uma **<u>onda estacionária</u>**



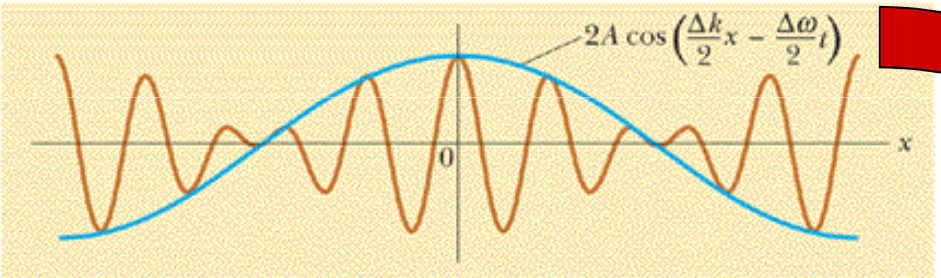
Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.15

$$y_1 = A\cos(k_1 - \omega_1 t) \quad \text{e} \quad y_2 = A\cos(k_2 - \omega_2 t)$$

$$\omega = 2\pi f \quad \text{e} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

pelo Princípio de Superposição

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) + A\cos(k_2 - \omega_2 t)$$



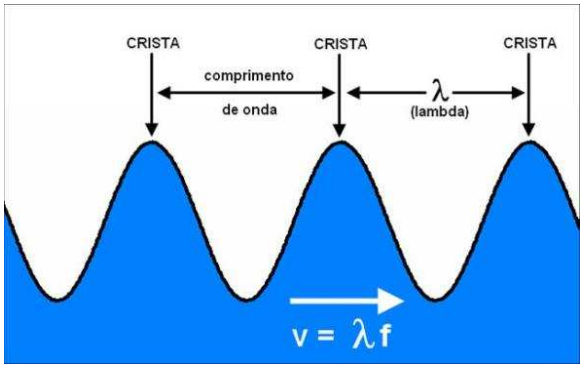
$$\boxed{\left[2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right]}\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

Para uma onda individual, a **velocidade** é dada pela equação: $v_{fase} = \dfrac{\omega}{k}$

Que é definida como **velocidade de fase** porque **é a taxa de progressão de uma crista em uma única onda**, que é um ponto de fase fixa.

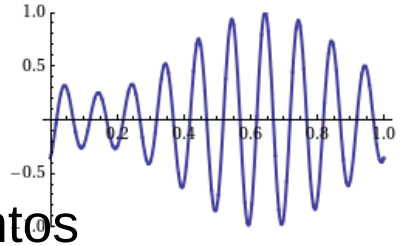
$$v_{fase} = \frac{\omega}{k}$$



$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{e} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k} = v_g = \frac{\text{coeficiente de variável temporal "t"}}{\text{coeficiente de variável espacial "x"}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

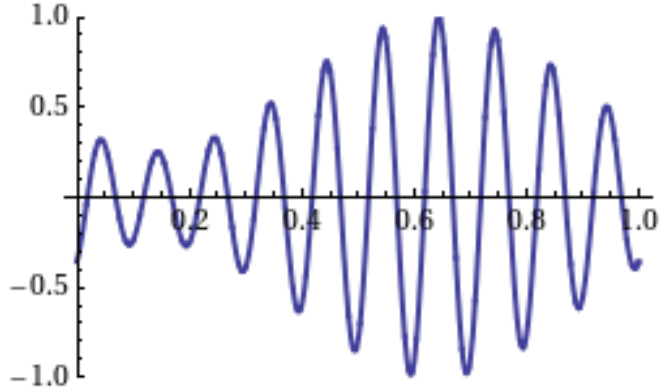
O subscrito "g" na velocidade indica que ela é usualmente denominada **velocidade de grupo** ou a **velocidade do pacote de ondas** (o *grupo* de ondas) que construímos.



Onde temos uma combinação de frequências (ω) e comprimentos de onda (λ) variáveis entre diferentes ondas.

Para uma **superposição de um número muito grande ondas** para formar um **pacote de ondas**, temos a razão:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$



Vamos multiplicar o numerador e o denominador por ħ onde ħ=h/2π:

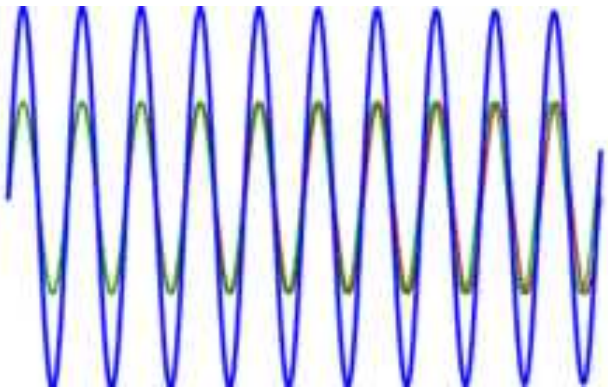
$$v_g = \frac{\hbar d\omega}{\hbar dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)}$$

analisando separadamente o numerador e o denominador

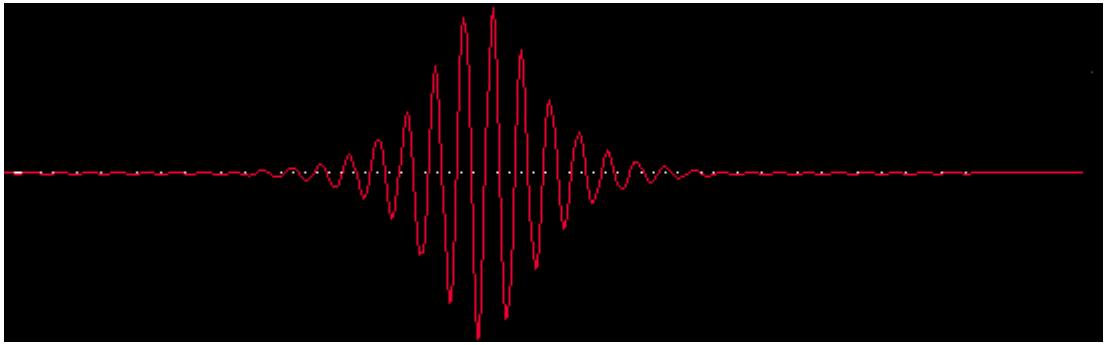
$$\hbar\omega = \frac{h}{2\pi}\cdot 2\pi f = h\cdot f = E$$

$$\hbar k = \frac{h}{2\pi}\cdot\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \frac{h}{\lambda} = p$$

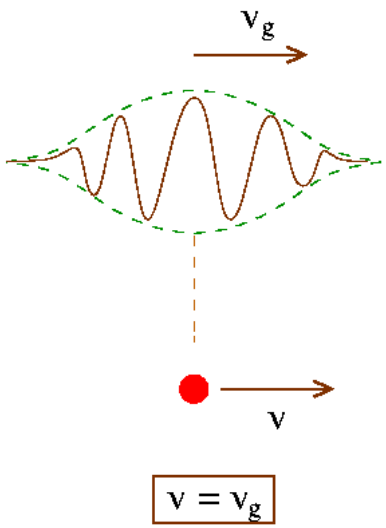
$$v_g = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}$$



Como estamos explorando a possibilidade de que a envoltória das ondas combinadas represente a partícula,



se consideramos uma **<u>partícula livre deslocando-se com uma velocidade "v"</u>** que é pequena comparada com a velocidade da luz. A energia da partícula é sua energia cinética:

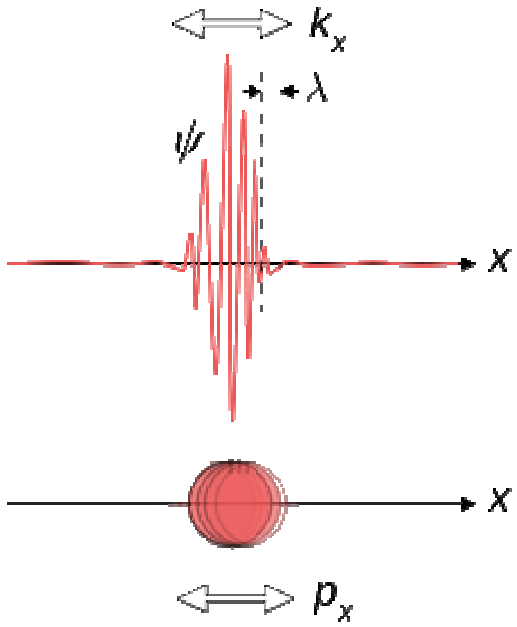


$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$ diferenciando com relação a "p"

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{1}{2m}(2p) = \frac{p}{m} = v$$

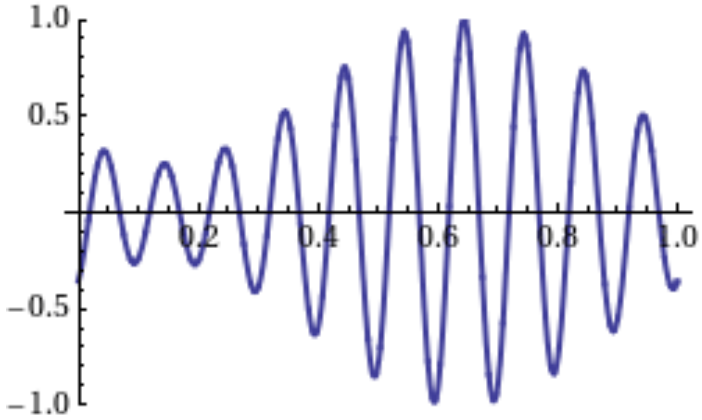
$$p = mv$$ Assim, podemos assumir a analogia entre a **velocidade do "pacote de onda"** **e a** **velocidade de uma partícula**

- Os **pacotes de onda** são construídos como uma **superposição linear de ondas planas** de **diferentes momentos lineares *«p»*.**



$$p(\lambda) = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

- Neste caso, cada componente do pacote de ondas viaja com sua velocidade característica, conhecida como **velocidade de fase**.



❑ Novamente a Experiência da Dupla Fenda

Antes:

- **modelos corpusculares (partículas com carga e massa)**
- **modelos ondulatórios (ondas)**

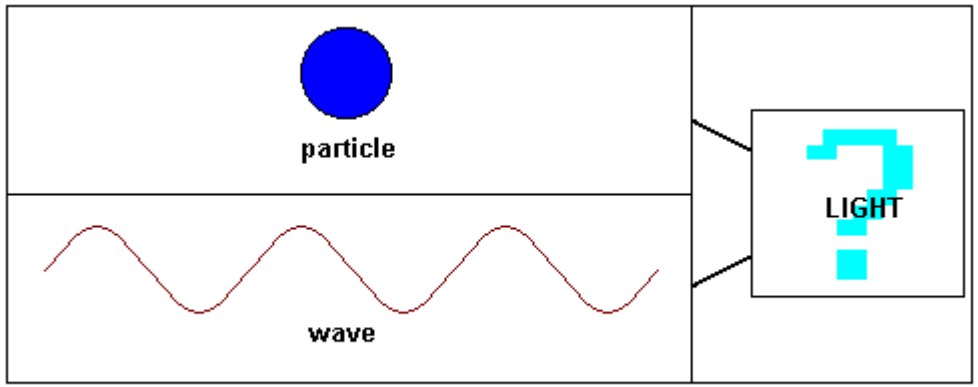
Depois:

Efeito Foto-Elétrico & Compton

✓ Tanto a luz como as partículas têm propriedades corpusculares e ondulatórias

De Broglie

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{mv}$$



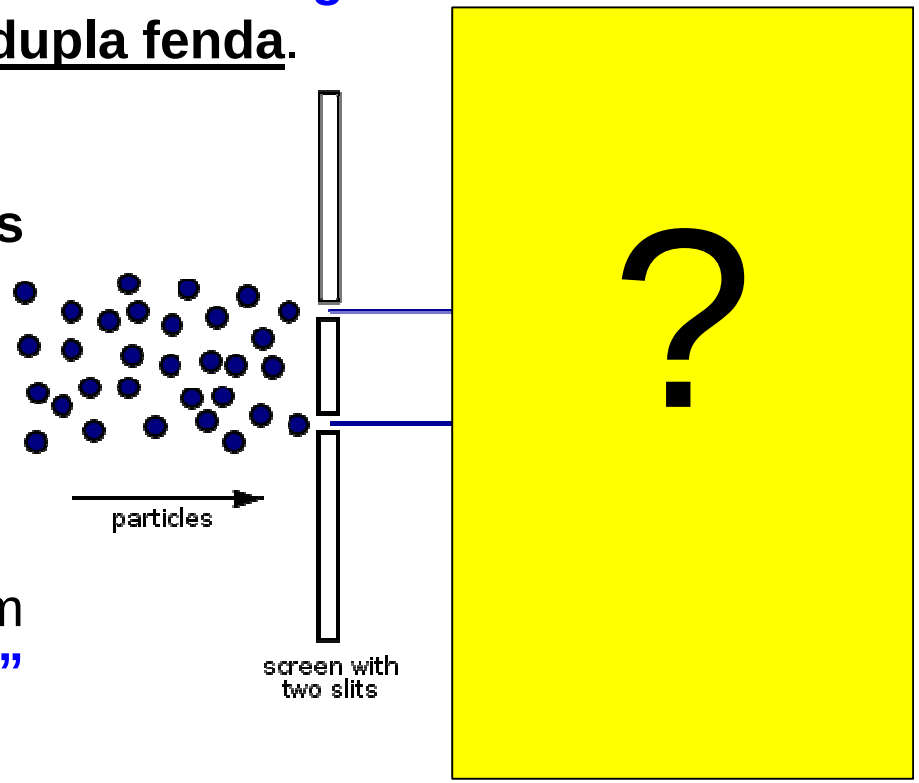
How to imagine the wave-particle duality.

