

Eletrodinâmica Quântica

QED 1

1. Quantização do campo livre

Eletrodinâmica foi quantizada por Dirac em 1927

(A) Teoria clássica:

As eqs. de Maxwell no vácuo são

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Podemos satisfazer (2) e (3) usando os potenciais vetor e escalar

$$(2) \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (5)$$

$$(3) \Rightarrow \nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6)$$

Todavia (ϕ, \mathbf{A}) não é única: a transformação

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (7)$$

deixa \mathbf{E} e \mathbf{B} inalterados

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (8)$$

Esta é a invariância de gauge.

As eqs (1) e (4) podem ser escritas em termos de ϕ e \mathbf{A} são

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad (9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (10)$$

Sabemos de partículas livres numa caixa d coord. de QED3 contorno periódicas que ondas planas formam um conjunto completo

$$\int_V d^3r \left(\frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} \right)^* \left(\frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} \right) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$$

e que

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Podemos trabalhar no limite de volume infinito fazendo

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \iff \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad e \quad \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Agora expandimos o potencial vetor A em ondas planas

$$A(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{A}_{\mathbf{k}}(t) \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} + \tilde{A}_{\mathbf{k}}^* \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} \quad (1)$$

↓
t+d

trocando a segunda soma por $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$

$$A(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} \left[\tilde{A}_{\mathbf{k}}(t) + \tilde{A}_{-\mathbf{k}}^* \right] \quad (1')$$

A escolha do gauge $\nabla \cdot A = 0$ implica que

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (2) \quad [\text{use (1) instead of (1)}]$$

Substituindo (QED3-0) em (QED2-2) obtemos (QED4)

$$\sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{12}} \left(-k^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{12}} \left(-k^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}^* \right\}$$

Logo $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$ (1) onde $\omega_{\mathbf{k}} = kc$. (†)

Expressemos a energia do campo eletromagnético em termos dos modos normais:

23/4/09

$$H_{EM} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \right] \quad (2)$$

Como (QED3-1) e (QED4-1).

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}} i \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{12}} \left[\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}(t) - \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}^*(t) \right]$$

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} i \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{12}} \mathbf{k} \wedge \left[\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}^* \right]$$

temos

$$\begin{aligned} \int d^3r \mathbf{E}^2 &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} -k k' \int d^3r \frac{\delta_{|\mathbf{k}, -\mathbf{k}'|}}{v} \left[\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}^* \right] \left[\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}'} - \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}'}^* \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} k^2 \left(\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}^* \right) \left(\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}^* \right) = \sum_{\mathbf{k}} k^2 \left| \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}^* \right|^2 \end{aligned}$$

(†) A exponencial possui $+i\omega t$ não é necessária dividir a norma por k para obter as todas as direções

Analogamente

$$\int d^3r \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \underbrace{\int \frac{d^3r}{V} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}}_{\delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}} |\mathbf{k} \wedge (\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}'})| \cdot |\mathbf{k}' \wedge (\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}'})|$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k} \wedge (\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}})| \cdot |\mathbf{k} \wedge (\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}})|$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \underbrace{|\mathbf{k} \wedge (\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}})|^2}_{\perp \leftarrow \text{(QED 3-2)}} = \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}|^2$$

Logo

$$H_{\mathcal{Y}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \left\{ |\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}|^2 + |\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \otimes \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}|^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \left\{ |\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2 + |\tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}|^2 + \cancel{\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}} + \cancel{\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}^*} + |\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2 + |\tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}|^2 - \cancel{\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}} - \cancel{\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* \tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}^*} \right\}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} k^2 \left\{ |\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2 + |\tilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}|^2 \right\} = 2 \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2$$

$$\boxed{H_{\mathcal{Y}} = 2 \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2} \quad (\perp)$$

Neste ponto é conveniente introduzir os vetores de polarização

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} e^{-i\omega t} = 0$$

$$\therefore \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Definimos agora uma base (para cada \mathbf{k}) de vetores no \mathbb{R}^3 QED 6

$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}$ tais que

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} = 0$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{onde } \alpha, \beta = 1, 2$$

Esta é a polarização linear. Nesta base $A_{\mathbf{k}} = \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} A_{\alpha}(\mathbf{k})$

o que nos permite re-escrever QED-1 como

$$H_{\gamma} = 2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^2 k^2 |A_{\alpha}(\mathbf{k})|^2$$

Outra base conveniente é a das polarizações circulares

que são complexas: $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \pm i \mathbf{e}_{\mathbf{k}2})$

que satisfazem

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}^* \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}^* \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda'} = i \lambda \hat{\mathbf{k}} \delta_{\lambda\lambda'} \\ i \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} = \lambda \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \end{array} \right. \quad \text{onde } \lambda, \lambda' = \pm 1$$

Nesta base escrevemos $A_{\mathbf{k}} = \sum_{\lambda=\pm 1} A_{\lambda}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$, o que

leva a

$$H_{\gamma} = 2 \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{\mathbf{k}} k^2 |A_{\lambda}(\mathbf{k})|^2$$

Podemos deixar H_{γ} (QED 5-1) na forma de um oscilador harmônico definindo

1 QED 7

$$\vec{Q}_{1k}(t) = \frac{1}{c} \left[\tilde{A}_{1k}(t) + \tilde{A}_{1k}^*(t) \right] \quad (1)$$

e

$$\vec{P}_{1k}(t) = -ik \left[\tilde{A}_{1k}(t) - \tilde{A}_{1k}^*(t) \right] \quad (2)$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\vec{P}_{1k}^2 + \omega^2 \vec{Q}_{1k}^2 \right) &= \frac{1}{2} \left[-k^2 \left(\tilde{A}_{1k} - \tilde{A}_{1k}^* \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \left(\tilde{A}_{1k} + \tilde{A}_{1k}^* \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} k^2 \left[- \left(\tilde{A}_{1k} \right)^2 - \left(\tilde{A}_{1k}^* \right)^2 + 2 \tilde{A}_{1k} \tilde{A}_{1k}^* \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{A}_{1k} \right)^2 + \left(\tilde{A}_{1k}^* \right)^2 + 2 \tilde{A}_{1k} \tilde{A}_{1k}^* \right] \\ &= 2k^2 \left| \tilde{A}_{1k} \right|^2 \end{aligned}$$

Logo podemos escrever

$$H_{\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{1k} \left(\vec{P}_{1k}(t)^2 + \omega^2 \vec{Q}_{1k}(t)^2 \right) \quad (3)$$

que tem a forma de um oscilador harmônico. Usamos a eqs de Hamilton para (3):

$$\dot{\vec{P}}_{1k} \stackrel{?}{=} - \frac{\partial H_{\gamma}}{\partial \vec{Q}_{1k}} \quad \dot{\vec{Q}}_{1k} \stackrel{?}{=} \frac{\partial H_{\gamma}}{\partial \vec{P}_{1k}}$$

$$\frac{\partial H_{\gamma}}{\partial \vec{Q}_{1k}} = 2 \frac{\omega^2}{2} \vec{Q}_{1k} \Rightarrow -ik \left[\dot{\tilde{A}}_{1k} - \dot{\tilde{A}}_{1k}^* \right] = \omega k \left[\tilde{A}_{1k} + \tilde{A}_{1k}^* \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_S}{\partial \vec{P}_{1k}} = \vec{P}_{1k} \Rightarrow \frac{1}{c} \left[\dot{\tilde{A}}_{1k} + \dot{\tilde{A}}_{1k}^* \right] = -ik \left[\tilde{A}_{1k} - \tilde{A}_{1k}^* \right] \quad \text{QED?}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{A}}_{1k} + \dot{\tilde{A}}_{1k}^* = -i\omega (\tilde{A}_{1k} - \tilde{A}_{1k}^*) \\ \dot{\tilde{A}}_{1k} - \dot{\tilde{A}}_{1k}^* = +i\omega (\tilde{A}_{1k} + \tilde{A}_{1k}^*) \end{array} \right.$$

$$(+)\Rightarrow \dot{\tilde{A}}_{1k} = \dot{\tilde{A}}_{1k}^* + 2i\omega \tilde{A}_{1k}^* \Rightarrow \dot{\tilde{A}}_{1k} = -\omega^2 \tilde{A}_{1k}$$

$$(-)\Rightarrow \dot{\tilde{A}}_{1k}^* = -2i\omega \tilde{A}_{1k} \quad \text{OK}$$

Logo a dinâmica é completamente dada pelas
PSEUDO equações de Hamilton!

