5ª aula PME 3230

Formas integrais das leis fundamentais

O Teorema de Transporte de Reynolds

Marcos Tadeu Pereira

Devemos aplicar a **Leis Básicas** a um **Volume de Controle** (**VC**) fixo no espaço (Euler), ao invés da formulação para um **Sistema** (Lagrange)

As leis básicas (de conservação) se aplicam diretamente a **sistemas**:

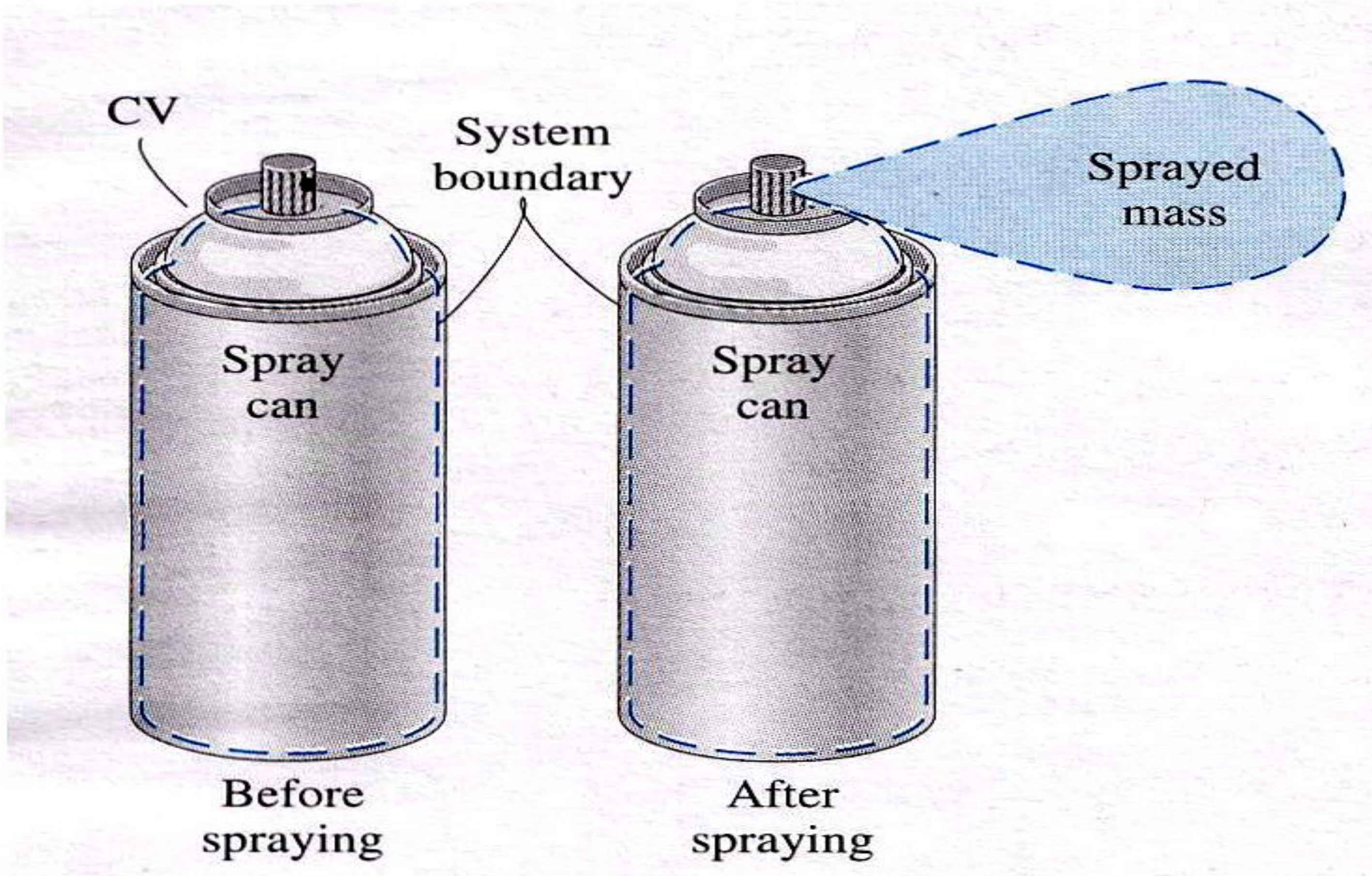
1) Conservação da Massa, ou Eq. da Continuidade
2) 2ª Lei de Newton
3) 1ª Lei da Termodinâmica (conservação de energia)
4) Momento da Quantidade de Movimento (a taxa de variação da quantidade de movimento angular é igual à soma de todos os torques atuando sobre o sistema)
5) 2ª Lei da Termodinâmica (variação da entropia, irreversibilidade)