❑ Novamente a Experiência da Dupla Fenda

Vamos lançar elétrons contra uma dupla fenda

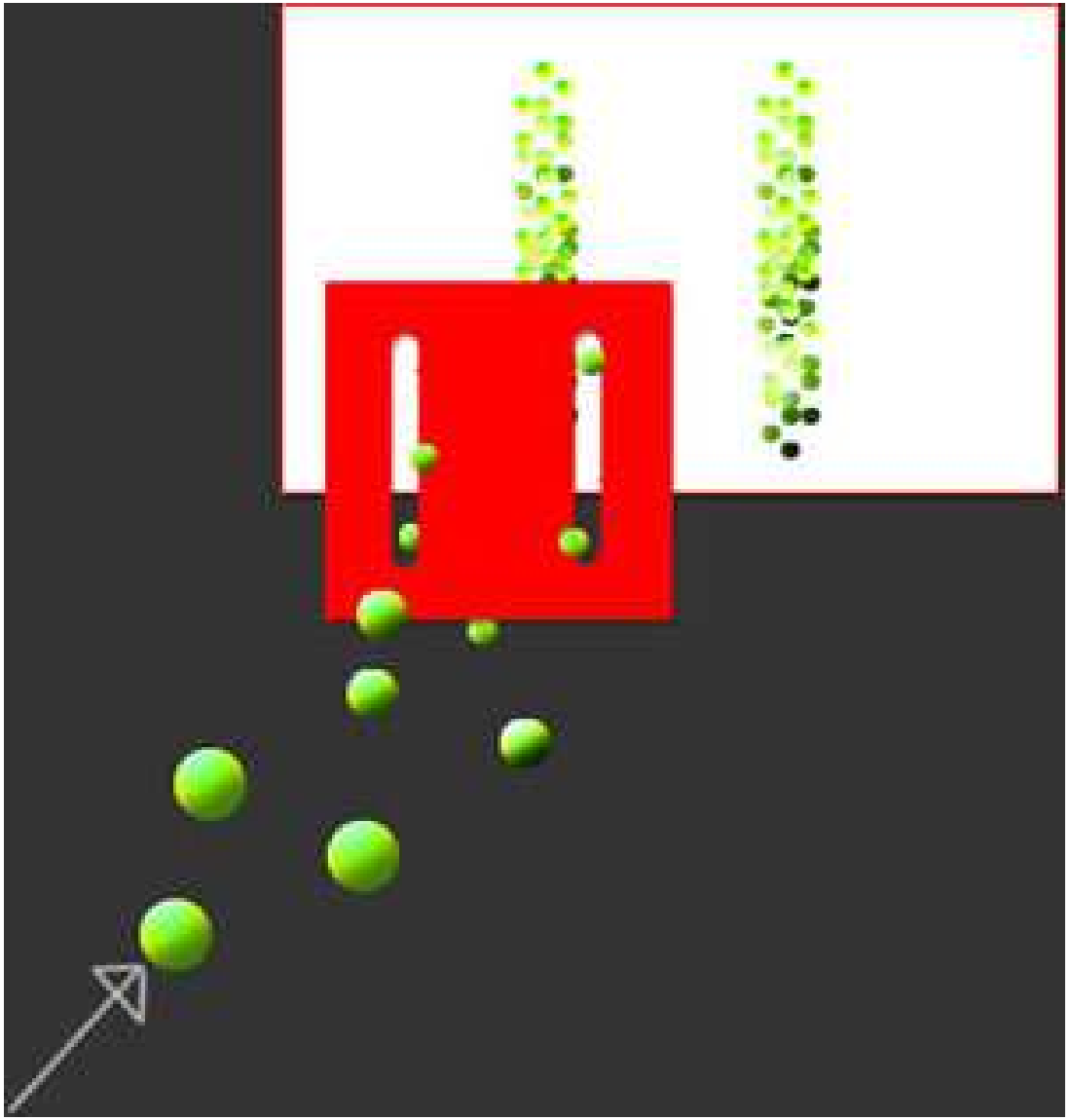
Considere um **feixe paralelo de elétrons mono-energéticos** (mono-cromáticos) incidindo sobre uma **dupla fenda**.

As **larguras das fendas são pequenas** comparadas com o **comprimento de onda do elétron**…

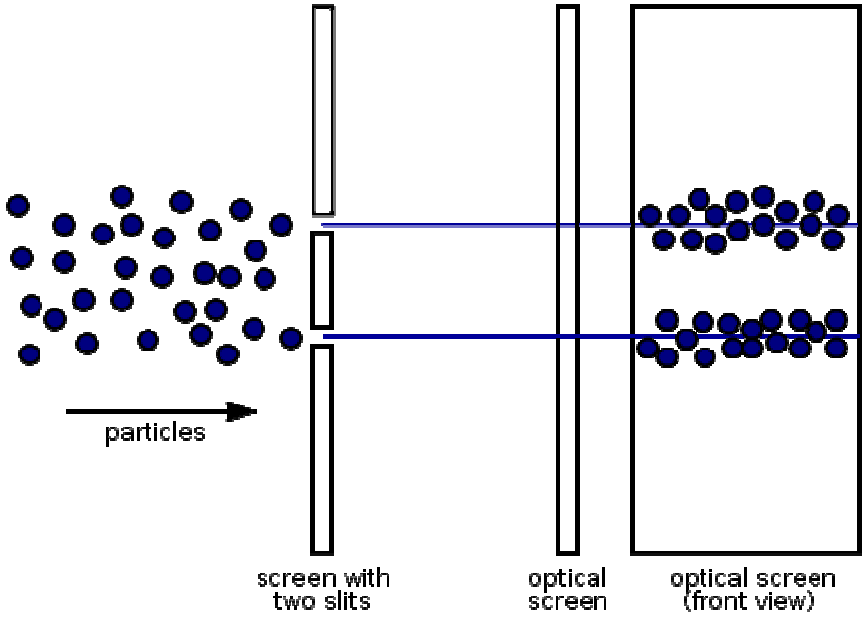


O detector de elétrons é colocado bem longe das fendas a uma **distância "L" muito maior que "d"** (distância de separação entre as fendas).

ACEITÁVEL???



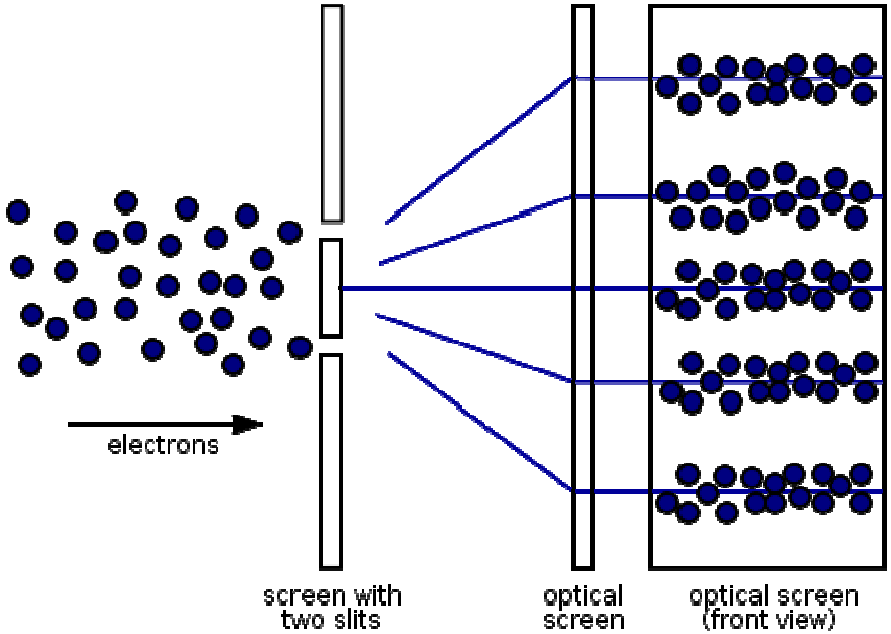
Efeito esperado Teoria Clássica



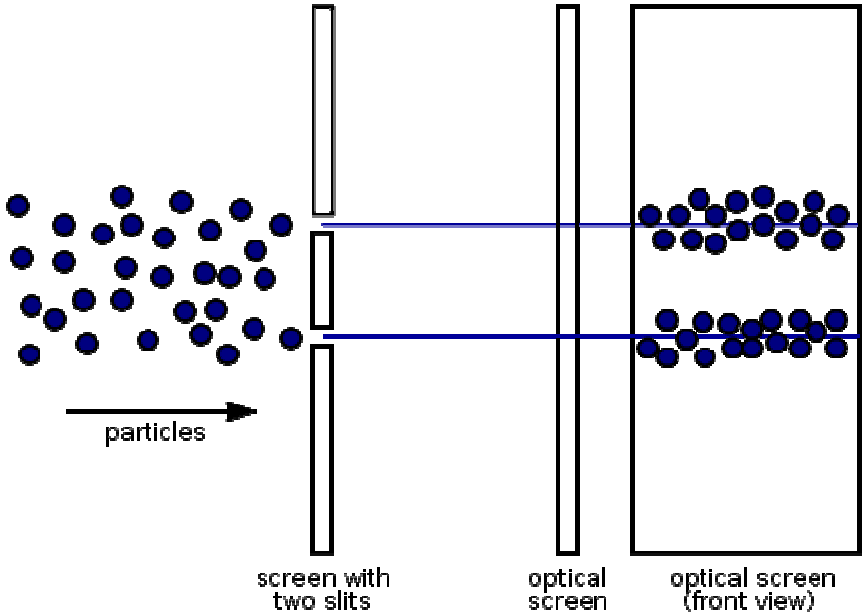
Se o detector coletar elétrons por um tempo vemos um típico **padrão de interferência de "onda"** em termos do número de elétrons por minuto.

Não se espera tal comportamento se consideramos os **elétrons - partículas**.

Esta é uma evidência de que os **elétrons** estão **interferindo** segundo **fenômenos** ao menos similares aos **ondulatórios**.



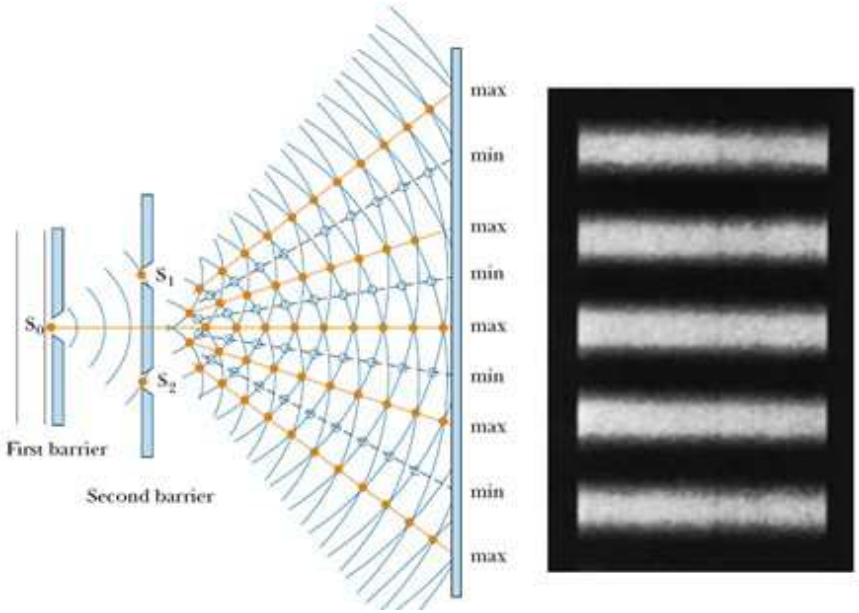
Efeito esperado
Teoria Clássica



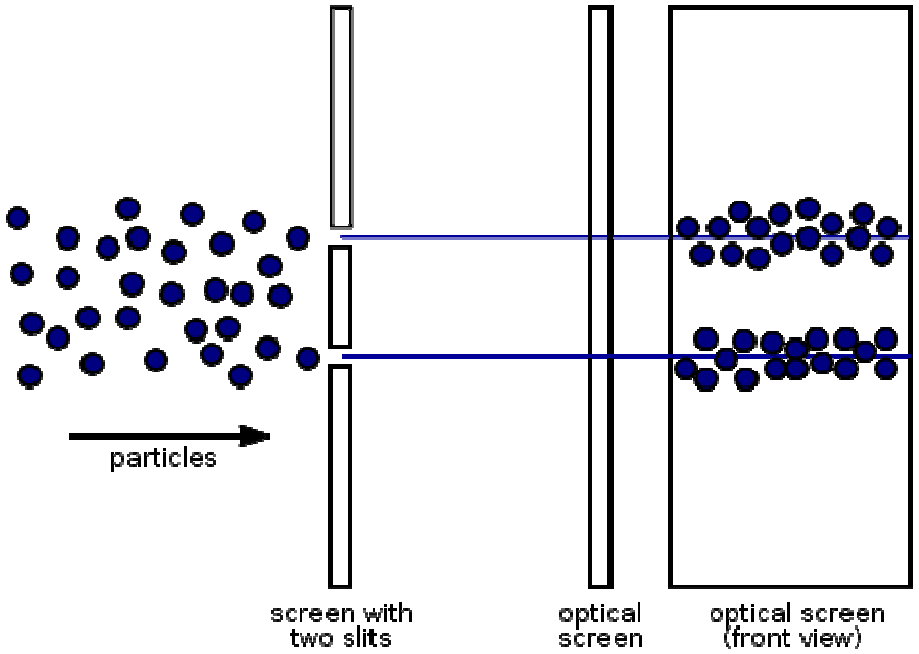
Se o detector coletar elétrons por um tempo vemos um típico **padrão de interferência de "onda"** em termos do número de elétrons por minuto.

Não se espera tal comportamento se consideramos os **elétrons - partículas**.

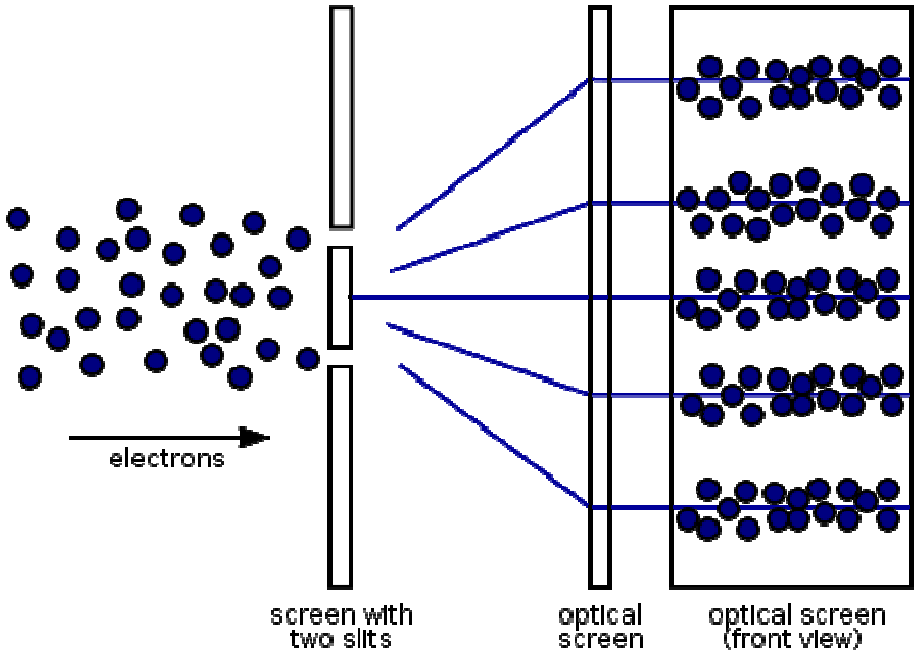
Esta é uma evidência de que os **elétrons** estão **interferindo** segundo **fenômenos** ao menos similares aos **ondulatórios**.