(B) QUANTIZAÇÃO

utilizando a polarização linear

$$\vec{P}_{1k} = \sum_{\alpha=1}^2 \epsilon_{1k\alpha} P_{\alpha}(1k)$$

$$\vec{Q}_{1k} = \sum_{\alpha=1}^2 \epsilon_{1k\alpha} Q_{\alpha}(1k)$$

(QED7-3) pode ser escrita como

$$H_S = \frac{1}{2} \sum_{1k} \sum_{\alpha} \left(P_{\alpha}^2(1k) + \omega_{1k}^2 Q_{\alpha}^2(1k) \right)$$

(o mesmo vale para a polarização circular!)

Agora, por analogia com o oscilador harmônico, promovemos QED 9

$P_\alpha(k)$ e $Q_\beta(k')$ a operadores satisfazendo

$$[Q_\alpha(k), P_\beta(k')] = i\hbar \delta_{kk'} \delta_{\alpha\beta}$$

$$[Q_\alpha(k), Q_\beta(k')] = [P_\alpha(k), P_\beta(k')] = 0$$

PI polarização circular $\alpha \rightarrow \beta$
 $\beta \rightarrow \alpha'$
 e α'

As eq's de movimento quânticas para $Q_\alpha(k)$ e $P_\beta(k)$ na representação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{dQ}{dt} = [Q, H]$$

$$i\hbar \frac{\partial Q_\alpha(k)}{\partial t} = \left[Q_\alpha(k), \frac{1}{2} \sum_{k'} \sum_{\beta} (P_{\beta(k')}^2 + \omega_{k'}^2 Q_{\beta(k')}^2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k'} \sum_{\beta} \underbrace{[Q_\alpha(k), P_{\beta(k')}^2]}_{2i\hbar \delta_{\alpha\beta} \delta_{kk'} P_{\beta(k')}} = i\hbar P_\alpha(k)$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_\alpha(k) = P_\alpha(k)$$

$$i\hbar \frac{\partial P_\alpha(k)}{\partial t} = \left[P_\alpha(k), \frac{1}{2} \sum_{k'} \sum_{\beta} (P_{\beta(k')}^2 + \omega_{k'}^2 Q_{\beta(k')}^2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \omega_k^2 (-2i\hbar P_\alpha(k))$$

→ como esperado!

$$\dot{P}_\alpha(k) = -\omega_k^2 Q_\alpha(k)$$

Neste ponto definiremos operadores de aniquilação e criação:

$$a_{k\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\omega Q_{\alpha}(k) + i P_{\alpha}(k) \right) \quad (1)$$

le o mesmo // polarizações circulares ($\alpha \rightarrow \lambda$). Como esperado

$$\begin{aligned} [a_{k\alpha}, a_{k'\beta}^{\dagger}] &= \frac{1}{2\hbar\omega} \left[\omega Q_{\alpha}(k) + i P_{\alpha}(k), \omega Q_{\beta}(k') - i P_{\beta}(k') \right] \\ &= \frac{1}{2\hbar\omega} \left[\omega \hbar \delta_{\alpha\beta} \delta_{kk'} (-i) + i \hbar\omega (-i \delta_{\alpha\beta} \delta_{kk'}) \right] \\ &= \delta_{kk'} \delta_{\alpha\beta} \quad (2) \end{aligned}$$

É imediato obter que

$$\begin{aligned} H_g &= \sum_{k\alpha} \hbar\omega_{k\alpha} \left[\underbrace{a_{k\alpha}^{\dagger} a_{k\alpha}}_{N_{k\alpha}} + \frac{1}{2} \right] \\ &= \sum_{k\alpha} \hbar\omega_{k\alpha} \left[N_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

Onde $N_{k\alpha} = a_{k\alpha}^{\dagger} a_{k\alpha}$ que possui auto-valoros $0, 1, 2, \dots$

A eq. de Heisenberg para $a_{k\alpha}$ é

QED II

$$i\hbar \dot{a}_{k\alpha} = [a_{k\alpha}, H] = \hbar\omega_k a_{k\alpha} \quad (1)$$

$$\Rightarrow a_{k\alpha}^{(t)} = a_{k\alpha}(0) e^{-i\omega_k t} \quad (2)$$

Reescrevamos os campos A , B e E em termos de $a_{k\alpha}$:

De (QED7-1) temos que

$$Q_{\alpha}(x) = \frac{1}{c} \left[\tilde{A}_{\alpha}(k) + \tilde{A}_{\alpha}^*(k) \right]$$

Por outro lado de (QED10-1) segue que

$$Q_{\alpha}(k) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a_{k\alpha} + a_{k\alpha}^{\dagger})$$

logo podemos identificar $\tilde{A}_{\alpha}(k) = \sqrt{\frac{\hbar c}{2k}} a_{k\alpha}$

o que nos permite escrever:

$$A(x) = \sum_{k\alpha} \int \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \left[e^{ikx} a_{k\alpha} E_{\alpha} + h.c. \right] \quad (3)$$

com $k \cdot x = k \cdot r - \omega_k t$

$$E(x) = i \sum_{k\alpha} \int \sqrt{\frac{\hbar c k}{2V}} \left[e^{ikx} a_{k\alpha} E_{\alpha} + h.c. \right] \quad (4)$$

$$B(x) = i \sum_{k\alpha} \int \sqrt{\frac{\hbar c}{2Vk}} \left[e^{ikx} k \times E_{\alpha} a_{k\alpha} + h.c. \right] \quad (5)$$