Será desenvolvida uma formulação geral, universalmente aplicável (por meio do Teorema de Transporte de Reynolds) às 5 leis básicas para aplicação em um VC.

Observações introdutórias:

1) Um sistema é uma quantidade de matéria de identidade fixada. Massa não atravessa a fronteira de um sistema (Lagrange).

2) Um Volume de Controle (VC) é uma região do espaço escolhida para observação/estudo. Massa pode atravessar uma Superfície de Controle (SC) do VC. (Euler)



Uma lata de spray pode ser analisada de duas formas: acompanhando o conteúdo da lata (Lagrange- sistema fechado: massa não varia, ou seja, após spray a fronteira do sistema inclui a massa fora da lata) ou monitorando o volume da lata (Euler - volume de controle: só a lata, antes e e depois)

3) Passamos de Lagrange a Euler para uma partícula fluida em uma **LC** ($\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)N$), vamos fazer a mesma passagem para uma massa ou volume de fluido, com forma de integral

4) É necessário passar a formulação das leis de conservação válidas para um sistema para a formulação de **VC**, o que é conseguido com o **Teorema de Transporte de Reynolds**.

5) Um **VC** refere-se a uma região do espaço onde podem ocorrer escoamentos para fora e para dentro do VC. A fronteira de um **VC** é sua superfície de controle (**SC**)

6) O tamanho e a forma do **VC** são totalmente arbitrários, escolhidos de acordo com a conveniência. O **VC** também pode ser chamado de sistema aberto.

7) Propriedades extensivas e intensivas. As leis básicas, escritas na forma de taxa de variação, envolvem derivadas em relação ao tempo de alguma propriedade extensiva do sistema.

Prop. **Extensiva** (**N**): depende da extensão, da quantidade de matéria do sistema. Ex: massa, energia, QDM.

Prop. **Intensiva** (η) : por unidade de massa

$\eta = \frac{N}{m}$ ou melhor: $N_{sist} = \int_{m_{sist}} \eta dm = \int_{\forall_{sist}} \eta \rho d\forall$

onde ∀ é o volume.