Efeito esperado
Teoria Clássica



Efeito observado
Teoria Quântica



Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.16

Se imaginarmos elétron(s) no feixe produzindo pequenas ondas em fase quando alcança uma das fendas…

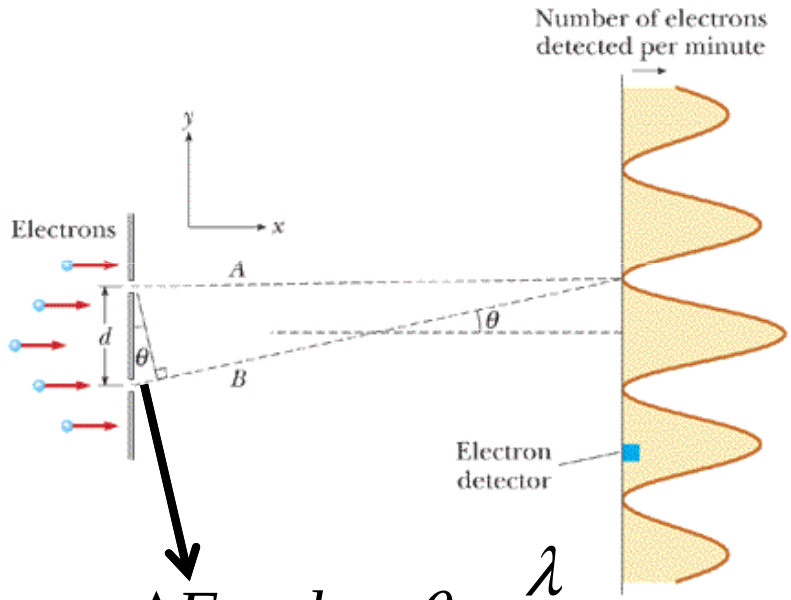
Utilizando a **<u>teoria ondulatória</u>** do **<u>Capítulo 27</u>**, então:

$$\Delta F = d sen\theta = \frac{\lambda}{2}$$

representa um **mínimo de interferência**, e

$$\Delta F = d sen\theta = \lambda$$

representa um **máximo de interferência**



$$\Delta F = d sen\theta = \frac{\lambda}{2}$$

Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

$$\Delta F = d sen\theta = \frac{\lambda}{2}$$

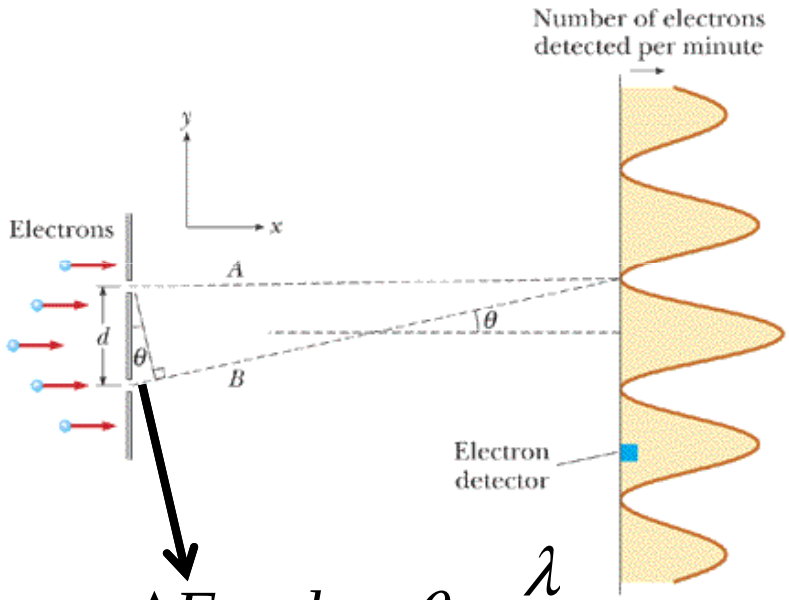
Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.16

Como o comprimento de onda do elétron é dado por:

$$\lambda = \frac{h}{p_x}, \text{ para } \theta \text{ pequeno temos:}$$

$$sen\theta \approx \theta = \frac{h}{2 p_x d}$$

Como isso **se respeita** fica mostrada a **natureza dual do elétron**.



$$\Delta F = d sen\theta = \frac{\lambda}{2}$$

Interferência destrutiva

Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

$$\Delta F = d sen\theta = \lambda$$

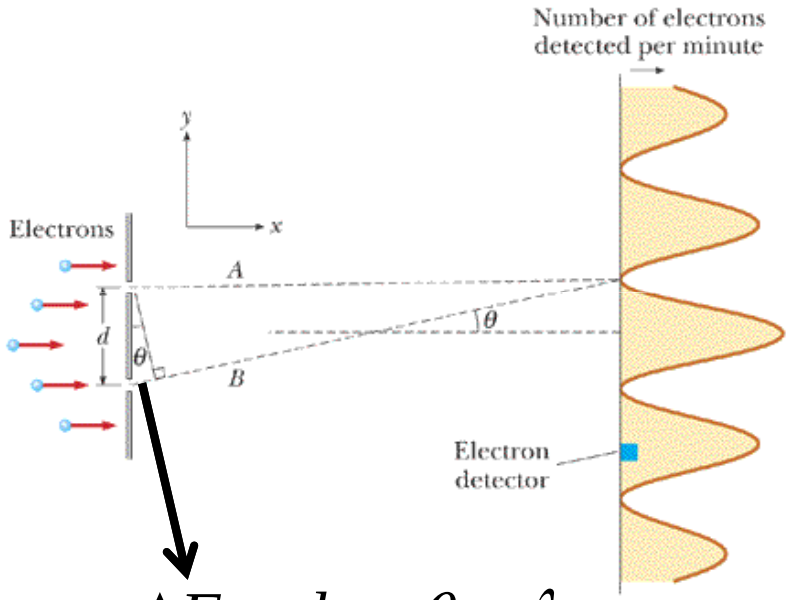
Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.16

Como o comprimento de onda do elétron é dado por:

$$\lambda = \frac{h}{p_x}, \text{ para } \theta \text{ pequeno temos:}$$

$$sen\theta \approx \theta = \frac{h}{p_x d}$$

Como isso **se respeita** fica mostrada a **natureza dual do elétron**.

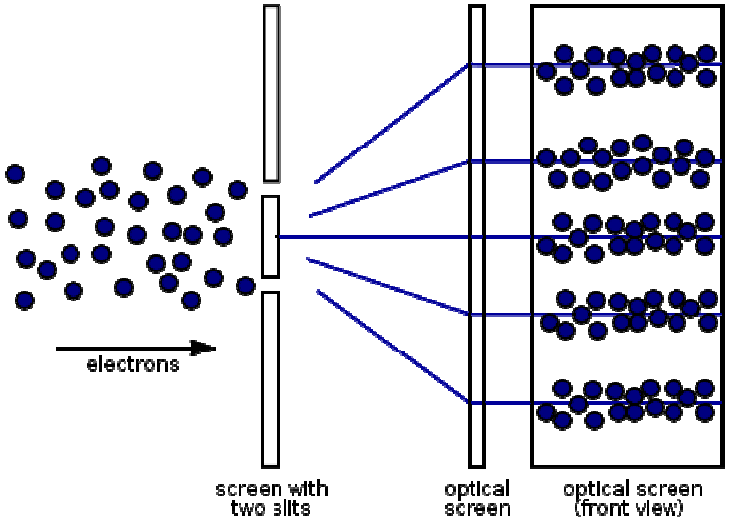


$$\Delta F = d sen\theta = \lambda$$

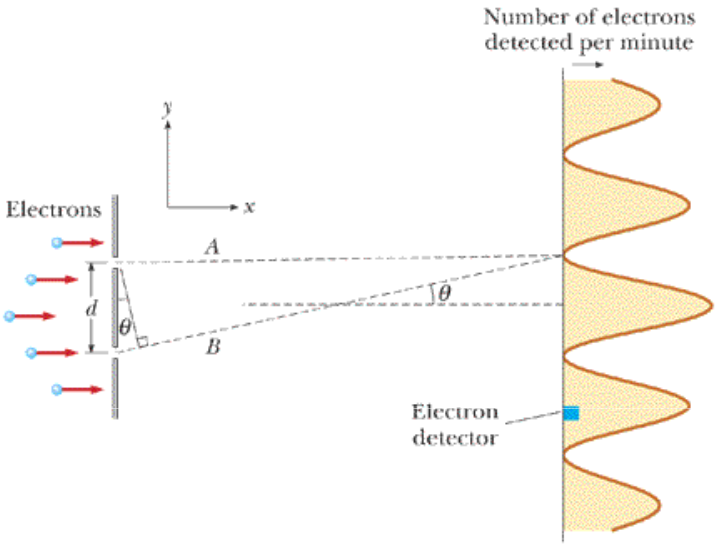
Interferência construtiva

Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

Assim, os **elétrons** são **detectados como partículas em um certo ponto em algum instante de tempo.**



Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.16



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

Mas a **probabilidade de chegada a esse ponto** é determinada pela **intensidade de duas ondas que interferem.**

Exercício 28.24

É usado um osciloscópio modificado para realizar uma experiência de interferência de elétrons. Elétrons incidem sobre um par de fendas estreitas separadas por 0.0600µm. As bandas brilhantes no padrão de interferência estão separadas por 0,400mm sobre uma tela a 20,0 cm das fendas. Determine a diferença de potencial através da qual os elétrons foram acelerados para formar este padrão.

$$d sen\theta = n\lambda$$

$$\lambda = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m\mathrm{v_e}}$$

$$K = \frac{1}{2} m_e \mathrm{v_e}^2 = e\Delta V$$

É usado um osciloscópio modificado para realizar uma experiência de interferência de elétrons. Elétrons incidem sobre um par de fendas estreitas separadas por 0.0600µm. As bandas brilhantes no padrão de interferência estão separadas por 0,400mm sobre uma tela a 20,0 cm das fendas. Determine a diferença de potencial através da qual os elétrons foram acelerados para formar este padrão.

Considerando a primeira banda brilhante temos:

$$d sen\theta = n\lambda = 1\cdot\lambda$$

$$tg\theta = \frac{0.400}{200} = 0.002$$

$$d sen\theta = n\lambda = 1\cdot\lambda = \left(6.0\times10^{-8}\,m\right) sen\left(0.002\right) = 1.20\times10^{-10}\,m$$

$$\lambda = \frac{h}{m\mathrm{v_e}} \Rightarrow m\mathrm{v_e} = \frac{h}{\lambda}$$

$$K = \frac{1}{2}m_e\mathrm{v_e}^2 = \frac{m_e^2\mathrm{v_e}^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2} = e\Delta V$$

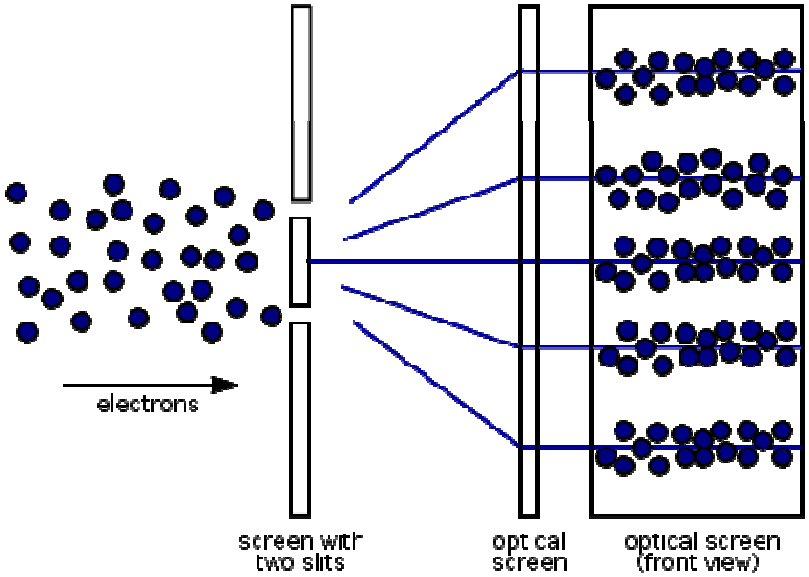
$$1J = 1C\cdot 1V$$

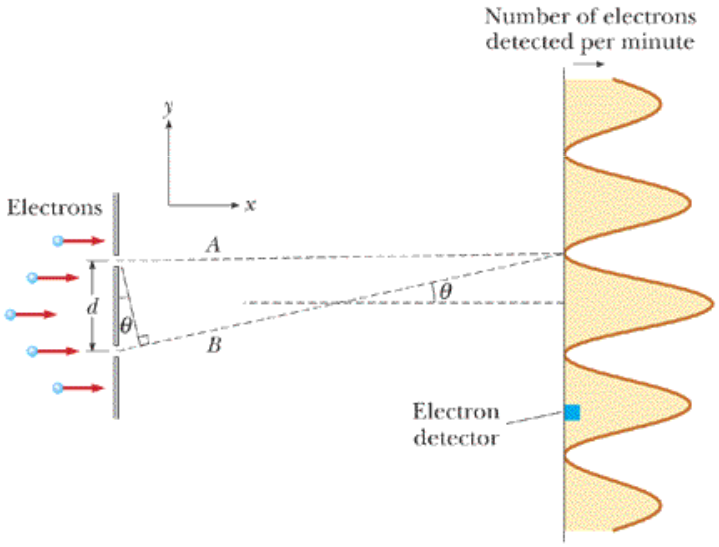
$$\Delta V = \frac{h^2}{2em_e\lambda^2} = \frac{\left(6.63\times10^{-34}\,J\cdot s\right)^2}{2\left(1.6\times10^{-19}\,C\right)\left(9.11\times10^{-31}\,Kg\right)\left(1.20\times10^{-10}\,m\right)^2} = 105V$$