Antes de interpretar os resultados calculemos o momento linear do campo eletromagnético 27/04/09 QED12

$$P_{lin} = \frac{1}{2c} \int d^3r \left[\underbrace{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}_x - \underbrace{\mathbf{B} \wedge \mathbf{E}}_{x^+} \right] \quad (1) \quad \text{já usado}$$

de uma forma que seja hermitiano

$$\int d^3r \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{|\mathbf{k}|} \sum_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{\hbar c}{2V}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2V|\mathbf{k}|}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}\alpha} \epsilon_{\alpha} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} \epsilon_{\alpha}^{(x)} \right) \wedge \left(e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}'\beta} \mathbf{k}' \wedge \epsilon_{\beta} - e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}'\beta}^{\dagger} \mathbf{k}' \wedge \epsilon_{\beta}^{(x)} \right)$$

$$\int d^3r e^{i(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'} V$$

$$= - \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha\beta} \frac{\hbar c}{2} \left\{ a_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\beta} \epsilon_{\alpha} \wedge (-\mathbf{k} \wedge \epsilon_{\beta}) - a_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\beta}^{\dagger} \epsilon_{\alpha} \wedge [\mathbf{k} \wedge \epsilon_{\beta}^{(x)}] \right.$$

$$\left. - a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\beta} \epsilon_{\alpha} \wedge (\mathbf{k} \wedge \epsilon_{\beta}) + a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\beta} \epsilon_{\alpha} \wedge (-\mathbf{k} \wedge \epsilon_{\beta}^{(x)}) \right\}$$

$$\epsilon_{\alpha} \wedge (\mathbf{k} \wedge \epsilon_{\beta}) = \underbrace{\mathbf{k} (\epsilon_{\alpha} \cdot \epsilon_{\beta})}_{\delta_{\alpha\beta}} - \epsilon_{\beta} (\epsilon_{\alpha} \cdot \mathbf{k}) \quad \rightarrow 0$$

$$= \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{\hbar c}{2} |\mathbf{k}| \left\{ + a_{\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\alpha} + a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\alpha} \right\}$$

$$\text{Logo} \quad + a_{\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\alpha} + a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\alpha}$$

$$P_{lin} = \frac{1}{2c} \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{\hbar c}{2} |\mathbf{k}| \left\{ + a_{-\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha} + a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\alpha} \right\}$$

Agora

$$\sum_{\mathbf{k}} \hbar k \left[a_{\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\alpha} + a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{-\mathbf{k}\alpha}^\dagger \right] + \underbrace{\sum_{\mathbf{k}} \hbar k (a_{-\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha} + a_{-\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger)}_{\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \hbar k (a_{\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\alpha} + a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{-\mathbf{k}\alpha}^\dagger) - \sum_{\mathbf{k}} \hbar k (a_{\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\alpha} + a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{-\mathbf{k}\alpha}^\dagger) = 0$$

Logo

$$P_{lin} = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{\hbar k}{2} \underbrace{(a_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger + a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha})}_{2a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha} + 1}$$

$$\text{ou } P_{lin} = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar k \left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right)$$

\downarrow
 0 por simetria!

Exercício: mostrar que $T(\vec{S}) = e^{-i\vec{S} \cdot \vec{P}_{lin}/\hbar}$ é tal que

$$T^\dagger(\vec{S}) \mathbb{E}(r, t) T(\vec{S}) = \mathbb{E}(r - \vec{S}, t)$$

mostrado que de fato Uma gen. translação, como todo momento linear conservado!

SPIN do fóton Delineemos o caminho γ no \mathbb{R}^3 ! O spin é o componente do momento angular que ~~não~~ depende de escolha de origem. ~~Veja~~ como (Early origin no caso de A_μ em vetores). Vejamos:

classicamente
$$\mathbb{J}_{cl} = \frac{1}{c} \int d^3r \{ \mathbf{r} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) \}$$

É possível escrever esta expressão como três $\mathbb{J} = \mathbb{J}_{sp} + \mathbb{J}_{orb}$ onde

$$\mathbb{J}_{sp} = \frac{1}{2c} \int d^3r (\mathbf{E} \wedge \mathbf{A} - \mathbf{A} \wedge \mathbf{E})$$

$$\mathbb{J}_{orb} = \frac{1}{2c} \int d^3r \left[\sum_{i=1}^3 E_i (\mathbf{r} \wedge \nabla A_i) + (\mathbf{r} \wedge \nabla A_i) E_i \right]$$

Substituindo as expressões de \mathbf{E} e \mathbf{A} na base de helicidade $\hat{\mathbf{e}}_{\pm}$ que

$$\mathbb{J}_{sp} = -i \hbar \sum_{\mathbf{k}\lambda} \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \wedge \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\lambda} = \hbar \sum_{\mathbf{k}\lambda} \lambda \hat{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}\lambda}$$

Logo se o estado de n fótons $|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle$ o momento angular na direção de \mathbf{k} é $\pm \hbar n$, i.e., a helicidade do fóton é ± 1 .

Mas e a componente 0? Esta componente não aparece por este ser uma teoria relativística e o fóton não tem massa! Como não existe um referencial em que o fóton esteja em repouso, não é possível usar o trio quadrupla não ultravioleta e logo não há contradição!

2. Causalidade e Incertezas em QED.

logo são chamados de locais

E, B, A_μ são operadores que dependem do ponto do espaço-tempo. Em relatividade locais duas operadores $\phi(x)$ e $\psi(x')$ simultaneamente se não existir causalidade entre (x, t) e (x', t') . Vejamos se QED respeita isso!

(a) Relações de comutação: Passemos ~~para~~ para o limite de volume

infinito: $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \Leftrightarrow \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ ①

$\frac{1}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{m}} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{m})$ ②

Com isso precisamos modificar as operações de $a_{k,\lambda}$: (QED 16)

queremos que $|k,\lambda\rangle = a_{\lambda}^{\dagger}(k)|0\rangle$ e f. f. $\langle k,\lambda | k',\lambda' \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k-k')$

↳ novo

terdo em vista (2) $a_{\lambda}^{\dagger}(k) = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} a_{k\lambda}^{\dagger}$

↳ continuo

↳ discreto

Com isto $[a_{\lambda}(k), a_{\lambda'}^{\dagger}(k')] = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k-k') \xrightarrow{\int d^3x} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k-k')$

O potencial vetor é escrito: $A = \sqrt{\hbar c} \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2k} \sum_{\lambda} e^{ikx} (\epsilon_{k\lambda} a_{\lambda}(k) + l.c)$

29/4/09

↳ se for conveniente por k e k' a mesma!

Agora calculamos $[A_j(x_1), A_j(x_2)]:$

$$[A_j(x_1), A_j(x_2)] = \hbar c \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2k} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3} 2k'} \sum_{\lambda, \lambda'} (\epsilon_{k\lambda}^j \epsilon_{k'\lambda'}^j) e^{i(kx_1 + k'x_2)} (e^{ikx} a_{\lambda}(k) + e^{-ikx} a_{\lambda}(k)) (e^{ik'x'} a_{\lambda'}(k') + e^{-ik'x'} a_{\lambda'}(k'))$$

$$= \hbar c \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2k} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3} 2k'} \sum_{\lambda, \lambda'} (\epsilon_{k\lambda}^j \epsilon_{k'\lambda'}^j) \left\{ e^{i(kx_1 - k'x_2)} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k-k') - e^{-i(kx_1 - k'x_2)} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k-k') \right\}$$

$$= \hbar c \int d^3k \ t_{ij} \left[e^{ik \cdot (x_1 - x_2)} - e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)} \right]$$

ou $t_{ij} = \sum_{\lambda} e^{i\lambda x} e^{i\lambda x} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$

explicit

Logo (após um troco de variáveis $k \rightarrow -k$)

(QED)

$$[A_i(x_1), A_j(x_2)] = -2i\hbar c \int \frac{d^3k}{2k(2\pi)^3} \epsilon_{ij} e^{i k \cdot (x_1 - x_2)} \sin kc(t_1 - t_2) \quad (1)$$

Vejamos como são os comutadores entre os campos físicos $E = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A$.

$$[E_i(x_1), E_j(x_2)] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} [A_i(x_1), A_j(x_2)]$$

ABRI R
 AS COIDES

Usando que

$$\frac{k_i k_j}{k^2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left(e^{i k \cdot (x_1 - x_2)} \sin(kc(t_1 - t_2)) \right) = \frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{2j}} \left(e^{i k \cdot (x_1 - x_2)} \sin(kc(t_1 - t_2)) \right)$$

vem que

$$[E_i(x_1), E_j(x_2)] = 2i\hbar c \left(\delta_{ij} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{2j}} \right) D(r, t) \quad (1)$$

onde $r = x_1 - x_2$, $t = t_1 - t_2$ e

$$D(r, t) = \int \frac{d^3k}{2k(2\pi)^3} e^{i k \cdot r} \sin ket \quad (2)$$

a qual é dado por

$$\begin{aligned} D(r, t) &= \int \frac{dk k^2}{2k(2\pi)^3} \int dR_k e^{i k r \cos \theta} \sin(ket) \\ &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sin kr \sin kr = \frac{1}{8\pi r} \left(\delta(r+ct) - \delta(r-ct) \right) \end{aligned}$$

Logo $[E_i(x_1), E_j(x_2)]$ é nulo exceto se os dois pontos pertencem de $|x_1|$ a $|x_2|$!