se $N = m \rightarrow \eta=1$

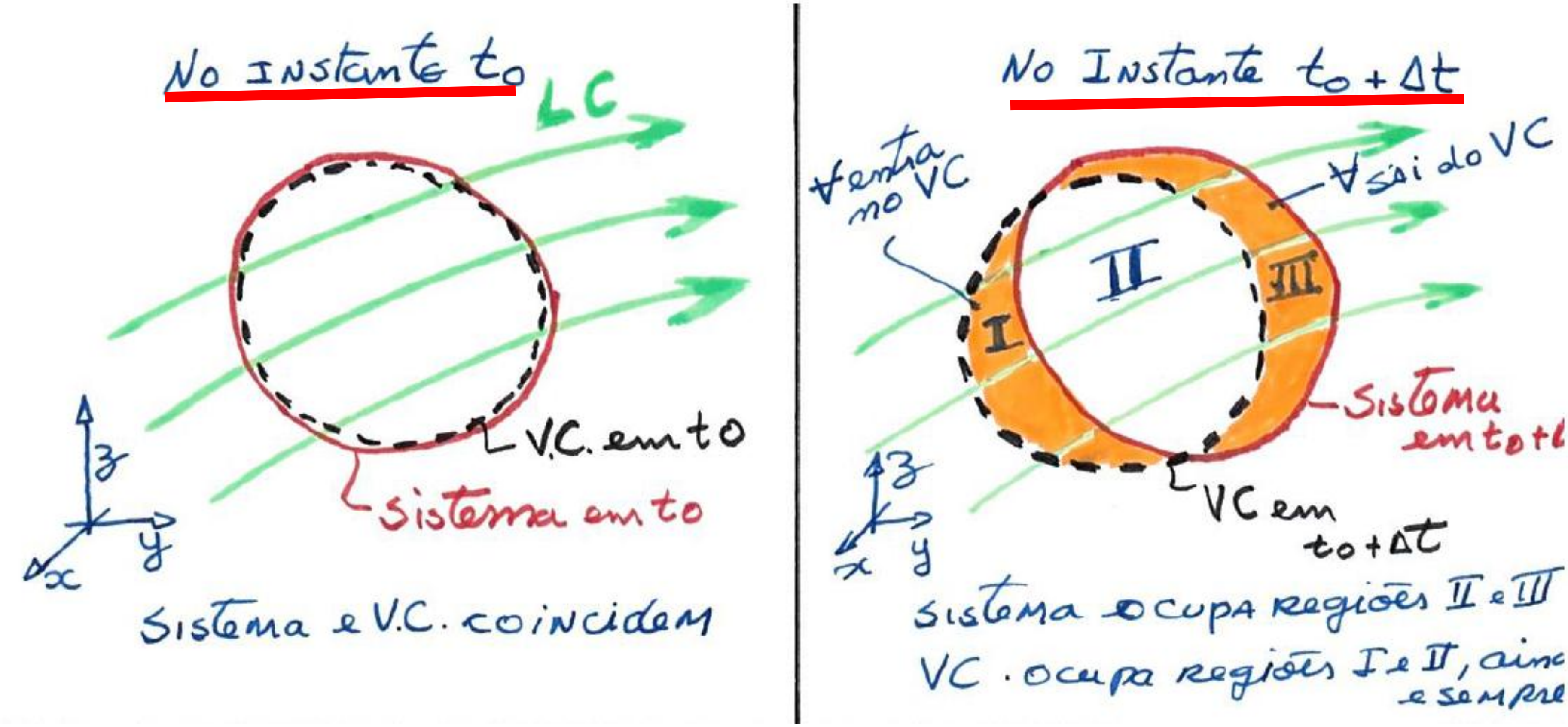
Dedução:

- Campo de escoamento arbitrário $\vec{V}(x, y, z, t)$ em relação a sistema de coordenadas xyz

- **VC** fixo no espaço

- Sistema movimenta-se no campo de escoamento (por definição mantendo sempre as mesmas partículas de fluido)

Sistema e Volume de Controle
propriedade N



Massa nova entra no VC, região I em Δt
Massa deixa o VC, região III, em Δt

Definição de derivada de propriedade extensiva:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sist} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_{sist})_{t_0+\Delta t} - N_{sist})_{t_0}}{\Delta t} \qquad \textbf{(1)}$$

No instante $t_0 + \Delta t$: sistema ≡ região II + região III

$$\therefore N_{sist})_{t_0+\Delta t} = (N_{II} + N_{III})_{t_0+\Delta t} = (N_{VC} - N_I + N_{III})_{t_0+\Delta t} =$$

$$\left[\int_{VC} \eta\rho d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{V_I} \eta\rho d\forall\right]_{t_0+\Delta t} + \left[\int_{V_{III}} \eta\rho d\forall\right]_{t_0+\Delta t}$$