EXERCÍCIO

O que acontece quando uma fenda é coberta

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.16



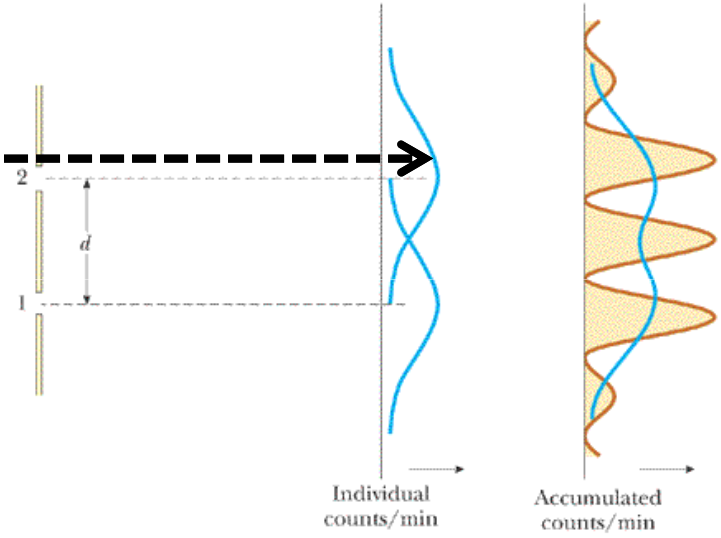


Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

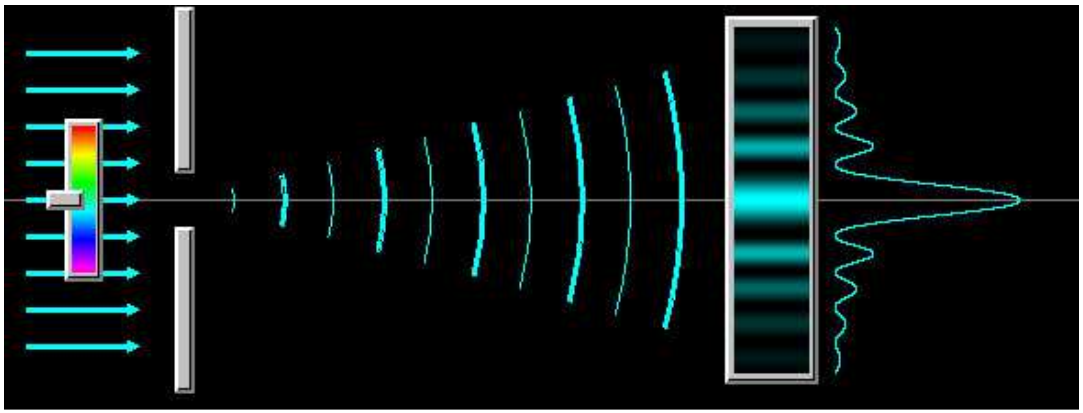
EXERCÍCIO

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.18

Se uma fenda é coberta, se observa **uma curva simétrica com seu pico ao redor da fenda aberta** – **máximo central do padrão de difração de fenda única**.



A figura mostra gráficos das **contagens de elétrons por minuto (probabilidade de chegada de elétrons)** com a fenda superior (2) ou inferior (1) fechada.



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

RESUMINDO

Se a fenda 1 está aberta e a fenda 2 fechada por um certo tempo e depois invertemos durante o mesmo intervalo de tempo…

obtemos os **padrões em azul**

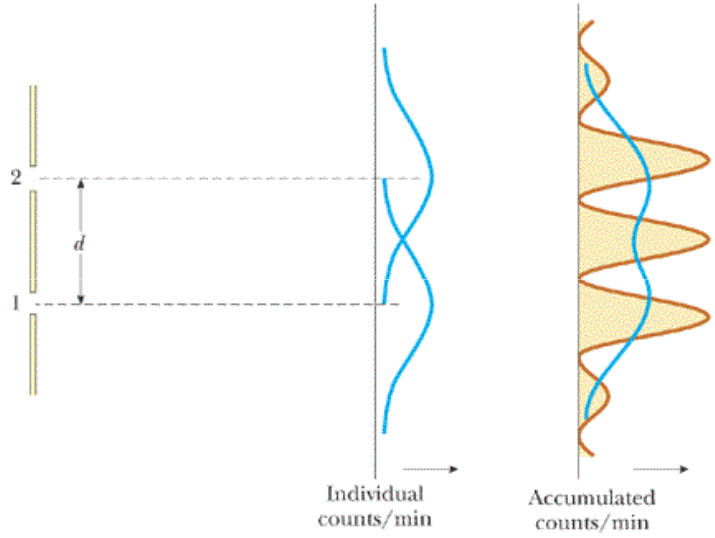
É importante observar

Que é **completamente diferente do padrão em que as duas fendas estão abertas** **(curva com vários picos).**

Não existem mais uma probabilidade **máxima** de chegada em θ=0 **(curva azul)**

Desaparece o **padrão** de interferência e o resultado acumulado é a **soma dos resultados individuais**.

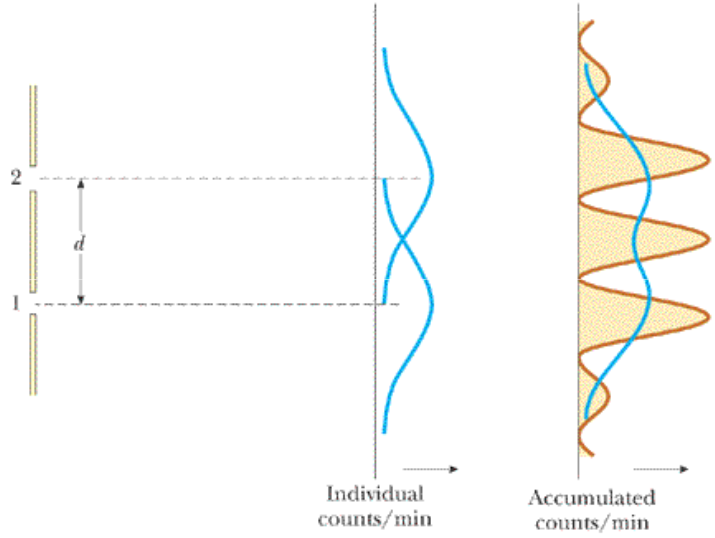
Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.18



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

COMO PODEMOS IDENTIFICAR POR ONDE O ELÉTRON PASSA QUANDO AS DUAS FENDAS ESTÃO ABERTAS????

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.18



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

Quando as duas fendas estão abertas nossa intuição tende a induzir-nos a que o elétron passa pela **fenda 1 OU pela fenda 2**.

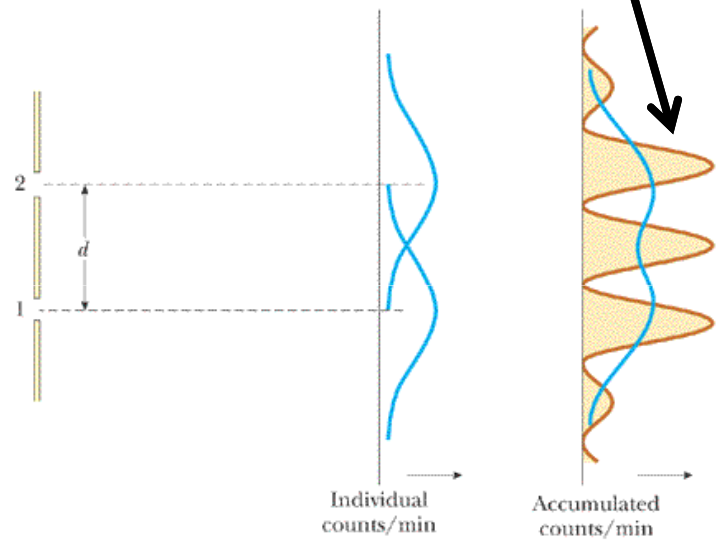
Os resultados experimentais indicados pelo padrão de interferência com muitos picos contradizem isso. **PRINCÍPIO DE HUYGENS**

Portanto, a **conclusão** de que o **elétron é localizado e atravessa apenas uma fenda quando as duas fendas são abertas está errada.**

Conclusão difícil pois vai em contra da nossa intuição.

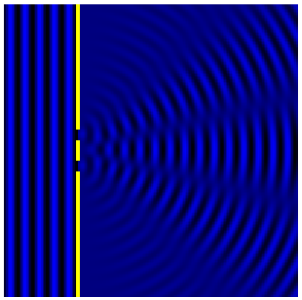
Padrão de interferência similar ao de duas ondas monocromáticas coerentes

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.18



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

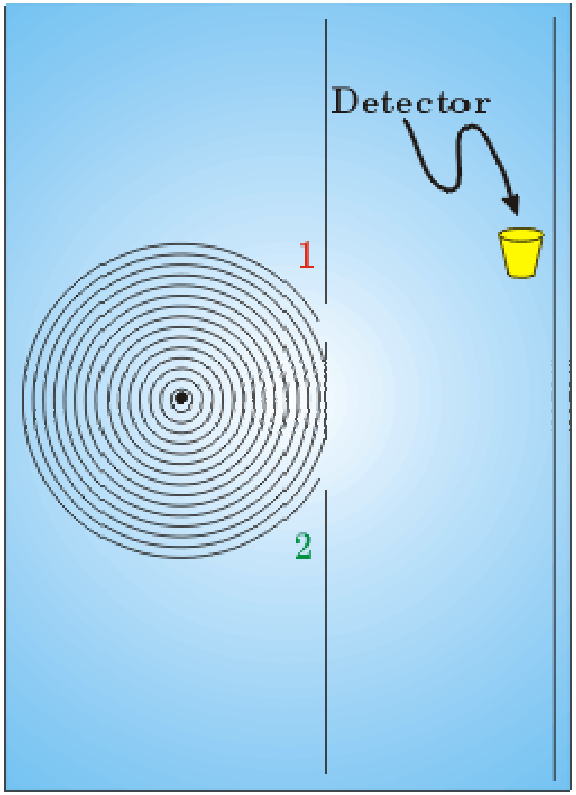
Um **elétron interage com as duas fendas simultaneamente.**

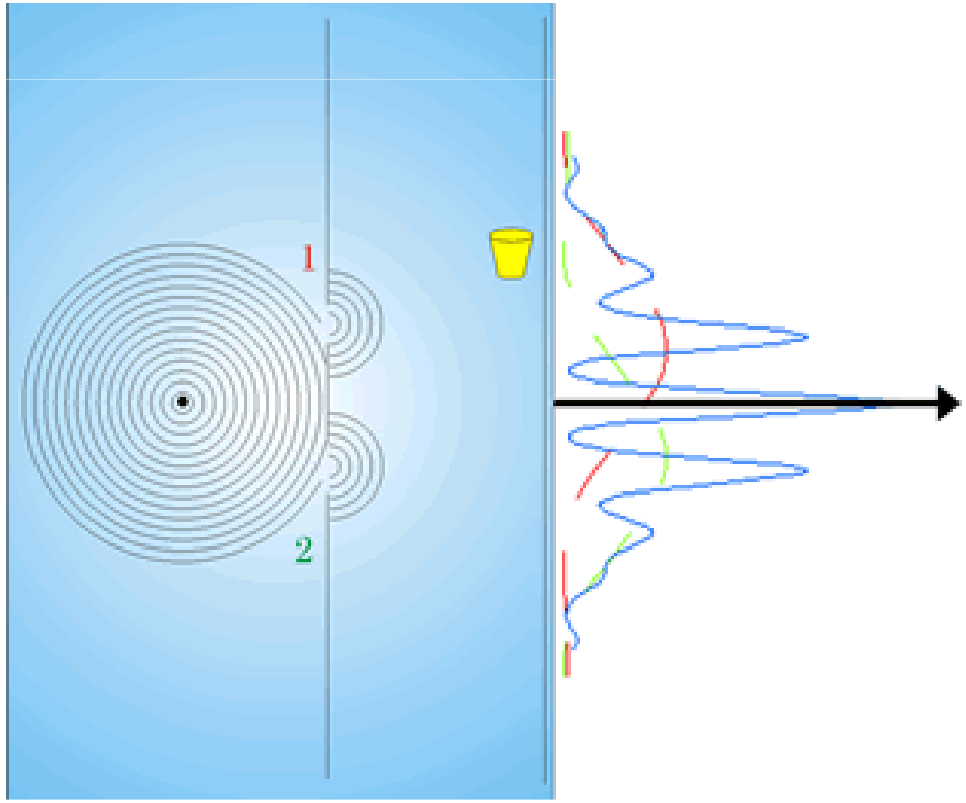


É impossível determinar por qual fenda passa o elétron.

Se tentarmos determinar experimentalmente qual fenda o elétron atravessou, **o simples ato da medida destruirá o padrão de interferência**.

Podemos apenas afirmar que **o elétron passa pelas duas fendas.**





❑ O PRINCÍPIO DA INCERTEZA

Sempre que se mede a posição ou a velocidade de uma partícula em um certo instante, incertezas experimentais estão incluídas nas medidas.

De acordo com a **<u>mecânica clássica</u>** não há um limite para o aumento da precisão (diminuição da incerteza) dos procedimentos experimentais.

❑ O PRINCÍPIO DA INCERTEZA

A Mecânica Quântica prevê que é fundamentalmente **impossível medir simultâneamente a posição (x) e o momento (p=mv) de uma partícula com precisão infinita.**

Se são feitas uma medida da posição de uma partícula com uma incerteza (Δx) e uma medida simultânea do seu momento com uma incerteza (Δp) o produto das duas incertezas nunca pode ser menor que ħ/2:

$$\Delta x_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

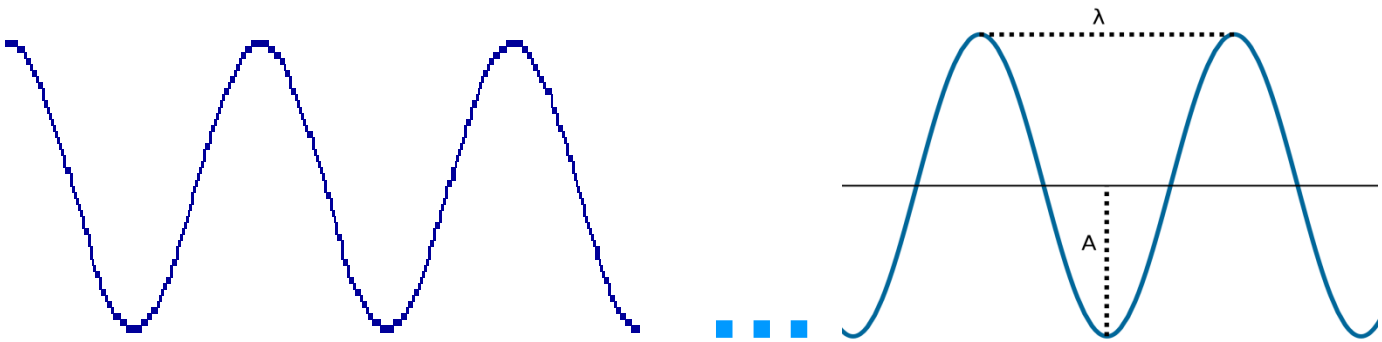
Considere uma **partícula** para a qual **conhecemos exatamente o comprimento de onda λ.**

De acordo com as relações de "de Broglie": $\lambda = \dfrac{h}{p}$

Conheceríamos o **momento com precisão infinita**.