Analogamente (exercício)

QED 18

$$[B_i(x_1), B_j(x_2)] = [E_i(x_1), E_j(x_2)]$$

$$[E_i(x_1), B_j(x_2)] = -2it \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2^k} D(r, t) \quad (1)$$

Vejaamos quais são as operações com y-hat's a tempo iguais:

De QED 17-2) vemos que $D(r, t) = -D(r, -t)$ e portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} D(r, t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D(r, t) = 0$$

$$\text{Logo } [E_i(r_1, t), E_j(r_2, t)] = [B_i(r_1, t), B_j(r_2, t)] = 0$$

$$\underline{\text{MCU}} \quad [E_i(r_1, t), B_j(r_2, t)] \neq 0 \quad \text{para } \begin{pmatrix} i \neq j \\ r_1 = r_2 \end{pmatrix}$$

Logo podemos especificar apenas E ou B em todo o espaço
mas não ambos!

(b) Relações de incerteza:

Já vimos que

$$\Delta Q_1 \Delta Q_2 \geq \frac{1}{2} |\langle [Q_1, Q_2] \rangle|$$

Qual a consequência das relações de comutação acima?

É no eletromagnetismo clássico o campo macroscópico QED19
 em média no tempo e espaço do campo microscópico. Por
 isso definimos:

$$\langle E \rangle(\Omega) = \frac{1}{\Omega} \int d^4x E(x)$$

↳ volume do espaço-tempo

De (QED17-1) segue que dado Ω_1 no futuro de Ω_2 os componentes
 da E de $\langle E \rangle(\Omega_1)$ e $\langle E \rangle(\Omega_2)$ satisfazem

$$\Delta E_x(\Omega_1) \Delta E_y(\Omega_2) \geq \frac{1}{2} \left| 2i\hbar c \int \frac{d^4x_1}{\Omega_1} \int \frac{d^4x_2}{\Omega_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} \right) \mathcal{D}(x_1, x_2, t_1, t_2) \right|$$

$$\geq \frac{\hbar c}{8\pi} \left| \int \frac{d^4x_1}{\Omega_1} \int \frac{d^4x_2}{\Omega_2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} \frac{\delta(|x_2 - x_1| - c(t_2 - t_1))}{|x_2 - x_1|} \right|$$

onde só $\delta(r-ct)$ contribui pois Ω_1 está no futuro de Ω_2 ($t_2 > t_1$)

Interpretação: consideremos uma carga de prova Q numa região volume V_1
 A medida de $\langle E_x \rangle(\Omega_2)$ é feita no intervalo $T = t_2' - t_2$

$$\langle E_x \rangle(\Omega_2) \approx \frac{P_x(t_2') - P_x(t_2)}{Q(t_2' - t_2)} \approx \frac{\Delta P_x}{Q T} \approx \frac{\hbar}{2 Q T \Delta x}$$

Para Ω_1 no ~~no~~ futuro de Ω_2 este incertezas ^{na direção em Ω_2} propaga para Ω_1
 levando ao resultado acima.

Conclusão: Mesmo isso!

3. Flutuações do vácuo: 4/5/9

(a) Ordem de Magnitude

As incertezas vistas acima vale para qualquer estado, incluindo o vácuo! Logo os campos no vácuo flutuam! Mas isso é só uma consequência de que o campo é uma coleção de osciladores harmônicos.

De (QED 19-1) estimamos que

$$\Delta E_x \Delta E_y \approx \frac{\hbar c}{L^4} \Rightarrow \Delta E \approx \sqrt{\frac{\hbar c}{L^2}}$$

Como $|E| = |B|$ (com semelhança das expressões para B) $\Delta B \approx \sqrt{\frac{\hbar c}{L^2}}$

Logo a flutuação de energia num volume L^3 é

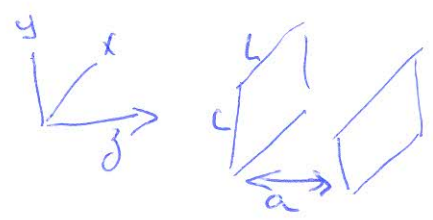
$$\Delta H \approx L^3 [\Delta E^2 + \Delta B^2] \approx \frac{\hbar c}{L}$$

que é a energia de um fóton de comprimento de onda L .

Essas flutuações são reais já que levam a efeitos observáveis. Vejamos um exemplo disso, o saber, o efeito Casimir.

(b) Efeito Casimir

Consideremos dois planos condutores perfeitos separados por uma distância a :



Mostre que há uma força atrativa entre as placas de ordem $\frac{1}{a^4}$

Atividade Pequeno quantum leap: cada modo normal (ω_n) [QFII] 21

do campo entre as placas ~~com~~ possui uma energia de ponto zero $\frac{1}{2} \hbar \omega_n$.

Sem prova, ^(exercício) os modos normais desse sistema são

$$k_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + k_x^2 + k_y^2} \quad n = 0, 1, 2$$

onde o modo $n=0$ possui apenas uma polarização possível e os modos com $n > 0$ duas. Como isso no vácuo temos
($\|k_{||} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j}$)

$$E = \sum_n \frac{1}{2} \hbar \omega_n = \frac{\hbar c}{2} \sum_n k_n = \frac{\hbar c}{2} \int \frac{L}{2\pi} dk_x \int \frac{L}{2\pi} dk_y \left[\text{circled } \|k_{||} \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\|k_{||}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right)^{1/2} \right]$$

Essa expressão é altamente divergente! Mas o que interessa é a diferença de energia desta ~~com~~ configuração com relação ao vácuo; i.e., qual o custo de energia de se fecharmos esta configuração. No caso do vácuo

$$E_v = \frac{\hbar c}{2} \int \frac{L^2}{(2\pi)^2} d^2 k_{||} \int_{-\infty}^{+\infty} a \frac{dk_x}{2\pi} 2 \sqrt{\|k_{||}^2 + k^2}$$

$$n = \frac{ak_x}{2\pi}$$

$$= \frac{\hbar c}{2} \int \frac{L^2}{(2\pi)^2} d^2 k_{||} \int_0^{\infty} da \sqrt{\|k_{||}^2 + \frac{a^2 \pi^2}{a^2}}$$

~~Com~~ Com $\hbar \omega$ a energia por unidade de comprimento $\left[\text{Eq. 2.2} \right]$
diferença.

ou integral em Φ_{II} :

$$\Delta E = \frac{E - E_0}{L^2} = \frac{\hbar c}{2\pi} \int_0^\infty k dk \left[\frac{k}{2} + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} - \int_0^\infty da \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} \right] \quad (1)$$