(propriedade intensiva N ⟹ $N_{sist} = \int_{\forall_{sist}} \eta\rho d\forall$)

No instante t_0

$$\therefore N_{sist})_{t_0} = N_{VC})_{t_0} = \left[\int_{VC} \eta\rho d\forall\right]_{t_0}$$

e, substituindo em **(1)**, resulta:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sist} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{VC} \eta\rho d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{V_I} \eta\rho d\forall\right]_{t_0+\Delta t} + \left[\int_{V_{III}} \eta\rho d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{VC} \eta\rho d\forall\right]_{t_0}}{\Delta t}$$

e, como o limite da soma é a soma dos limites:

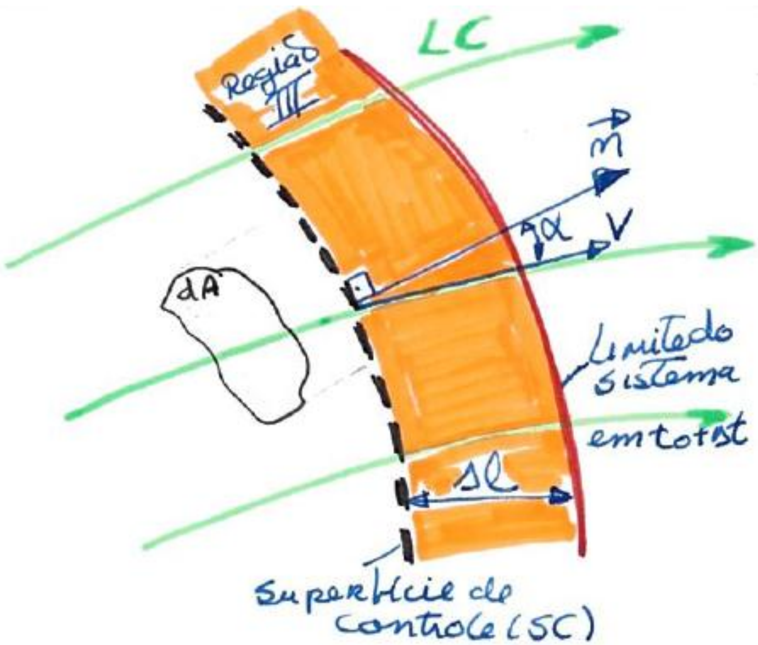
$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sist} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{VC} \eta\rho d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{VC} \eta\rho d\forall\right]_{t_0}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{V_{III}} \eta\rho d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\left[\int_{V_I} \eta\rho d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$

termo A *termo B* *termo C*

$termo\ A$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{VC})_{t_0+\Delta t} - N_{VC})_{t_0}}{\Delta t} = \frac{\partial N_{VC}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta \rho d \forall$$

e representa a taxa de variação com o tempo da propriedade N dentro do VC



$$\boldsymbol{termo\ B} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{III}]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$

$\vec{n}$ - normal para fora em relação ao VC

Observar que $d\vec{A}$ deve ser um vetor para podermos calcular um volume e uma massa

dm flui para fora do VC→$\alpha < \pi/_2$ sobre toda a região III

d∀= dA.Δℓ. cosα

d $N_{III}]_{t_0+\Delta t}$= $\eta\rho d$ ∀$)_{t_0+\Delta t}$ = $\eta\rho$ dA.dℓ. cos$\alpha)_{t_0+\Delta t}$

termo B

$$N_{III}\Big]_{t_0+\Delta t} = \left[\int_{SC_{III}} \eta\rho.\Delta\ell.\cos\alpha.\mathrm{dA}\right]_{t_0+\Delta t}$$

SC_{III} : superfície de controle comum à região III e ao VC

$\Delta\ell$: distância percorrida por uma partícula na superfície do sistema, durante Δt, ao longo de uma linha de corrente que existia em t_0