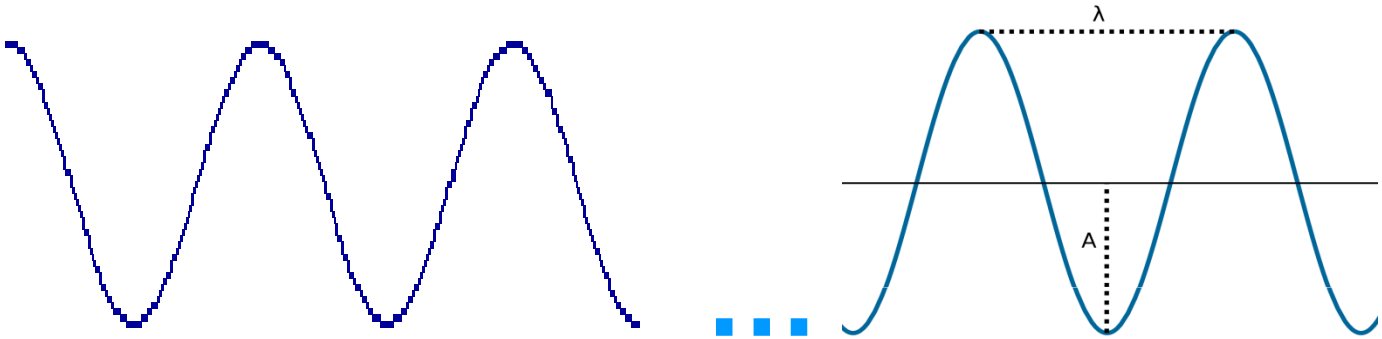
Existiria por **todo o espaço** uma onda com o **comprimento de onda λ**.

Qualquer região ao longo dessa onda significa a mesma coisa que qualquer outra região.



Se nos perguntamos, **<u>onde está a partícula representada por esta onda?</u>**

Nenhuma localização especial no espaço ao longo da onda poderia ser identificada com a partícula, pois todos os pontos ao longo da onda são idênticos.

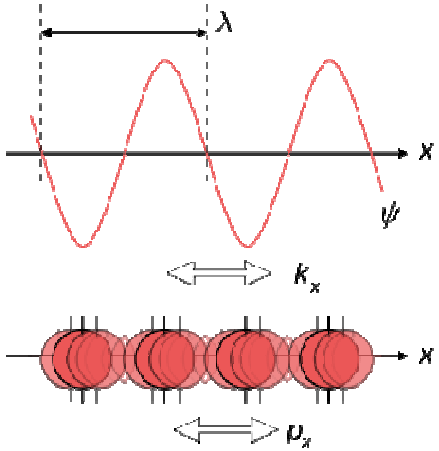


Assim temos uma incerteza infinita na posição da partícula.

Um conhecimento perfeito do momento custa toda a informação quanto à posição.

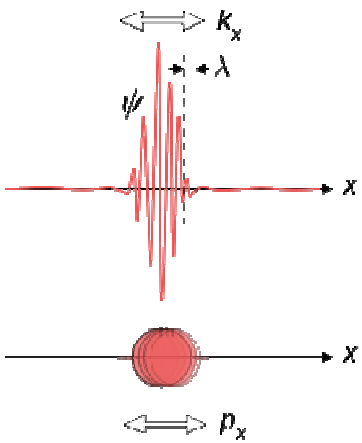
$$p = \frac{h}{\lambda_{cte}}$$

Em comparação, considere agora uma **partícula** com alguma incerteza no momento, de tal forma que seja possível um intervalo de momentos **Δp** o que implica um intervalo de comprimentos de onda **Δλ**.



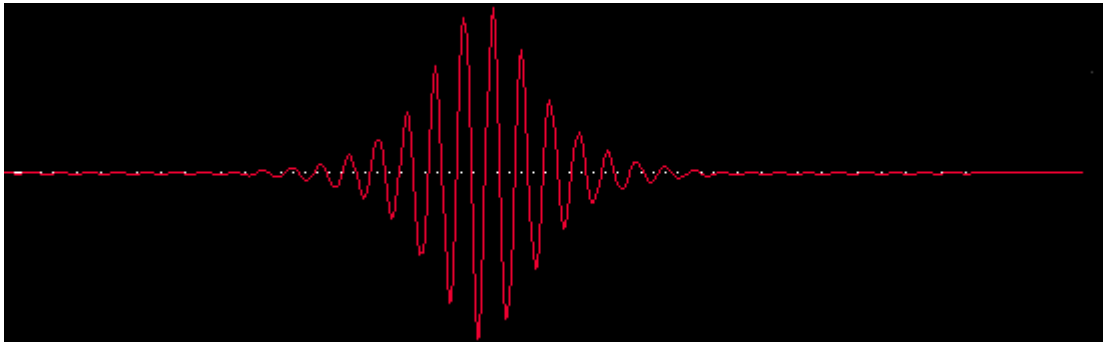
$$\lambda = \frac{h}{p} \Leftrightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

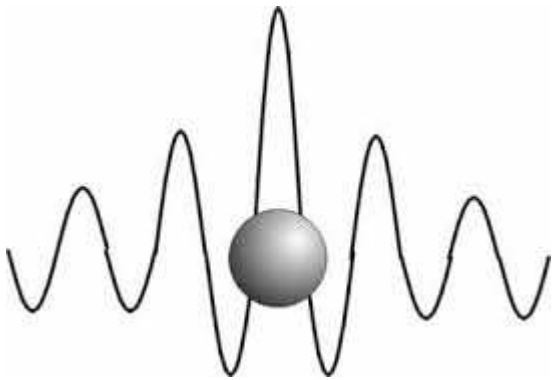
Assim a partícula não é representada por um único comprimento de onda, mas por uma combinação de comprimentos de onda neste intervalo.



Esta combinação forma um ***<u>pacote de ondas</u>***

Para determinar a **posição da partícula**, podemos dizer que ela está em algum ponto na **região definida pelo pacote de onda**, pois exite uma nítida diferença entre esta região e o restante do espaço.





Assim ao **perder parte da informação quanto ao momento da partícula**, **ganhamos informação** sobre sua **posição.**

Exemplo 28.8 Localizando um elétron

É medida a velocidade de um elétron como sendo:

$$v_e = (5.0\times10^3 \pm 0.003\%)\, m/s$$

$$v_e = (5000{,}00 \pm 0.15)\, m/s$$

Dentro de quais limites pode-se determinar a posição desse elétron ao longo da direção de seu vetor velocidade?

$$p = m_e \mathrm{v}_e =$$

$$m_e = \left(9.11\times10^{-31} Kg\right)$$

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p}$$

Exemplo 28.8 Localizando um elétron

É medida a velocidade de um elétron como sendo:

$$v_e = (5.0\times10^3 \pm 0.003\%)\, m/s$$

$$v_e = (5000{,}00 \pm 0.15)\, m/s$$

Dentro de quais limites pode-se determinar a posição desse elétron ao longo da direção de seu vetor velocidade?

Solução: O momento do elétron é: $p = m_e v_e = \left(9.11\times10^{-31} Kg\right)\cdot\left(5\times10^3\, m/s\right) =$

$$4.56\times10^{-27}\,\frac{Kg\cdot m}{s}$$

Assumindo a incerteza do momento, como sendo igual à incerteza da velocidade Temos:

$$\Delta p = 0.00003\,p = 1.37\times10^{-31}\,\frac{Kg\cdot m}{s}$$

Pode-se agora calcular a incerteza mínima na posição usando-se o valor de Δp na equação:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{1.05\times10^{-34}\, J\cdot s}{2\left(1.37\times10^{-31}\,\frac{kg\cdot m}{s}\right)} = 0.384\times10^{-3} m = 0.384 mm$$

Exercício 27: Um elétron e um projétil têm, cada um, uma velocidade de magnitude 500m/s exata com aproximação de 0.0100%. Dentro de quais limites poderíamos determinar a posição dos corpos ao longo da direção da velocidade? Conhecendo os valores das respectivas massas:

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} Kg$$

$$m_p = 0.0200 Kg$$

$$p = m\mathrm{v}$$

$$\Delta \mathrm{x} \Delta \mathrm{p} = \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Exercício 27: Um elétron e um projétil têm, cada um, uma velocidade de magnitude 500m/s exata com aproximação de 0.0100%. Dentro de quais limites poderíamos determinar a posição dos corpos ao longo da direção da velocidade? Conhecendo os valores das respectivas massas:

$$m_e = 9.11\times10^{-31} Kg$$

$$m_p = 0.0200 Kg$$

Para o elétron:

$$\Delta p = m_e \Delta \mathrm{v} = \left(9.11\times10^{-31} Kg\right)\left(500 m/s\right)\left(1.00\times10^{-4}\right) =$$

$$\Delta p = m_e \Delta \mathrm{v} = 4.56\times10^{-32} Kg \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{\left(6.63\times10^{-34} J\cdot s\right)}{4\pi\left(4.56\times10^{-32} \frac{Kg\cdot m}{s}\right)} = 1.16 mm$$

Para o projétil:

$$\Delta p = m_e \Delta \mathrm{v} = \left(0.0200 Kg\right)\left(500 m/s\right)\left(1.00\times10^{-4}\right) =$$

$$\Delta p = m_e \Delta \mathrm{v} = 1.0\times10^{-3} Kg \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{\left(6.63\times10^{-34} J\cdot s\right)}{4\pi\left(1.0\times10^{-3} \frac{Kg\cdot m}{s}\right)} = 5.8\times10^{-32} m$$

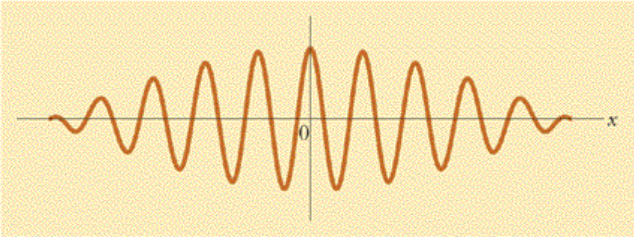
A forma matemática do princípio da incerteza afirma que o produto das incertezas na posição e no momento sempre será maior que um valor mínimo.

Pode ser gerada uma outra forma do princípio da incerteza reconsiderando a figura com o tempo
no eixo “x” no lugar da posição.

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.14

Podemos considerar os mesmos argumentos, utilizados para o comprimento de onda (momento) e a posição, no domínio temporal.

As variáveis correspondentes seriam a frequência e o tempo.

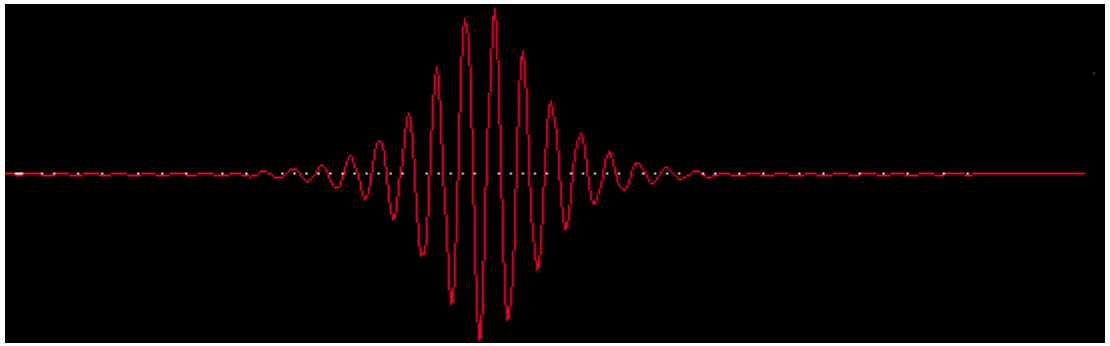


A frequência está relacionada com a energia por: $E = h \cdot f$

e o princípio de incerteza nesta forma é:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.



Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.14

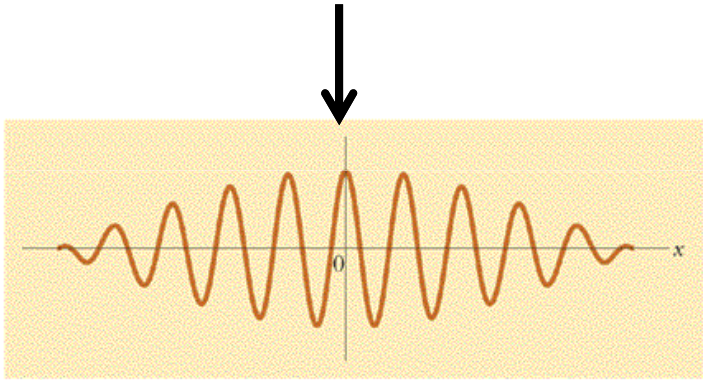
Se combinamos um grande número de ondas a probabilidade de um valor positivo na função de onda em qualquer ponto “x” é a mesma que a probabilidade de um valor negativo.

Se cada onda nova é adicionada de modo que sua crista coincida com as demais ondas em x=0, a pequena região de interferência construtiva é denominada ***pacote de onda.***

Esta é uma região localizada do espaço que é diferente de todas as outras.

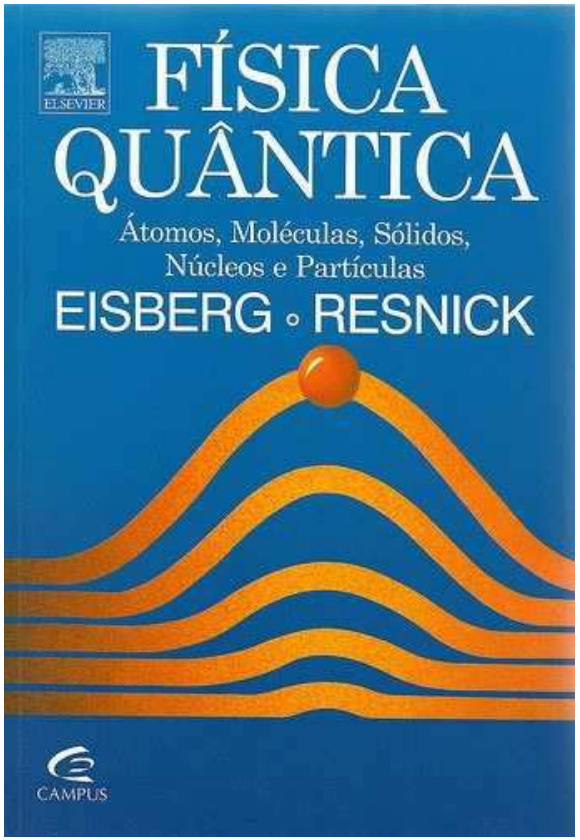
Aquí, podemos assumir o ***pacote de ondas*** como uma **partícula.**

Interferência máxima em x=0



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

CAPÍTULO 28: Física Quântica



- ❑ O Princípio da Incerteza
- ❑ **Interpretação da Mecânica Quântica**
- ❑ **Uma partícula livre e em uma caixa**
- ❑ **Função de Onda e Valor Esperado**
- ❑ A Equação de Schrödinger
- ❑ Tunelamento através de uma Barreira de Energia Potencial

Lista de exercícios sugerida – Capítulo 28:

28.4, .12, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 33, 35, 38, 42, 43, 52

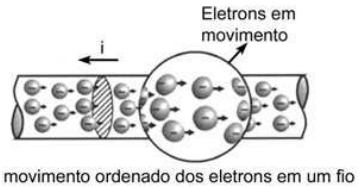
❑ UMA INTERPRETAÇÃO DA MECÂNICA QUÂNTICA

Analogias permitem tratar **radiação eletromagnética** como **corpúsculo**…

Vimos que o **número de elétrons** (portador de carga) **por unidade de tempo** é proporcional à **intensidade de corrente elétrica**.

$$I = \frac{dQ}{dt} \text{ (derivada - taxa de variação de carga com o tempo)}$$

Definição de **carga** está normalmente relacionada com elétrons, prótons, íons.
Definição de corrente: fluxo de carga por unidade de tempo.