Agora temos que lidar com expressões aparentemente divergentes, devido aos termos grandes de k em! Para fazer isso vamos introduzir um regulador, o qual tem a motivação física ~~devida~~ ~~devida~~ devido a não existência de condutores perfeitos a altas k já que o condutor é uma coleção de átomos. Por exemplo, $k_{\text{max}} \sim \hbar / \text{dist. átomos}$

Seja uma função suave $f(k)$ tal que $f(k) \approx 1$ para

$k \lesssim k_{\text{max}}$ e $f=0$ para $k \gg k_{\text{max}}$. Então

$$\Delta E = \frac{\hbar c}{2\pi} \int_0^\infty dk k f(k) \left[\begin{array}{l} \text{mesmo} \\ \text{que} \\ \text{Eq. 1} \end{array} \right]$$

Mudamos as variáveis para $u = \frac{a^2 k^2}{\pi}$

$$\Delta E = \frac{\hbar c \pi^2}{4a^3} \int_0^\infty du \left[\frac{\sqrt{u}}{2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u}\right) + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u+n^2}\right) - \int_0^\infty du \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u+n^2}\right) \right]$$

Definindo $F(n) = \int_0^{\infty} du \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u+n^2}\right)$, que QED 23

existe, segue

$$\Delta E = hc \frac{\pi^2}{4a^3} \left[\frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) + \dots - \int_0^{\infty} dn F(n) \right]$$

Note que podemos trocar a orde [] pois f garante a convergência necessária! Lembre-se $F(n) \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$!

A quantidade em [] pode ser avaliada usando o método de Euler-MacLaurin:

$$\frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) + \dots - \int_0^{\infty} dn F(n) \quad \text{recorre mais de de que}$$

$$\text{a ser} = -\frac{1}{2} B_2 F'(0) - \frac{1}{4!} B_4 F''' + \dots$$

onde os números de Bernoulli são dados por

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{y^n}{n!} \quad \text{com} \quad \begin{matrix} B_2 = 1/6 \\ B_4 = -1/30 \\ \vdots \end{matrix}$$

Mas,

$$F(n) = \int_0^{\infty} du \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u+n^2}\right) = \int_{n^2}^{\infty} dy y^{1/2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{y}\right)$$

$$\Rightarrow F'(n) = -2n \int_0^{\infty} du f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u+n^2}\right) = -2n^2 f\left(\frac{\pi n}{a}\right) \Rightarrow F'(0) = 0$$

Analogamente $F'''(0) = -4$ e as derivadas de ordens superiores são avaliadas de modo semelhante.

Logo

$$\Delta E = \frac{hc\bar{n}^2}{a^3} \frac{Bq}{4!} = -\frac{\bar{n}^2}{720} \frac{hc}{a^3}$$

e não existe dependência na posição f utilizada!

Logo, a força entre os condutores na unidade de área r'

$$\frac{\Delta F}{L^2} = -\frac{\bar{n}^2}{240} \frac{hc}{a^3} = -\frac{0.013}{(\text{atôm})^3} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$$

Verificada pela primeira vez em 1958 por Sparnay.

4. Transições Radiativas

(a) Interações e ordem de magnitude:

Aqui temos a representação da Schrödinger!

Sejam ($a=1 \dots N$) partículas carregadas de cora posições, momentos, cargas, massas e momentos magnéticos $\vec{r}_a, \vec{p}_a, q_a, m_a, \vec{\mu}_a$.

Até ordem v^2/c^2 a hamiltoniana do sistema é

$$H = H_f + \sum_a \frac{1}{2m_a} \left(\vec{p}_a - \frac{q_a}{c} \vec{A}_a \right)^2 - \sum_a \vec{\mu}_a \cdot \vec{B}_a + \frac{1}{8\pi} \sum_{a \neq b} \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}$$

onde $\vec{A}_a = \vec{A}(\vec{r}_a)$ e $\vec{\mu}_a = \frac{e\hbar}{2m_a c} g_a \vec{S}_a$
 \hookrightarrow férm giro magnético

Definimos (no gauge $\nabla \cdot \vec{A} = 0$)

$$H_M = \sum_a \frac{\vec{p}_a^2}{2m_a} + \frac{1}{8\pi} \sum_{a \neq b} \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}$$

$$H_1 = - \sum_a \frac{q_a}{c m_a} \vec{p}_a \cdot \vec{A}_a = \sum_a \vec{\mu}_a \cdot \vec{B}_a$$

$$H_2 = \sum_a \frac{q_a^2}{2m_a c^2} |\vec{A}_a|^2$$

de forma que $H = H_f + H_M + H_1 + H_2$

com $H_{int} = H_1 + H_2$

Para estimar a ordem de grandeza dos termos do H, lembremos que:

- partícula confinada numa região de tamanho $a \Rightarrow m \sim \hbar/a$
- diferenças de energias típicas do sistema ligadas $m \omega^2 \sim m \frac{\hbar^2}{m^2 a^2} = \frac{\hbar^2}{m a^2}$
- energia dos fótons envolvidos $\hbar \omega \sim \frac{\hbar^2}{m a^2} \Rightarrow \omega \sim \frac{\hbar}{m a^2}$
- Num volume $\lambda^3 \Rightarrow 1$ fóton cf energia $\hbar \omega$
 $B^2 \lambda^3 \sim \hbar \omega \Rightarrow B^2 \frac{(2\pi c)^3}{\omega^3} \sim \hbar \omega \stackrel{2\pi^2}{\Rightarrow} B^2 \sim \frac{\hbar \omega^4}{c^3} = \frac{\hbar^2}{m^2 a^4}$
 $B \sim \sqrt{\frac{\hbar}{c}} \frac{\omega^2}{c} \sim \sqrt{\frac{\hbar}{c}} \frac{\hbar^2}{c m^2 a^4}$
- $B \sim \frac{A}{\lambda} \Rightarrow A \sim B \frac{2\pi c}{\omega} \sim \frac{B}{\omega} \sim \sqrt{\frac{\hbar}{c}} \omega$

Logo $\frac{e^2}{c} \frac{P}{m} A \sim e \frac{\hbar}{a m} \sqrt{\frac{\hbar}{c}} \frac{\hbar}{m a^2} \sim \frac{e m a^3}{\sqrt{\hbar c}} \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{c} m \sigma^3$

$\mu B \sim \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{c}} \frac{\hbar^2}{c m^2 a^4} \sim \frac{e}{\sqrt{\hbar c}} m \sigma^4 \sim \sqrt{\alpha} m \sigma^4$

$\frac{e^2}{m c^2} A^2 \sim \frac{e^2}{m c^2} \frac{\hbar}{c} \frac{\hbar^2}{m^2 a^4} \sim \frac{e^2}{\hbar c} m \sigma^4 \sim \alpha m \sigma^4$

Essas relações permitem-nos concluir que!

1. 1º termo de $H_1 \sim O(\sqrt{\alpha} m \sigma^3)$

2. 2º termo de $H_1 \sim O(\sqrt{\alpha} \frac{m \sigma^4}{c^2})$; i.e., menor que 1º termo se $m \sigma \ll c$!

3. $\frac{O(H_1)}{O(E+iprc)} \sim \frac{\sqrt{\alpha} m v^3}{m v^2} \sim \sqrt{\alpha} \frac{v}{c}$, i.e., H_1 is a small correction!