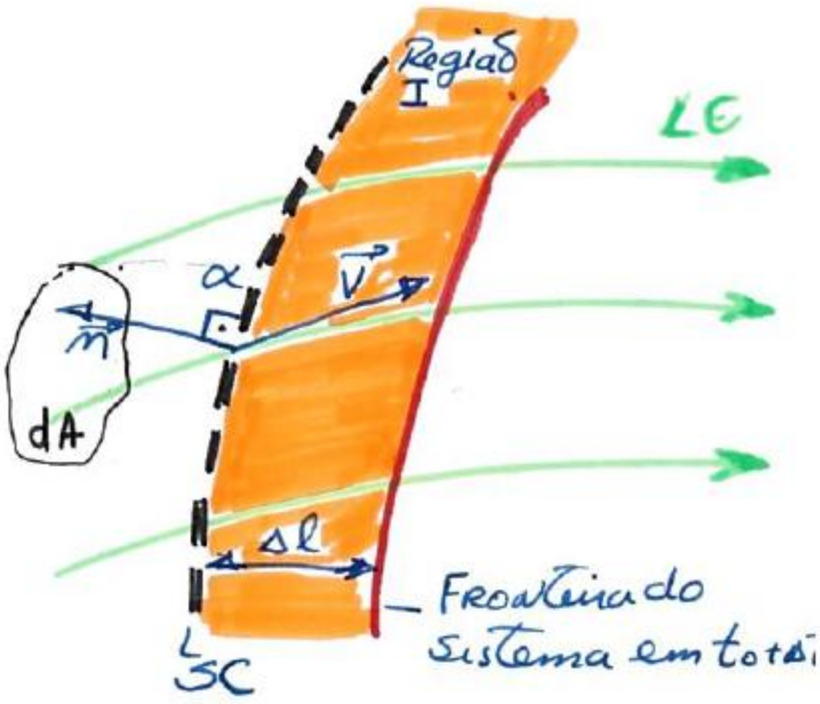
termo B

$$\therefore\ termo\ b =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{III})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{SC_{III}} \eta\rho.\Delta\ell.\ \cos\alpha.\mathrm{dA}}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{SC_{III}} \eta\rho.\frac{\Delta\ell}{\Delta t}.\ \cos\alpha.\,\mathrm{dA}. = \int_{SC_{III}} \boldsymbol{\eta\rho}.\left|\vec{\boldsymbol{V}}\right|.\ \mathbf{cos}\boldsymbol{\alpha}.\,\mathbf{dA}$$

$$\text{pois } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\ell}{\Delta t} = \left|\vec{V}\right|$$



termo C: $-\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{N_I)_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$

$\vec{n}$ - normal para fora em relação ao VC

dm flui para fora do VC→$\alpha>{}^{\pi}/_{2}$ sobre toda a região I, já que a massa da região I flui para dento do VC em toda a região I

d $N_I]_{t_0+\Delta t}= \eta\rho d\,\forall)_{t_0+\Delta t} = \eta\rho\Delta\ell.\,(-\cos\alpha)dA.)_{t_0+\Delta t}$

(-) porque o volume $d\forall$ é escalar e positivo

termo C

$$N_I]_{t_0+\Delta t} = \left[\int_{SC_I} -\eta\rho.\Delta\ell.\cos\alpha.\mathrm{dA}\right]_{t_0+\Delta t}$$

onde SC_I = superfície comum à região I e o VC
Δℓ= distância percorrida por uma partícula na superfície do sistema durante Δt, ao longo de uma linha de corrente que existia em t_0

$$\therefore\ termo\ C = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{V_I}\eta\rho d\forall\right]}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_I)_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{SC_I} -\eta\rho.\Delta\ell.\cos\alpha.\mathrm{dA}}{\Delta t} = \int_{SC_I}\eta\rho.\left|\vec{V}\right|.\cos\alpha.\mathrm{dA}$$