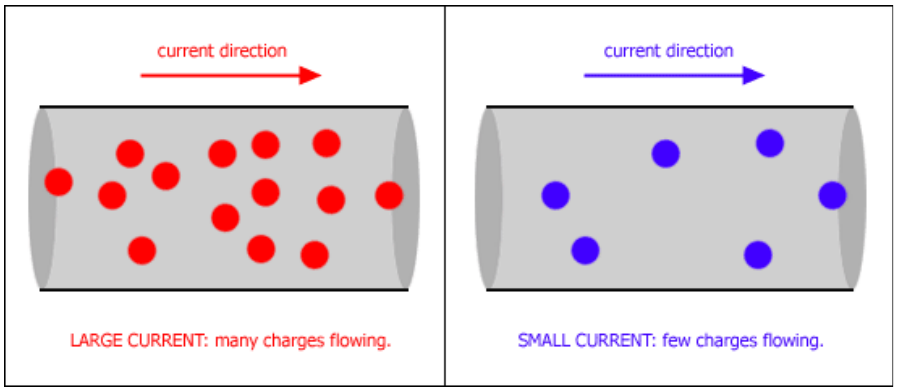


Suponhamos que a carga "q" se move através de uma **seção transversal A** de um arame (fio), em um tempo *t*, então a **intensidade de corrente** "*I*" através do arame é dada por:

$$I(A) = \frac{NQ}{\Delta t}\left(\frac{1C}{1s}\right)$$

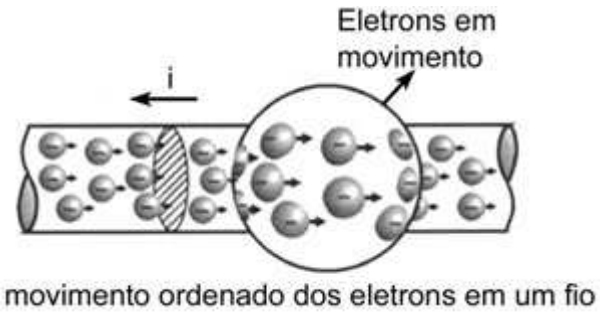
$$1C = 6.24 \times 10^{18} e^{-}$$

número de elétrons



❑ UMA INTERPRETAÇÃO DA MECÂNICA QUÂNTICA

Analogamente, considerando o **fóton** como portador de radiação eletromagnética, o **número de fótons** (*NF*) por unidade de área (A-2D) volume (V-3D) é proporcional à intensidade da radiação:



$$I(A) = \frac{NQ}{\Delta t}\left(\frac{1C}{1s}\right) \Leftrightarrow I \alpha \frac{NF}{V} \alpha \frac{probabilidade}{V}$$

$$1C = 6.24 \times 10^{18} e^{-}$$

Dito de outra maneira,

a probabilidade de encontrar um fóton por unidade de volume, em uma certa região do espaço, em um certo instante de tempo é proporcional ao número de fótons por unidade de volume

Recordando que a **intensidade da radiação eletromagnética** é **proporcional ao quadrado do campo elétrico**:

$$I \; \alpha \; E^2 \; \alpha \; \frac{probabilidade}{V}$$

Ondas eletromagnéticas transportam energia e a **taxa de fluxo de energia** atravessando uma unidade de área ***"A"*** é descrita pelo vetor de pointing ***"S"***

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} = \vec{E} \times \vec{B}$$

Calculando $\vec{S}$ para uma onda eletromagnética plana.

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares entre sí $\Rightarrow \left|\vec{E} \times \vec{B}\right| = EB$, assim neste caso:

$S = \dfrac{EB}{\mu_0}$, sendo $B = \dfrac{E}{c}$ também podemos formular:

$S = \dfrac{E^2}{\mu_0 c} = \dfrac{cB^2}{\mu_0}$ equações para S que se aplicam a $\forall$ instante de tempo.

A média temporal de S por um ou mais ciclos é a intensidade.

Isso involve a média temporal de $\cos^2(kx - \omega t)$ que é igual a $\dfrac{1}{2}$.

Desta forma, o valor médio de S ou a intensidade da onda é:

$$I = \bar{S} = \frac{E_{\max} \cdot B_{\max}}{2\mu_0} = \frac{E_{\max}^2}{2\mu_0 c} = \frac{cB_{\max}^2}{2\mu_0}$$

A **probabilidade por unidade de volume de localizar uma "partícula" associada com essa radiação (o fóton)** **pode ser assumida como proporcional ao quadrado de uma amplitude da onda.**

$$I \,\alpha\, E^2 \,\alpha\, \frac{probabilidade}{V}$$

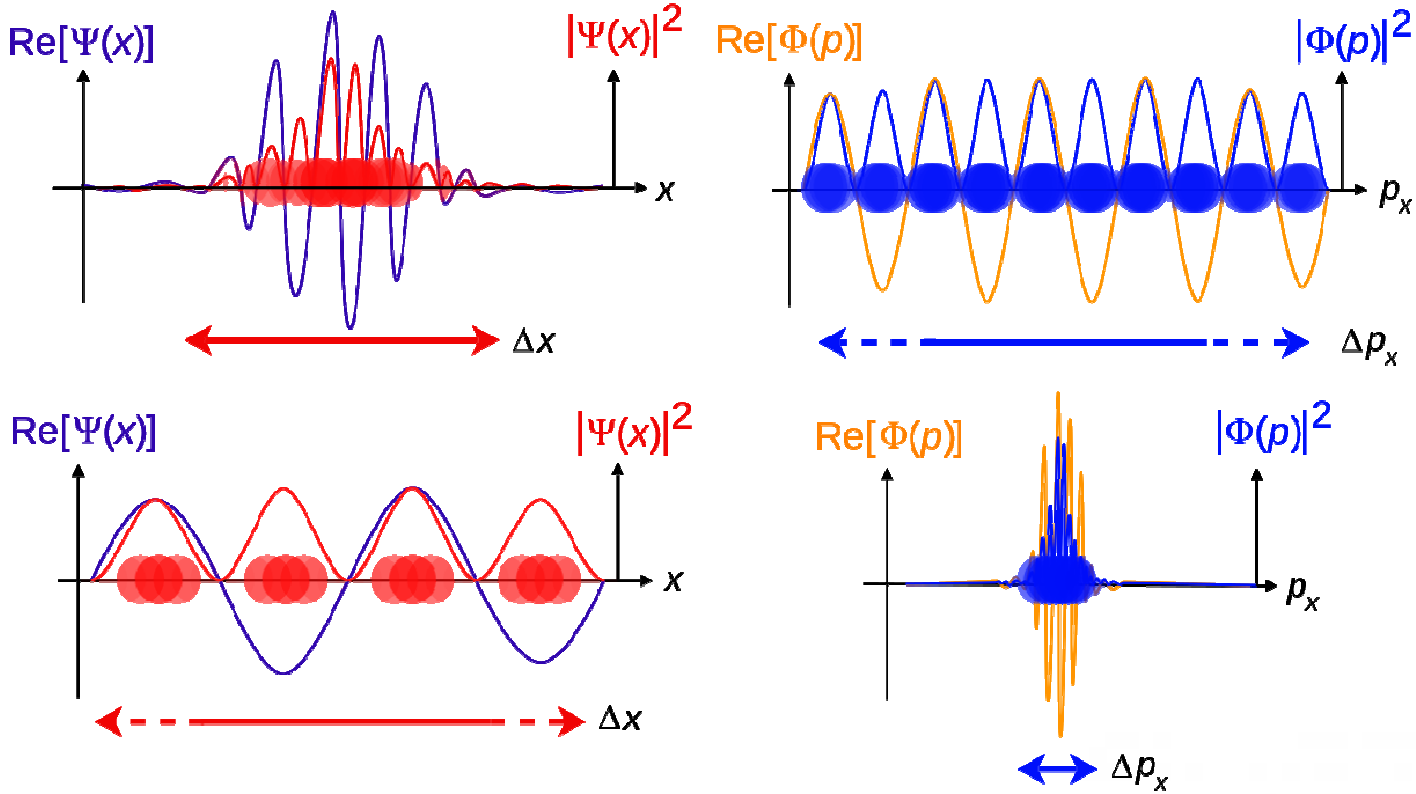
$$\vec{E}(\vec{x},t) = E\cos(kx - \omega t)$$

$$I \,\alpha\, E^2(x,t) = |E|^2 \underbrace{\cos^2(\cancelto{0}{kx - \omega t})}_{1}$$

$$E^2_{\max}(x,t) \Rightarrow kx = \omega t$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = \omega t$$

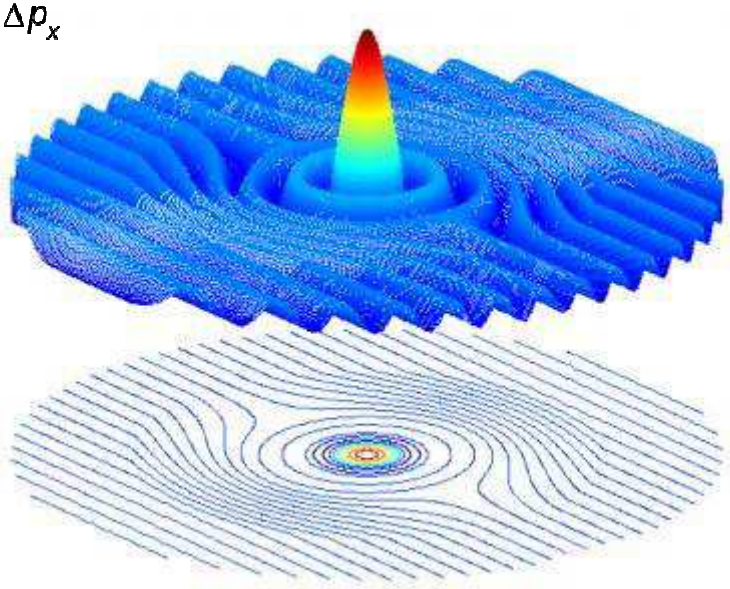
Assumindo a dualidade onda-partícula, ***a probabilidade de encontrar uma partícula, por unidade de volume, pode ser assumida proporcional ao quadrado da amplitude da onda*** **representando a partícula**.



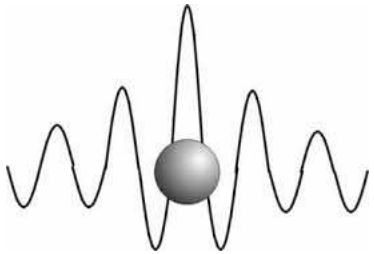
$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$x \approx \psi(x, y, z)$$

$$\mathrm{v}, \mathrm{p}, \mathrm{E} \approx \psi(x, y, z, t)$$



Na verdade, a **amplitude da onda associada** a uma **partícula** **não é** uma **grandeza física** e portanto não é mensurável como é o **campo elétrico** para uma **onda eletromagnética.**

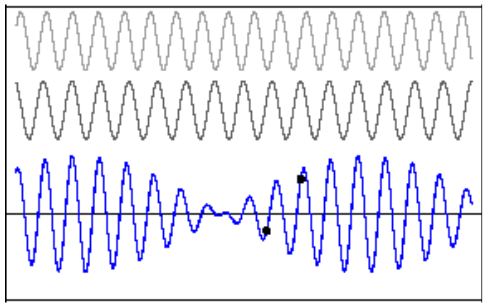


A única conexão é a **analogia** dada pela equação:

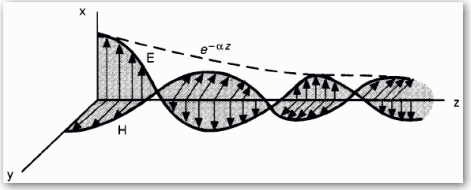
$$I \; \alpha \; E^2 \; \alpha \; \frac{probabilidade}{V} \alpha \; A^2$$

Como resutado disso, chamamos simplesmente a amplitude da onda associada à partícula de

"amplitude de probabilidade" ou de **"função de onda"**



❑ A **<u>função de onda</u>** é a **descrição matemática** mais completa possível para um sistema regido pela **<u>mecânica quântica</u>**.



❑ **Na mecânica clássica a descrição completa de um sistema consistia em <u>determinar</u> a <u>posição e a velocidade</u> de todas as <u>partículas</u> e, com esta descrição, ser possível prever todos os movimentos futuros e passados do sistema.**

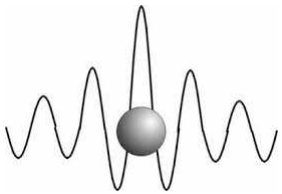
Newton's Equations of Motion

1. $x = \bar{v}\,t \qquad \bar{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$
2. $v = v_0 + at$
3. $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
4. $v^2 = v_0^2 + 2ax$

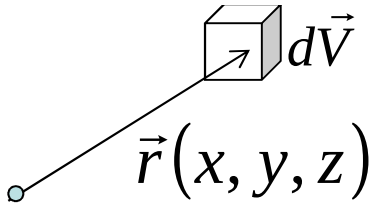
click here and learn more

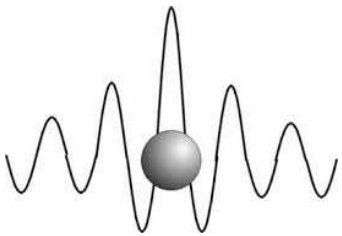
❑ Na **<u>mecânica quântica</u>** **não se pode** **<u>determinar</u>** todas as grandezas desejadas com a mesma certeza **<u>(Princípio da Incerteza).</u>**

❑ **De acordo com a <u>mecânica quântica</u>, a descrição do sistema termina ao nível da <u>função de onda</u>, com a idéia de <u>probabilidade de encontrar a partícula em uma posição.</u>**



A **<u>função de onda</u>** $\psi(x, y, z)$
é uma ferramenta matemática criada a partir de Leis da Física
que contém (gera) **<u>informação espacial da partícula</u>**.