4. $\frac{\lambda}{a} \sim \frac{c}{v} m a \approx \frac{\hbar/mv}{\hbar} \cdot \frac{m c}{\hbar} \gg 1 \Rightarrow$ radiation dominated by the leading multipole allowed by the angular momentum and parity selection rules.

5. $\frac{O(H_2)}{O(H_1)} \approx \left(\frac{\sqrt{\alpha} m v^3}{\alpha m v^4} \right)^{-1} \sim \sqrt{\alpha} \frac{v}{c} \ll 1$

6/5/9

(b) Taxas de transiçõe:

Dadas as estimativas anteriores, o termo que domina na 1ª ordem é o induzido por 1 fóton. Re-escrevendo

$$H_1 = -e \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} [J_{k\lambda} a_{k\lambda} + h.c.] \frac{1}{c}$$

onde $J_{k\lambda} = \sum_n \left[\frac{q_n}{m_n} \vec{p}_n \cdot \vec{e}_{k\lambda} + i \vec{\mu}_n \cdot (k \times \vec{e}_{k\lambda}) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_n}$

com $q_e = -1$ para o elétron.

Para regra de ouro de Fermi

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} | \langle f | H_1 | i \rangle |^2 \delta(E_i - E_f)$$

(i) Emissão espontânea

átomo
↓

O estado inicial é $|i; 0\rangle = |i\rangle \otimes |0\rangle$

enquanto o

estado final é $|f; \mathbf{k}, \lambda\rangle = |f\rangle \otimes a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger |0\rangle$ o que implica, a partir

da regra de ouro, que

$$d\Gamma_{sp; fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f; \mathbf{k}, \lambda | H_I | i; 0 \rangle|^2 \rho_f^{\text{f}} \quad (1)$$

onde $\rho_f^{\text{f}} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 p_{\mathbf{k}}}{d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar^3 k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}}}{\hbar c dk}$
 $= \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{k^2 d\Omega_{\mathbf{k}}}{\hbar c}$

com $\hbar kc = E_i - E_f$.

Avaliemos o elemento de matriz em (1).

$$\begin{aligned} \langle f; \mathbf{k}, \lambda | H_I | i; 0 \rangle &= -e \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \frac{1}{c} \langle f; 0 | a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \left(\sum_{\mathbf{k}', \lambda'} \mathbf{J}_{\mathbf{k}', \lambda'} a_{\mathbf{k}', \lambda'} + \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} \mathbf{J}_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger a_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger \right) | i; 0 \rangle \\ &= -e \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \langle f | \mathbf{J}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger | i \rangle \underbrace{\langle 0 | a_{\mathbf{k}, \lambda} a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger | 0 \rangle}_{\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}} \frac{1}{c} \quad (2) \\ &= -e \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \langle f | \mathbf{J}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger | i \rangle \frac{1}{c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma_{spif_i}}{d\Omega_r} = \frac{2\pi}{\hbar c^2} e^2 \frac{\hbar c}{2kV} |\langle f | J_{ix}^+ | i \rangle| \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{\hbar c}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi^2 2\hbar c^2} k |\langle f | J_{ix}^+ | i \rangle|^2 = \frac{\alpha}{2\pi c} k |\langle f | J_{ix}^+ | i \rangle|^2$$

A largura Γ_i é definida como

$$\Gamma_{spif_i} = \sum_{|f\rangle} \sum_{\lambda} d\Omega_r \frac{d\Gamma_{spif_i}}{d\Omega_r}$$

↳ para obter unidades de um width/ato.

Se o estado $|i\rangle$ decai só por emissão de 1 fóton com vida média τ_i

$$\tau_i = \frac{1}{\Gamma_i} \quad (\hbar = c = 1)$$

(ii) Emissão espontânea ^{induzida} Consideremos que já existam $n_{k\lambda}$ fótons (k, λ) :

estado inicial $|i, n_{k\lambda}\rangle = |i\rangle \otimes |n_{k\lambda}\rangle$

estado final $|f, n_{k\lambda}+1\rangle = |f\rangle \otimes |n_{k\lambda}+1\rangle$

De QED 28-2) temos então

$$\langle n_{k\lambda}+1 | a_{k\lambda}^+ | n_{k\lambda} \rangle = \sqrt{n_{k\lambda}+1}$$

$$\therefore \langle f | n_{k\lambda}+1 | H_I | i | n_{k\lambda} \rangle = -e \frac{\sqrt{n_{k\lambda}+1}}{c} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \langle f | J_{ix}^+ | i \rangle$$

Com isso:

Q6930

$$\frac{d\Gamma_{em, fi}}{dE_\gamma} = \frac{\alpha}{2\pi c} k |\langle f | J_{kx}^\dagger | i \rangle|^2 \overline{N_{kx} + 1}$$

onde $\overline{N_{kx}}$ é o número médio de fótons nos arredores de k no estado inicial dE_γ

iii) Absorção: Aqui devemos voltar às bases pois o estado final é discreto:

$$\Gamma_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_i | i \rangle|^2 \delta(E_i - E_f)$$

Por outro lado, o estado inicial é contínuo e a integração sobre um intervalo de energias pode eliminar o δ :

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \int dE_i \frac{dN_i}{dE_i} \Gamma_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_i | i \rangle|^2 \rho_i$$

onde a densidade de estados iniciais é

$$\rho_i = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{\hbar c} d\Omega_k$$

Analogamente

$$\langle f | n_{kx} - 1 | H_i | i | n_k \rangle = -e \frac{\sqrt{n_{kx}}}{c} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \langle f | J_{kx} | i \rangle$$

Agora fizemos a integração

$$\Gamma_{abs} \hbar = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\hbar}{c} |\langle f | J_{ikx} | i \rangle|^2 \bar{N}_{kx}$$

L) número médio de fótons numa dada região

Por ~~reversão~~ reversão temporal

$$|\langle f | J_{ikx} | i \rangle|^2 = |\langle i | J_{ikx}^\dagger | f \rangle|^2$$

Com isso $\frac{d\bar{N}_{kx}}{d\Gamma_{ca}} = \frac{\bar{N}_{kx}}{\bar{N}_{kx} + 1}$

Obtido se existir acoplado ao termodinâmico

(c) Transições dipolares: O comprimento de onda da radiação emitida (λ) é maior que as dimensões características do sistema atômico, permitindo expandir $e^{ik \cdot r}$ na expressão para J_{ikx}^0

$$J_{ikx} = \sum_a \left\{ \frac{q_a}{m_a} p_a \cdot e_{ikx} + \left(\frac{q_a}{m_a} \cdot \frac{\hbar k \cdot r_a}{c} \right) \right\} e^{ik \cdot r_a} \approx \sum_a \frac{q_a}{m_a} p_a \cdot e_{ikx}$$

ordem superior aprox. de dipolo

É conveniente escrever

$$\frac{p_a}{m_a} = -\frac{i}{\hbar} [r_a, H_M] \text{ já que } \langle f | \frac{p_a}{m_a} | i \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle f | [r_a, H_M] | i \rangle$$

$$= +\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) \frac{1}{\omega} \langle f | p_a | i \rangle = +i \frac{E_f - E_i}{\omega} \langle f | p_a | i \rangle$$

(abs. + emiss.)