$substituindo\ as\ expressões\ dos\ \boldsymbol{termos\ A, B\ e\ C}\ em$ 1:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho d\forall + \int_{SC_{III}} \eta\rho.\left|\vec{V}\right|.\cos\alpha.dA + \int_{SC_{I}} \eta\rho.\left|\vec{V}\right|.\cos\alpha.dA$$

Como SC$\equiv SC_I + SC_{III} + SC_{Lateral}$

onde $SC_{Lateral}$ é caracterizada por α = ${}^{\pi}/_{2}$ ou $\vec{V}$ =0, i.e., ausência de fluxo

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho d\forall + \int_{SC.} \eta\rho.\left|\vec{V}\right|.\cos\alpha.dA$$

e, como se sabe que $\left|\vec{V}\right|.\cos\alpha.dA = \overrightarrow{V}\ .\ \vec{n}\ dA$, ∴

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho d\forall + \int_{SC.} \eta\rho\overrightarrow{V}.\vec{n}\ dA$$

Teorema do Transporte, de Reynolds

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho d\forall + \int_{SC} \eta\rho\overrightarrow{V}.\vec{n}dA$$

Taxa de variação total de uma propriedade extensiva N qualquer num sistema no instante t_0

Taxa de variação em relação ao tempo da propriedade extensiva N dentro do volume de controle, que coincide com o sistema no instante t_0

Taxa resultante do efluxo da propriedade extensiva N, através da superfície de controle no instante t_0

Esta fórmula de Reynolds relaciona as taxas de variação de uma propriedade extensiva N qualquer de um sistema, e as variações com o tempo desta propriedade N associada ao volume de controle

é a fórmula integral, correspondente à fórmula diferencial relacionando as derivadas de Lagrange e Euler:

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + \left(\vec{V}.\nabla\right)N$$

Obs. $\vec{V}$ *na equação é medida em relação ao VC e* $\therefore$

$$a\ taxa\ de\ variação\ de\ N\ deve\ ser\ avaliada$$
$$por\ um\ observador\ fixo\ no\ VC.$$

Equação da continuidade, ou da **conservação da massa**

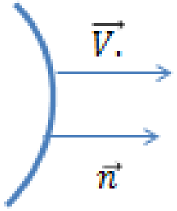
$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial y}{\partial x}\int_{VC}\eta\rho d\,\forall + \int_{SC}\eta\rho\overrightarrow{V}.\,\vec{n}dA$$, e como $N = m \rightarrow \eta = 1$

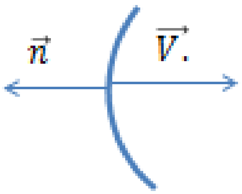
$$\left.\frac{dm}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho d\,\forall + \int_{SC}\rho\overrightarrow{V}.\vec{n}dS = 0$$

Definição de sistema: massa não varia

Taxa de variação de massa no sistema = Taxa de variação de massa no VC + Fluxo de massa através da SC

$$\vec{V}.\vec{n} \rightarrow sinal\ depende\ de\ \vec{V}\ e\ de\ \vec{n}$$





$\vec{n}$ sempre aponta para fora do VC, na SC

Lei dos Nós (Kirchoff)

Da continuidade: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho d\forall + \int_{SC}\rho\overrightarrow{V}.\vec{n}dS = 0$

Onde $SC = \sum S_e + \sum S_s + \sum S_{Lateral}$, onde $S_{Lateral}$ tem fluxo=0

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho d\forall = \frac{\partial m}{\partial t} \ (variação\ da\ massa\ com\ o\ tempo\ no\ VC)$$

e, ∴, $\frac{\partial m}{\partial t} = \sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_s$

Hipótese 1 – Regime permanente→ $\frac{\partial m}{\partial t} = 0\ e\ \ \therefore\ \sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_s = 0$

$\sum \dot{m}_i = 0$ Lei dos Nós

Hipótese 2- Fluido incompressível ($\rho = constante$) $\rightarrow \sum Q_i = 0$