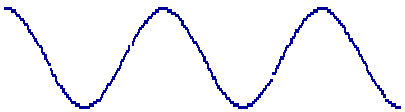
Uma **<u>função de onda</u>** mais **completa** deve depender também **do tempo**, **<u>representada por uma expressão do tipo:</u>**

$$\psi(x, y, z, t)$$

Já vimos que, a equação de **<u>"de Broglie"</u>** relaciona o **<u>momento de uma partícula</u>** com seu **<u>comprimento de onda</u>**.

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Se uma **<u>partícula livre ideal</u>** tem um **<u>momento</u>** ***"p"*** conhecido com precisão sua função de onda é uma onda senoidal com **<u>comprimento de onda</u>**:

$-\infty$  $+\infty$ $\lambda = \frac{h}{p}$

e a **partícula tem uma probabilidade igual de estar <u>em qualquer ponto do espaço</u>**

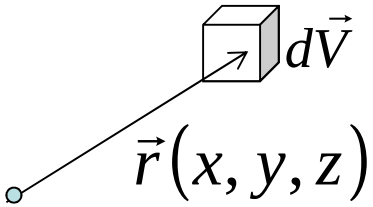
A **função de onda** para tal **partícula livre** deslocando-se ao longo do eixo "x" pode ser escrita na forma:

$$\psi(x) = A\,sen\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\,sen(kx)$$

Embora **não podemos medir "ψ",** podemos medir uma **<u>densidade de probabilidade</u>** que é a ***probabilidade relativa por unidade de volume de encontrar a partícula em qualquer ponto de volume***.

$$\left|\Psi(\vec{r})\right|^2 d\vec{V}$$

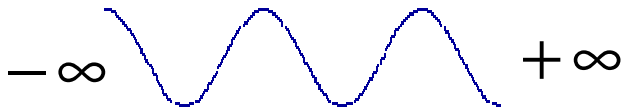
Substituindo ***dV*** por ***dx*** e ***<u>r</u>*** por ***x*** temos:



$$P(x)dx = |\psi|^2 dx$$

Como **<u>a partícula tem que estar em algum lugar do espaço</u>**
Ao longo do eixo "x" **a soma das probabilidades sobre todos os valores de "x"** é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1 \equiv 100\%$$



Qualquer **<u>função de onda</u>** que satisfaça esta condição é dita ***<u>normalizada</u>***

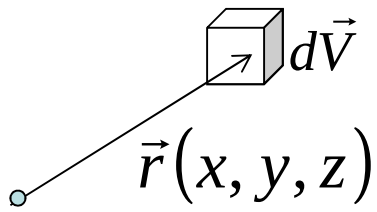
A **função de onda** para tal **partícula livre** deslocando-se ao longo do eixo "x" pode ser escrita na forma **dependente do tempo** como:

$$\psi(x,t) = A sen\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\right) = A sen(kx - \omega t)$$

Embora **não podemos medir "ψ",** podemos medir a **densidade de probabilidade** que é a probabilidade relativa por unidade de volume de encontrar a partícula em qualquer ponto de volume.

$$|\Psi(\vec{r})|^2 d\vec{V}$$

Substituindo dV por dx e r por x temos:



$$P(x)dx = |\psi|^2 dx$$

Como **a partícula tem que estar em algum lugar do espaço**
Ao longo do eixo "x" **a soma das probabilidades sobre todos os valores de "x"** é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

Qualquer **função de onda** que satisfaça esta condição é dita ***normalizada***

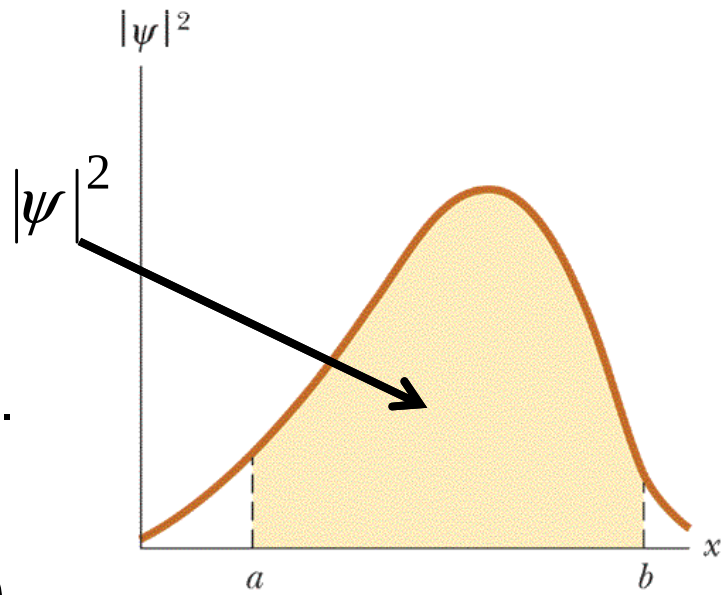
Embora **não seja possível especificar a posição de uma partícula** com certeza absoluta, é possível, através de $|\psi|^2$ especificar a probabilidade de **observá-la em uma pequena região ao redor de um certo ponto.**

A **<u>probabilidade de encontrar a partícula no intervalo a – b (a<x<b)</u>** é:

$$P_{ab} = \int_a^b |\psi|^2 dx$$

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.19

Esta probabilidade é a área sobre a curva de $|\psi|^2$ em função de "x" entre os pontos x=a e x=b.



Experimentalmente esta **probabilidade é finita**.

O valor desta probabilidade tem que estar entre 0 e 1 **(conjunto dos números reais positivos).**

Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

Exercício 33 - Seção 28.9: Uma interpretação da Mecânica Quântica

Um elétron livre tem uma função de onda: $\psi(x) = Asen\left(5.00\times10^{10}\,x\right)$
Onde "x" está em metros.
Encontre:

(a) o comprimento de onda de De Broglie
(b) o momento linear
(c) a energia cinética em elétron-Volt

$$\psi(x) = Asen\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$h = 6.63\times10^{-34}\,J\cdot s$$

$$\mathrm{m} = 9.11\times10^{-31}\,Kg$$

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

$$1J \Rightarrow 6.24\times10^{18}\,eV$$

Exercício 33 - Seção 28.9: Uma interpretação da Mecânica Quântica

Um elétron livre tem uma função de onda:
Onde “x” está em metros.
Encontre:

(a) o comprimento de onda de De Broglie
(b) O momento linear
(c) A energia cinética em elétron-Volt

$$(\mathrm{a})\quad \psi(x) = Asen\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = Asen\left(5.00\times10^{-10}\,x\right)$$

$$\text{então, } \frac{2\pi}{\lambda} = 5.00\times10^{-10}\,m^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{5.00\times10^{-10}} = 1.26\times10^{-10}\,m$$

$$(\mathrm{b})\quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63\times10^{-34}\,J\cdot s}{1.26\times10^{-10}\,m} = 5.27\times10^{-24}\,kg\,\frac{m}{s}$$

$$(c)\quad \mathrm{m} = 9.11\times10^{-31}\,Kg$$

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left(5.27\times10^{-24}\,Kg\cdot m/s\right)}{2\times9.11\times10^{-31}\,Kg} = 1.52\times10^{-17}\,J = \frac{1.52\times10^{-17}\,J}{1.602\times10^{-19}\,J/eV} = 95.5\,eV$$

Exercício 32 - Seção 28.9: Uma interpretação da Mecânica Quântica

A função de onda para uma partícula livre é: $\psi(x) = \sqrt{\dfrac{a}{\pi(x^2 + a^2)}}$

para $a > 0$ e $-\infty < x < +\infty$

Determine a probabilidade de que a partícula esteja localizada em algum lugar entre x = -a e x = +a

Sabendo que:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}$$

Exercício 32 - Seção 28.9: Uma Interpretação da Mecânica Quântica

A função de onda para uma partícula livre é: $\psi(x) = \sqrt{\dfrac{a}{\pi(x^2 + a^2)}}$

para a > 0 e $-\infty < x < +\infty$

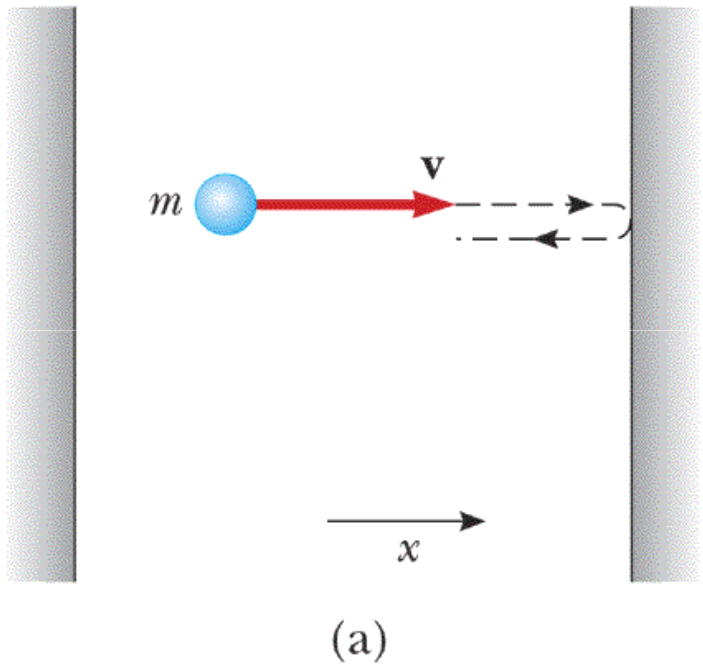
Determine a probabilidade de que a partícula esteja localizada em algum lugar entre x = -a e x = +a

$$P = \int_{-a}^{a} |\psi(x)|^2 = \int_{-a}^{+a} \frac{a}{\pi\left(x^2 + a^2\right)} dx = \left(\frac{a}{\pi}\right)\left(\frac{1}{a}\right) \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{+a}$$

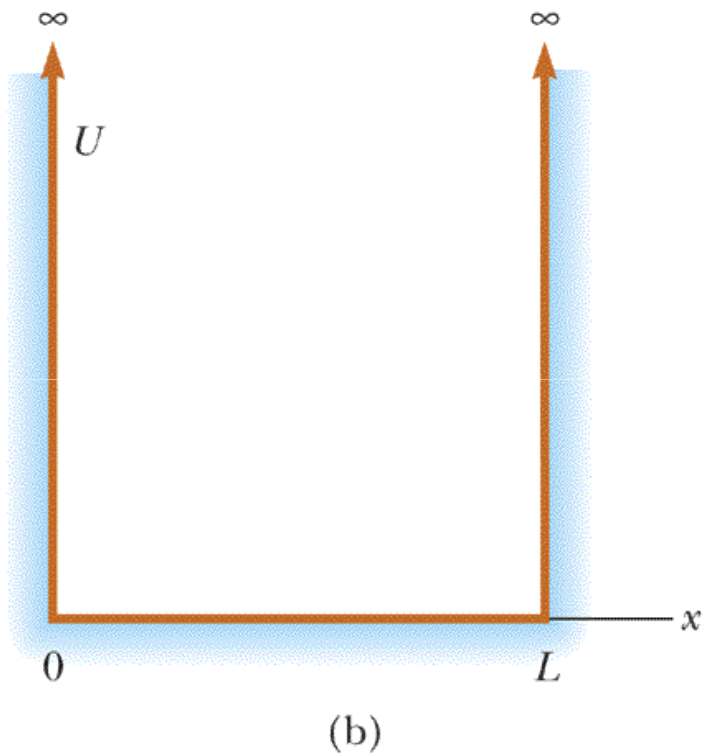
$$P = \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(-1)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

❑ UMA PARTÍCULA EM UMA CAIXA

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.20a



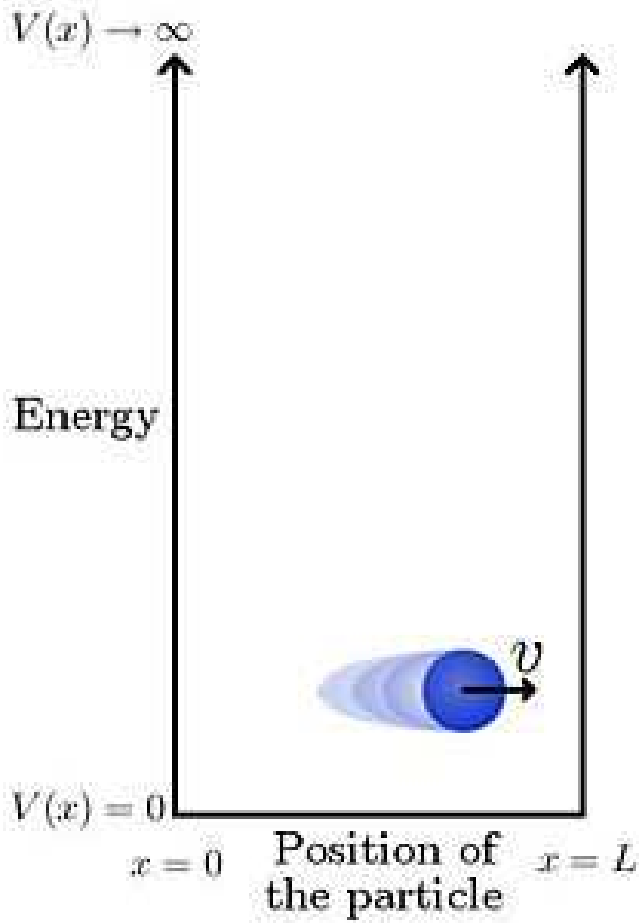
Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.20b



(a) Uma partícula de massa “m” e velocidade “v”, sendo refletida para a frente e para tras entre duas paredes impenetráveis.

(b) A função energia potencial para o sistema.

❑ UMA PARTÍCULA EM UMA CAIXA

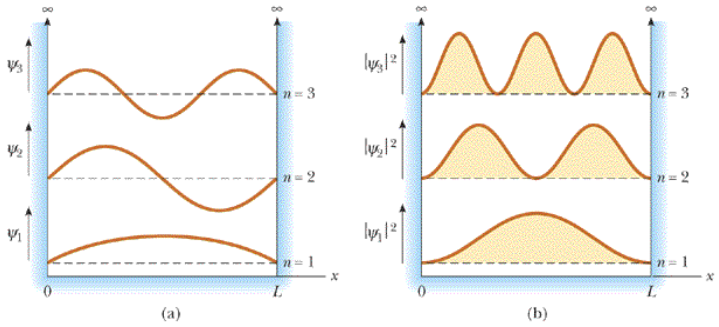


Uma partícula de massa "m", velocidade "v" e momento p=mv sendo refletida para a frente e para trás entre duas paredes impenetráveis, onde
a função energia de potencial é representada por um poço de potencial de zero a infinito.