Portanto, no limite de grandes comprimentos de onda de radiação as transições são controladas pelo momento de dipolo elétrico

$$D = \sum_a q_a r_a$$

Usando (QED29-1) temos que

$$\frac{d\Gamma_{\text{spe}}}{dR_\gamma} = \frac{\alpha}{2\pi} k^3 c \left| \langle f | \vec{D} \cdot \vec{e}_{k,\lambda}^* | i \rangle \right|^2$$

Tendo em vista que iD é um operador vetorial ~~de~~ podemos utilizar que

$$\langle n' j' m' | V_\mu | n j m \rangle = \langle n' j' || V || n j \rangle \frac{\langle j m \mu | j' m' \rangle}{\sqrt{2j'+1}}$$

onde
 $V_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 + iV_2)$; $V_{-1} = \frac{i}{\sqrt{2}}(V_1 - iV_2)$

$$V_0 = V_3$$

e tiram as regras de seleção

$$|j_f - j_i| = 0, 1 \quad \text{e} \quad |m_f - m_i| = 0, 1 \quad \oplus \quad \text{mudança de paridade}$$

As transições que obedecem estas regras são as chamadas transições permitidas. As proibidas ocorrem em taxas mais baixas j_f que representam momentos de multipolos mais altos e são suprimidas por potências de $(ka)^2$.

5. Efeito fotoelétrico no hidrogênio

que é a extração de um elétron de um átomo. Vamos nos restringir ao limite de validade da teoria não relativista, ou seja, energia dos fótons ^{menor} ~~menores~~ que $m_e c^2$.



Conservação de energia $\Rightarrow h\nu - E_0 = \frac{p^2}{2m_e}$

Existem 2 regimes

(i) $h\nu \gg E_0$: ($E_0 = \frac{1}{2} m_e c^2$) \Rightarrow elétron é ejetado com grande

velocidade \Rightarrow ignoramos na interação o próton e o núcleo como todo.

$v \approx c \sqrt{\frac{h\nu}{E_0}} \gg c$

(ii) $h\nu - E_0 \approx E_0$: o elétron ejetado é lento e diversos

livres em conta a interação do elétron com o núcleo (próton).

Faremos apenas o caso (i) deixando o (ii) para livros de estudantes.

(a) Altas energias : Nesse regime a aproximação de dipolo elétrico

NÃO é válida. $|i\rangle = |1S\rangle$; $|f\rangle = |IP\rangle$ e

$\langle f | J_{ik} | i \rangle = IP \cdot e_{ik} \cdot \frac{q_e (-1)}{m_e} \langle IP | e^{i k \cdot r} | 1S \rangle$

The diagram shows the calculation of the transition current $\langle f | J_{ik} | i \rangle$. It involves the ionization potential IP , the unit vector e_{ik} , the electron charge q_e , the electron mass m_e , and the transition matrix element $\langle IP | e^{i k \cdot r} | 1S \rangle$.

Agora

QED 34

$$\begin{aligned} \langle 1P | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | 1S \rangle &= \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3r e^{-i\frac{1P\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Psi_{1S}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3r e^{i(\mathbf{k} - \frac{1P}{\hbar})\cdot\mathbf{r}} \Psi_{1S}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \varphi_0(q) \end{aligned}$$

$q = k - \frac{1P}{\hbar}$ • Lembrando que $\Psi_{1S}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$

Segue que $\varphi_0(q) = 8\pi^{1/2} \frac{a_0^{3/2}}{(1 + q^2 a_0^2)^2}$

Para obtermos a seção de choque de espalhamento

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\Gamma_{1S}}{d\Omega}$

\downarrow

$$d\sigma_x = \frac{d\Gamma_{1S}}{(c/V)} = \frac{2\pi}{\hbar} \rho_f(E_i) |T_{fi}|^2 \frac{V}{c}$$

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3p}{dE}$$

$$d\Gamma_{1S} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{e}{c} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \left(-\frac{p_0(e_{in,x})}{m} \right) \frac{1}{\sqrt{V}} \varphi_0(q) \right|^2$$

$$d\Omega_e \rho_H \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{d\Omega_e} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{c^2} \frac{\hbar c}{2k} |1P_0 e_{in,x} \varphi_0(q)|^2 \frac{1}{m^2} \rho_H \frac{q}{8\pi^3 \hbar^3 c}$$

$$\frac{d\sigma_x}{d\Omega_e} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{P}{km} |1P_0 e_{in,x} \varphi_0(q)|^2 \frac{1}{\hbar^2 c^2}$$

Se o feixe de fótons ser não polarizado podemos fazer a média sobre as polarizações



$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda} |P_i \cdot \epsilon_{k\lambda}|^2 = \frac{1}{2} P_i P_j \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = \frac{1}{2} (P^2 - P^2 \cos^2 \theta) = \frac{P^2}{2} \sin^2 \theta$$

Além disso

$$q^2 = \left(\frac{P-k}{\hbar} \right)^2 = k_p^2 + k^2 - 2 k_p k \cos \theta$$

$$P \approx \sqrt{2m \hbar c}$$

$$\left(\frac{P}{\hbar k} = \sqrt{\frac{2m c}{\hbar k}} \right)$$

Para altas energias $\frac{p a_0}{\hbar} \gg 1$

$$\frac{P}{\hbar} \gg k$$

Com isso $(1 + q^2 a_0^2) \approx \left[\left(\frac{P}{\hbar} \right)^2 - \frac{2 P k}{\hbar} \cos \theta \right] a_0^2$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{P}{k m} \frac{\frac{P^2}{2} \sin^2 \theta}{a_0^8 \left(\left(\frac{P}{\hbar} \right)^2 - \frac{2 P k}{\hbar} \cos \theta \right)^2} \quad 64 \pi a_0^3$$

18/05/09

b. Espalhamento de luz

Queremos $\vec{k} \rightarrow (i) \Rightarrow (f) \vec{k}'$

É controlado por H_{int} em QED25

$$H_{int} = H_1 + H_2$$

$$\sum_a \frac{q_a^2}{2m a c^2} |A_a|^2 \Rightarrow \begin{matrix} A_{11} a^2 \\ A_{11} a + c A_{11} \\ c A_{11}^2 \end{matrix} \downarrow \text{1ª ordem}$$

$$- \sum_a \frac{q_a}{m a c} \vec{p}_a \cdot A_a - \sum_a \vec{p}_a \cdot B_a \rightarrow A_{11} a + c A_{11} \rightarrow \text{2ª Ordem}$$

$$T = V + V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \quad (V = H_{int})$$

QED 36

$$\Rightarrow T = \overset{1}{(H_1 + H_2)} + \overset{1}{(H_1 + H_2)} \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T$$

~~Como~~ Como processo ANIQUILA 1 fóton e cria 1 fóton \Rightarrow

$$T \approx H_2 + H_1 \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} H_1 \quad (1)$$

Definamos os estados inicial e final:

$$|i; k, \lambda\rangle = a_{k, \lambda}^\dagger |i; 0\rangle$$

(2)

$$|f; k', \lambda'\rangle = a_{k', \lambda'}^\dagger |f; 0\rangle$$

onde a energia do sistema é $E = E_i + \hbar c k = E_f + \hbar c k'$

A seção de choque do processo é

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} P_f(k') |T_{fi}|^2 \frac{V}{v} \quad (3)$$

Tendo em conta 1, 2 e 3, analisamos o efeito de H_2 :

$$H_2 = \sum_a \frac{q_a^2}{2m_a c^2} |A_a|^2 \quad \text{onde}$$

$$|A_a|^2 = \sum_{k, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \left[e^{i k \cdot x} a_{k, \lambda} e_{k, \lambda} + e^{-i k \cdot x} a_{k, \lambda}^\dagger e_{k, \lambda}^* \right] \times$$

$$\times \sum_{k', \lambda'} \sqrt{\frac{\hbar c}{2k'V}} \left[e^{-i k' \cdot x} a_{k', \lambda'}^\dagger e_{k', \lambda'} + e^{i k' \cdot x} a_{k', \lambda'} e_{k', \lambda'} \right]$$

