Eletrodinâmica Quântica

1. Quantização do campo livre

Eletrodinâmica foi quantizada por Dirac em 1927

(A) Teoria clássica:

As eqs. de Maxwell no vácuo são

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = 0 \quad (1) \qquad \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \wedge \mathbb{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \quad (3) \qquad \nabla \wedge \mathbb{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E} \quad (4)$$

Podemos satisfazer (2) e (3) usando os potenciais vetor e escalar

$$(2) \Rightarrow \quad \mathbb{B} = \nabla \wedge \mathbb{A} \qquad (5)$$

$$(3) \Rightarrow \quad \nabla \wedge \left(\mathbb{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \mathbb{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} \qquad (6)$$

Todavia $(\varphi, \mathbb{A})$ não é única: a transformação

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \qquad (7)$$

$$\mathbb{A} \to \mathbb{A}' = \mathbb{A} + \nabla \Lambda \qquad (8)$$

deixa $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ inalterados

Esta é a invariância de gauge.

As eqs (1) e (4) ~~ã~~ escritas em termos de φ e $\mathbb{A}$ são

$$\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbb{A}) = 0 \qquad (9)$$

$$\nabla^2 \mathbb{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbb{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0 \qquad (10)$$

Neste ponto é conveniente escolher um gauge. O mais simples é tomar

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \qquad (1)$$

A eq. (QED1-9) $\Rightarrow \varphi = 0$ que substituído em (QED1-10) leva a

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2)$$

Neste gauge

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$(3)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

Esta escolha não é invariante por Lorentz além de ter um gauge fixo. Não vamos analisar que os resultados são de fato (apesar de não explicitamente) invariantes por Lorentz, nem verificar que os resultados continuam válidos em outros gauges... Isso leva a complicações técnicas desnecessárias para um primeiro tratamento do problema.

Utilizaremos (2) para obter um conjunto completo de modos normais. Para simplificar, colocaremos o sistema numa caixa e utilizaremos condições de contorno periódicas.

Os modos normais de (2) são $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} = e^{ik\cdot x}$ onde $\omega_k = ck$

e $\mathbf{k} = (n_1, n_2, n_3)\frac{2\pi}{V^{1/3}}$ c/ $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Sabemos de partículas livres numa caixa c/ cond. de contorno periódicas que ondas planas formam um conjunto completo

$$\int_V d^3\mathbf{r} \left(\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{V^{1/2}} \right)^* \left(\frac{e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}}{V^{1/2}} \right) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$$

e que

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

Poderíamos trabalhar no limite de volume infinito fazendo

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \Longleftrightarrow \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \qquad \text{e} \qquad \frac{V}{(2\pi)^3}\,\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

Agora expandimos o potencial vetor $\mathbf{A}$ em ondas planas

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}(t) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{V^{1/2}} + \tilde{\mathbf{A}}^*_{\mathbf{k}} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{V^{1/2}} \qquad (0)$$

Real

trocando a segunda soma por $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{V^{1/2}} \left[\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}(t) + \tilde{\mathbf{A}}^*_{-\mathbf{k}} \right] \qquad (1)$$

A escolha do gauge $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ implica que

$$\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}(t) = 0 \qquad (2) \qquad [\text{use (0) instead of (1)}]$$

Substituindo (QED3-0) em (QED2-2) obtemos

$$\sum_{\mathbb{k}} \left\{ \frac{e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}}{V^{1/2}} \left(-k^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{k}} + \frac{e^{-i\mathbb{k}\mathbb{r}}}{V^{1/2}} \left(-k^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \tilde{\mathbb{A}}^*_{\mathbb{k}} \right\}$$

Logo $\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{k}} = \mathbb{A}_k\, e^{-i\omega_k t}$ (1) onde $\omega_k = kc$. (+)

Expressemos a energia do campo eletromagnético em termos dos modos normais:

$\boxed{23/4/09}$

$$H_\gamma = \frac{1}{2}\int d^3r \left[\mathbb{E}^2 + \mathbb{B}^2\right] \quad (2)$$

Como

$$\mathbb{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} \overset{(QED3-1)\,e\,(QED4-1)}{\downarrow}{=} \sum_{\mathbb{k}} i\frac{\omega_{\mathbb{k}}}{c}\frac{e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}}{V^{1/2}}\left[\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{k}}(t) - \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbb{k}}(t)\right]$$

$$\mathbb{B} = \nabla\wedge\mathbb{A} = \sum_{\mathbb{k}} i\frac{e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}}{V^{1/2}}\,\mathbb{k}\wedge\left[\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{k}} + \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbb{k}}\right]$$

temos

$$\int d^3r\,\mathbb{E}^2 = \sum_{\mathbb{k}\mathbb{k}'} -k k' \overbrace{\int d^3r\,\frac{e^{i(\mathbb{k}+\mathbb{k}')\cdot\mathbb{r}}}{V}}^{\delta_{\mathbb{k},-\mathbb{k}'}} \left[\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{k}} - \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbb{k}}\right]\left[\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{k}'} - \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbb{k}'}\right]$$

$$= \sum_{\mathbb{k}} k^2 \left(\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{k}} - \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbb{k}}\right)\left(\tilde{\mathbb{A}}^*_{\mathbb{k}} - \tilde{\mathbb{A}}_{-\mathbb{k}}\right) = \sum_{\mathbb{k}} k^2 \left|\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{k}} - \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbb{k}}\right|^2$$

(+) A exponencial positiva $e^{+i\omega t}$ não é necessária devido a soma em $\mathbb{k}$ conter ondas em todas as direções

Analogamente

$$\int d^3r\, \mathbb{B}\cdot\mathbb{B} = \sum_{\mathbf{k}\,\mathbf{k}'} \underbrace{\int \frac{d^3r}{V}\, e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}}_{\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}} \mathbf{k}\wedge\left(\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}}\right)\cdot \mathbf{k}'\wedge\left(\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}'} + \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}'}\right)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}\wedge\left(\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}}\right)\cdot \mathbf{k}\wedge\left(\tilde{\mathbb{A}}^*_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbb{A}}_{-\mathbf{k}}\right)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \left|\mathbf{k}\wedge\left(\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}}\right)\right|^2 \underset{(\text{QED } 3\text{-}2)}{=} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \left|\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}}\right|^2$$

$\perp$ (QED 3-2)

Logo

$$H_\gamma = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} k^2 \left\{ \left|\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}}\right|^2 + \left|\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}}\right|^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} k^2 \Big\{ |\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}}|^2 + |\tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}}|^2 + \cancel{\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}}\tilde{\mathbb{A}}_{-\mathbf{k}}} + \cancel{\tilde{\mathbb{A}}^*_{\mathbf{k}}\tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}}}$$
$$+ |\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}}|^2 + |\tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}}|^2 - \cancel{\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}}\tilde{\mathbb{A}}_{-\mathbf{k}}} - \cancel{\tilde{\mathbb{A}}^*_{\mathbf{k}}\tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}}} \Big\}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} k^2 \left\{ |\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}}|^2 + |\tilde{\mathbb{A}}^*_{-\mathbf{k}}|^2 \right\} = 2\sum_{\mathbf{k}} k^2 |\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}}|^2$$

$$\boxed{H_\gamma = 2\sum_{\mathbf{k}} k^2 |\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}}|^2} \quad (1)$$

Neste ponto é conveniente introduzir os vetores de polarização $\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{k} = \mathbb{A}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{k}\, e^{-i\omega t} = 0$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{k} = 0$$