❑ UMA PARTÍCULA EM UMA CAIXA

$$\psi(x) = A sen\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$ **, a qual**

tem que satisfazer as condições de contorno nas paredes



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

$$\begin{cases} \psi(x=0) = 0 \\ \psi(L) = 0 = A sen\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) \end{cases}$$

$n\pi$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi L}{\lambda} = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi L}{\pi n} = \boxed{\frac{2L}{n}}$$

$$n = 1 \Rightarrow \lambda = 2L; \quad n = 2 \Rightarrow \lambda = L; \quad n = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{3}$$

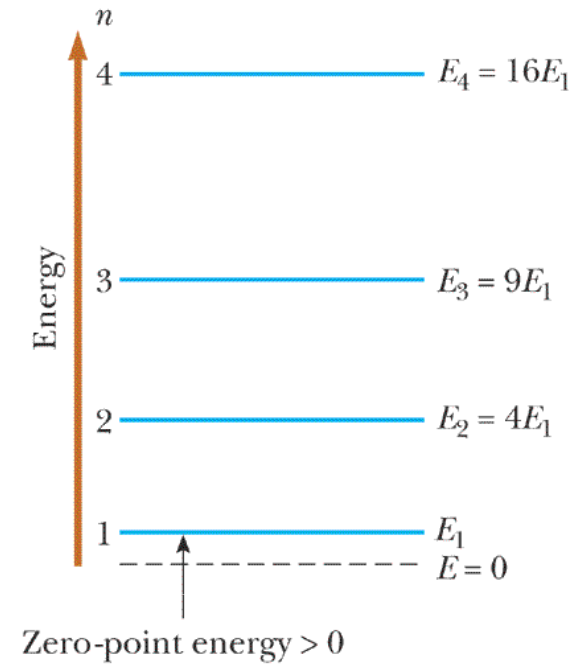
$$\psi(x) = A sen\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A sen\left(\frac{2\pi x}{\boxed{2L/n}}\right) = A sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

❑ UMA PARTÍCULA EM UMA CAIXA

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L/n} = \frac{nh}{2L}$$

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2L}\right)^2 = \frac{h^2}{8mL^2}n^2 \quad (n = 1,2,3...)$$



Quantização de energia

EXEMPLO 28.9: Um elétron ligado.

Um elétron esta confinado entre duas paredes impenetráveis separados por 0.2nm. Determine as energias permitidas da partícula para os estados quânticos descritos por n=1,2,3.

$$m_{e^-} = 9.11 \times 10^{-31} Kg$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L/n} = \frac{nh}{2L}$$

$$E_n = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2L}\right)^2 = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \quad (\mathrm{n} = 1,2,3...)$$

EXEMPLO 28.9: Um elétron ligado.

Um elétron esta confinado entre duas paredes impenetráveis separados por 0.2nm. Determine as energias permitidas da partícula para os estados quânticos descritos por n=1,2,3.

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L/n} = \frac{nh}{2L}$$

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2L}\right)^2 = \frac{h^2}{8mL^2}n^2 \quad (\mathrm{n} = 1,2,3...)$$

$$m_{e^-} = 9.11\times10^{-31}Kg$$

$$\text{para } \mathrm{n} = 1, \text{ temos}:$$

$$E_{n=1} = \frac{h^2}{8mL^2}1^2 = \frac{\left(6.63\times10^{-34}\,J\cdot s\right)^2}{8\cdot\left(9.11\times10^{-31}Kg\right)\cdot\left(2\times10^{-10}m\right)^2} =$$

$$1.51\times10^{-18}\,\mathrm{J} = 9.42\mathrm{eV}$$

EXERCÍCIO 35, seções 28.10 e 28.11, A partícula quântica em uma caixa sob condições de contorno

Um elétron está contido em uma caixa unidimensional com largura de 0.100nm.

(a) Trace um diagrama dos níveis de energia para o elétron com níveis até n=4.

(b) Encontre os comprimentos de onda de todos os fótons que podem ser emitidos pelo elétron ao realizar transições espontâneas que poderiam levá-lo, eventualmente, do estado n=4 para o estado n=1

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \text{considerando L} = \text{d} \Rightarrow d = \frac{n\lambda}{2}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2d/n} = \frac{nh}{2d}$$

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2d}\right)^2 = \frac{h^2}{8md^2}n^2 \quad (\text{n} = 1,2,3...)$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \text{substitindo em } p = \frac{h}{\lambda}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2d/n} = \frac{nh}{2d}$$

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2d}\right)^2 = \frac{h^2}{8md^2}n^2 \quad (\mathrm{n} = 1,2,3...)$$

$$E_n = \frac{1}{d^2}\left[\frac{\left(6.63\times10^{-34} J\cdot s\right)^2}{8\left(9.11\times10^{-31} Kg\right)}\right] = \frac{1}{d^2}\left(6.02\times10^{-38} J\cdot m^2\right) = \frac{1}{d^2}\left(3.77\times10^{-19} eV\cdot m^2\right)$$

$$E_{n=1} = \frac{1}{\left(1.0\times10^{-10} m\right)^2}\left(3.77\times10^{-19} eV\cdot m^2\right)(1)^2 = 37.7 eV$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \text{substituindo em } p = \frac{h}{\lambda}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2d/n} = \frac{nh}{2d}$$

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2d}\right)^2 = \frac{h^2}{8md^2}n^2 \quad (\text{n} = 1,2,3...)$$

$$E_n = \frac{1}{d^2}\left[\frac{\left(6.63\times10^{-34} J\cdot s\right)^2}{8\left(9.11\times10^{-31} Kg\right)}\right] = \frac{1}{d^2}\left(6.02\times10^{-38} J\cdot m^2\right) = \frac{1}{d^2}\left(3.77\times10^{-19} eV\cdot m^2\right)$$

$$E_{n=2} = \frac{1}{\left(1.0\times10^{-10} m\right)^2}\left(3.77\times10^{-19} eV\cdot m^2\right)(2)^2 = 151 eV$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \text{substitindo em } p = \frac{h}{\lambda}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2d/n} = \frac{nh}{2d}$$

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2d}\right)^2 = \frac{h^2}{8md^2}n^2 \quad (\mathrm{n} = 1,2,3...)$$

$$E_n = \frac{1}{d^2}\left[\frac{\left(6.63\times10^{-34} J\cdot s\right)^2}{8\left(9.11\times10^{-31} Kg\right)}\right] = \frac{1}{d^2}\left(6.02\times10^{-38} J\cdot m^2\right) = \frac{1}{d^2}\left(3.77\times10^{-19} eV\cdot m^2\right)$$

$$E_{n=3} = \frac{1}{\left(1.0\times10^{-10} m\right)^2}\left(3.77\times10^{-19} eV\cdot m^2\right)(3)^2 = 339 eV$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \text{substitindo em } p = \frac{h}{\lambda}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2d/n} = \frac{nh}{2d}$$

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2d}\right)^2 = \frac{h^2}{8md^2}n^2 \quad (\text{n} = 1,2,3...)$$

$$E_n = \frac{1}{d^2}\left[\frac{\left(6.63\times10^{-34} J\cdot s\right)^2}{8\left(9.11\times10^{-31} Kg\right)}\right] = \frac{1}{d^2}\left(6.02\times10^{-38} J\cdot m^2\right) = \frac{1}{d^2}\left(3.77\times10^{-19} eV\cdot m^2\right)$$

$$E_{n=4} = \frac{1}{\left(1.0\times10^{-10} m\right)^2}\left(3.77\times10^{-19} eV\cdot m^2\right)(4)^2 = 603 eV$$

EXERCÍCIO 35, seções 28.10 e 28.11, A partícula quântica em uma caixa sob condições de contorno

Um elétron está contido em uma caixa unidimensional com largura de 0.100nm.

(b) Encontre os comprimentos de onda de todos os fótons que podem ser emitidos pelo elétron ao realizar transições espontâneas que poderiam levá-lo, eventualmente, do estado n=4 para o estado n=1

Resposta:
Quando o elétron salta do estado n=2 para o estado n=1 ele libera a energia

$$E = 151eV - 37.7eV = 113eV = hf = h\frac{c}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(6.63\times10^{-34}\,J\cdot s)(3.0\times10^{8}\,m/s)}{(113eV)(1.60\times10^{-19}\,J/eV)} = 11.0nm$$

$$4 \rightarrow 1$$

$$E = 603eV - 37.7eV = 565eV$$

$$\lambda = 2.20nm$$

Chamamos simplesmente a **amplitude da onda** associada à partícula de **"amplitude de probabilidade"** ou de **"função de onda"** e lhe damos o símbolo:

$$\psi(x, y, z) \quad \text{ou} \quad \psi(x, y, z, t)$$

Em geral a **<u>função de onda ψ</u>** é uma **função de variável complexa.**
Por que?

$$\psi(x,t) = A(\cos(kx - \omega t) + i\, sen(kx - \omega t))$$

- porque **<u>não define uma grandeza física</u>** (são instrumentos de cálculo)

- uma **grandeza complexa**, não pode ser medida por um instrumento real

- O mundo **REAL** (usando o termo em seu sentido não matemático) é o mundo das **<u>grandezas REAIS</u>** (usando o termo em seu sentido matemático)

Embora **não seja possível especificar a posição de uma partícula** com certeza absoluta, é possível, através de $|\psi|^2$ especificar a probabilidade de **observá-la em uma pequena região ao redor de um certo ponto.**

A probabilidade de encontrar a partícula no intervalo a – b (a<x<b) **para uma função complexa:**

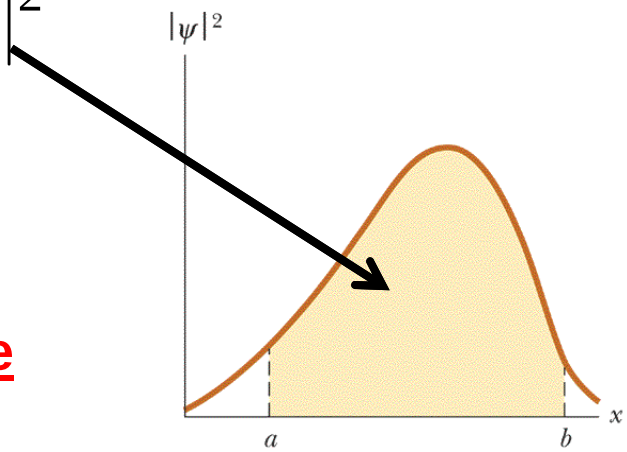
$$P_{ab} = \int_a^b \psi^* \psi dx$$

$$|\psi|^2 \equiv \psi^* \psi$$

$$\psi^* \text{ complexo conjugado de } \psi$$

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 28.19

Esta probabilidade é a área sobre a curva de $|\psi|^2$ em função de "x" entre os pontos x=a e x=b.



Experimentalmente esta **probabilidade é finita**.

O valor desta probabilidade tem que estar entre 0 e 1 (conjunto dos números reais positivos).

Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

O quadrado absoluto $|\psi|^2 = \psi^* \psi$

$$\psi^* \text{ complexo conjugado de } \psi$$

Sempre será **real e positivo** e é **proporcional à probabilidade de encontrar a partícula**, por unidade de volume, em um certo ponto, em algum instante.

O **número imaginário "i"** é uma unidade definida de forma tal que:

$$i^2 = -1 \quad \text{ou} \quad i = \sqrt{-1}$$

O nome é apropriado porque nenhum número real tem quadrado negativo.

Um **número complexo "z"** pode ser escrito na forma: $z = x + iy$

O **complexo conjugado** deste número é escrito como z* e definido como:

$$z = x - iy$$ de tal forma que:

$$z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2 y^2 - ixy + ixy = x^2 - i^2 y^2$$

$z \cdot z^* = x^2 + y^2$ o produto entre um número complexo e seu conjugado é real

Uma vez **conhecida a função de onda para uma partícula**, é possível calcular a **posição média** da partícula após várias medidas.

Esta **posição média** é chamada de **valor esperado** de "x" **definido por:**

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi dx$$

Analogamente

$$\langle f(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* f(x) \psi \, dx$$

Podemos calcular o **valor esperado para qualquer função de "x":**

$$\langle x \rangle^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) x^2 \psi(x,t) dx \quad \text{e} \quad \langle f(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) f(x) \psi(x,t) dx$$

Mesmo para uma função que dependa explicitamente do tempo como uma energia potencial V(x,t) podemos escrever

$$\langle V(x,t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) V(x,t) \psi(x,t) dx$$

EXEMPLO 28.11: Os valores esperados para uma partícula na caixa.

Uma partícula de massa m está confinada a uma caixa unidimensional entre x=0 e x=L. Encontre o valor esperado da posição “x” da partícula para um estado com número quântico “n”.

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi dx \qquad \psi(\mathrm{x}) = \sqrt{\frac{2}{L}} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\int x \sin^2 ax \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

EXEMPLO 28.11: Os valores esperados para uma partícula na caixa.

Uma partícula de massa m está confinada a uma caixa unidimensional entre x=0 e x=L. Encontre o valor esperado da posição “x” da partícula para um estado com número quântico “n”.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi dx = \int_0^L x \left(\sqrt{\frac{2}{L}} sen\left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right)^2 dx =$$

$$\psi(\mathrm{x}) = \sqrt{\frac{2}{L}} sen\left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$\frac{2}{L} \int_0^L x \left(sen^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right) dx$$

$$\int x \sin^2 ax \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\langle x \rangle = \frac{2}{L} \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x sen\left(2\frac{n\pi x}{L} \right)}{4\frac{n\pi}{L}} - \frac{\cos\left(2\frac{n\pi x}{L} \right)}{8\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2} \right]_0^L =$$

$$\langle x \rangle = \frac{2}{L} \left(\frac{L^2}{4} \right) = \frac{L}{2}$$

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi dx$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi dx = \int_0^L x \left(\sqrt{\frac{2}{L}} sen\left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right)^2 dx =$$

$$\frac{2}{L} \int_0^L x \left(sen^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right) dx$$

$$\langle x \rangle = \frac{2}{L} \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x sen\left(2\frac{n\pi x}{L} \right)}{4\frac{n\pi}{L}} - \frac{\cos\left(2\frac{n\pi x}{L} \right)}{8\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2} \right]_0^L =$$

$$\langle x \rangle = \frac{2}{L} \left(\frac{L^2}{4} \right) = \frac{L}{2}$$

FIM