$k \rightarrow -k'$

$$\downarrow = \sum_{\substack{k, \lambda \\ k', \lambda'}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2k'V}} (a_{k, \lambda} - a_{k', \lambda'}^\dagger) e^{i(k - k') \cdot x} (a_{k, \lambda}^\dagger a_{k', \lambda'} + a_{k', \lambda'}^\dagger a_{k, \lambda})$$

$$= \sum_{|k\rangle} \frac{\hbar c}{2V} \frac{1}{k} + \frac{\hbar c}{V} \sum_{\substack{|k\rangle \\ |k'\rangle}} \frac{1}{\sqrt{k k'}} (e_{|k\rangle} \cdot e_{|k'\rangle}^*) e^{i k \cdot (|k_1 - k_2\rangle)} a_{|k'\rangle}^\dagger a_{|k\rangle} \quad \text{QED37}$$

↓
 não contribui
 para $|k\rangle \neq |k'\rangle$
 (é infinito)

↳ muda $|k_1, \lambda_1\rangle$
 $|k_2, \lambda_2\rangle$
 e não contribui

Juntando a expressão acima com (QED36-3) temos que calculo

$$\langle 0 | a_{|k'\rangle} a_{|k_2\rangle}^\dagger a_{|k_1\rangle} a_{|k\rangle} | 0 \rangle = \delta_{|k_1\rangle |k_2\rangle} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{|k\rangle |k'\rangle}$$

Com isso

$$\langle f | k' \lambda' | H_2 | i | k \lambda \rangle = \frac{e^2 \hbar c}{2V \sqrt{k k'}} \underbrace{(e_{|k_2\rangle}^\dagger \cdot e_{|k_1\rangle})}_{F_f(i\mathcal{H})} \frac{1}{m} \sum_a \langle f | e^{i\mathcal{H} \cdot r_i} | i \rangle \equiv A_2$$

onde $\mathcal{H} = |k - k'|$

A contribuição de 2ª ordem deriva de $H_1 e'$

$$T_2 = \langle f, |k'\rangle \lambda' | H_1 \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} H_1 | i, |k\rangle \lambda \rangle$$

$\mathbb{1} = \sum_c |\Phi_c\rangle \langle \Phi_c|$ ~~onde~~ $\sum_n |\Phi_n\rangle \langle \Phi_n|$ ~~onde~~ $\langle \Phi_n, 0 |$ + ~~onde~~ $\langle \Phi_n, 0 |$ ~~onde~~ $\langle \Phi_n, 0 |$
 onde Φ_c são os estados de H_0 e H_1 contribui.

$$= \sum_c \frac{\langle f, |k'\rangle \lambda' | H_1 | \Phi_c \rangle \langle \Phi_c | H_1 | i, |k\rangle \lambda \rangle}{E - E_c + i\epsilon}$$

↳ H_0 atômico

onde os estados (Φ_c) que contribuem são:

1) $|\Phi_c\rangle = |n; 0\rangle$ Quando o H_i é destruidor ^(expulsa) ou cria ^(cria) o fóton $|k, \lambda\rangle$ (cria $|k, \lambda\rangle$)

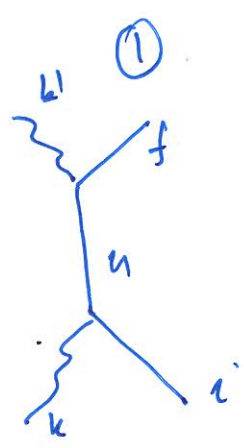
$$E - E_c = E_i + \hbar c k - E_n$$

2) Quando o H_i é destruidor ^(expulsa) ou cria ^(cria) o fóton $|k, \lambda\rangle$ (destrói $|k, \lambda\rangle$)

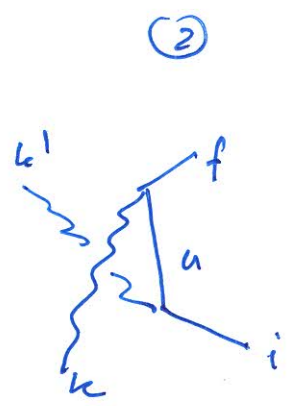
$|\Phi_c\rangle$ estado de 2 fótons: $|\Phi_c\rangle = |n; |k, \lambda\rangle |k', \lambda'\rangle$

$$E - E_c = (E_i - \hbar c k) - (E_n + \hbar c k + \hbar c k') = E_i - E_n - \hbar c k'$$

Diagrammaticamente



tempo ↑



Lembrando que $H_i = -e \sum_{k, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar c}{2k, V}} \left[\int_{k, \lambda} a_{k, \lambda} + \int_{k, \lambda}^\dagger a_{k, \lambda}^\dagger \right]$

temos que

$$T_2 = \frac{e^2 \hbar c}{2V \sqrt{k k'}} \sum_n \left[\frac{\langle f | \sqrt{a_{k, \lambda}^\dagger} | n \rangle \langle n | \sqrt{a_{k, \lambda}} | i \rangle}{E_i - E_n + \hbar c k + i\epsilon} + \frac{\langle f | \sqrt{a_{k, \lambda}} | n \rangle \langle n | \sqrt{a_{k, \lambda}^\dagger} | i \rangle}{E_i - E_n - \hbar c k' + i\epsilon} \right]$$

Zogo, usando que $F(\mathbf{k}') = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{k'^2}{\hbar c} d\mathcal{R}_{\mathbf{k}'}$, temos que (QED) 39

$$\frac{d\Gamma}{d\mathcal{R}_{\mathbf{k}'}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{k'^2}{\hbar c} \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \frac{V}{c} \cdot \frac{c^4 \hbar^2 c^2}{4\sqrt{\hbar k'}} \left| \frac{e_{\mathbf{k}'\lambda}^* \cdot e_{\mathbf{k}\lambda} F_{fi}(\mathbf{q})}{m} + \sum_n \left[\frac{\langle f | \mathbf{J}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} | i \rangle \langle n | f_0 | i \rangle}{E_i - E_n + \hbar c k' + i\epsilon} + \frac{\langle f | \mathbf{J}_{\mathbf{k}\lambda} | i \rangle \langle n | \mathbf{J}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} | i \rangle}{E_i - E_n - \hbar c k' + i\epsilon} \right] \right|^2$$

$$\alpha^2 = \frac{e^4}{16\pi^2 \hbar^2 c^2}$$

$$= \frac{\alpha^2}{\hbar^2} (\hbar c) \frac{k'}{\hbar} \left| e_{\mathbf{k}'\lambda}^* \cdot e_{\mathbf{k}\lambda} F_{fi}(\mathbf{q}) + m \sum_n \left[\frac{\langle f | \mathbf{J}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} | i \rangle \langle n | \mathbf{J}_{\mathbf{k}\lambda} | i \rangle}{E_i - E_n + \hbar c k' + i\epsilon} + \frac{\langle f | \mathbf{J}_{\mathbf{k}\lambda} | i \rangle \langle n | \mathbf{J}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} | i \rangle}{E_i - E_n - \hbar c k' + i\epsilon} \right] \right|^2$$

(D'onde de Kramers-Heisenberg)

$$\frac{\hbar}{m} \hbar c \approx \frac{1}{r_0}$$

$$r_0 = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$$