Aula 4 de PME3230

A equação de Bernoulli

Marcos Tadeu Pereira

A equação de Bernoulli é uma das mais usadas na mecânica dos fluidos, devido à sua simplicidade e eficácia para resolver problemas de escoamentos incompressíveis, em regime permanente e com viscosidade desprezível.

A equação de Bernoulli pode ser obtida, por ex., com a simplificação da equação de Navier-Stokes, ou com termodinâmica, ou com a aplicação da 2ª Lei de Newton.

Vamos usar o método do balanço de forças aplicado a um diagrama de corpo livre, com a 2ª Lei de Newton aplicada a uma partícula de fluido em uma linha de corrente.

Observar que não deve ser aplicada perto de camadas limites ou esteiras, onde há gradientes de velocidade: ($\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$)

Hipóteses:

escoamento não viscoso $\mu \approx 0$, ou pelo menos com

$F_{viscosas} \ll outras\ forças\ (F_{gravitacionais}, F_{inércia}\, ou\ F_{pressão})$

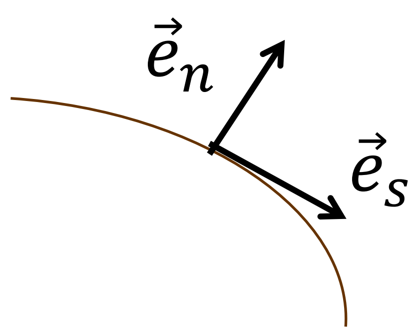
Regime permanente ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$)

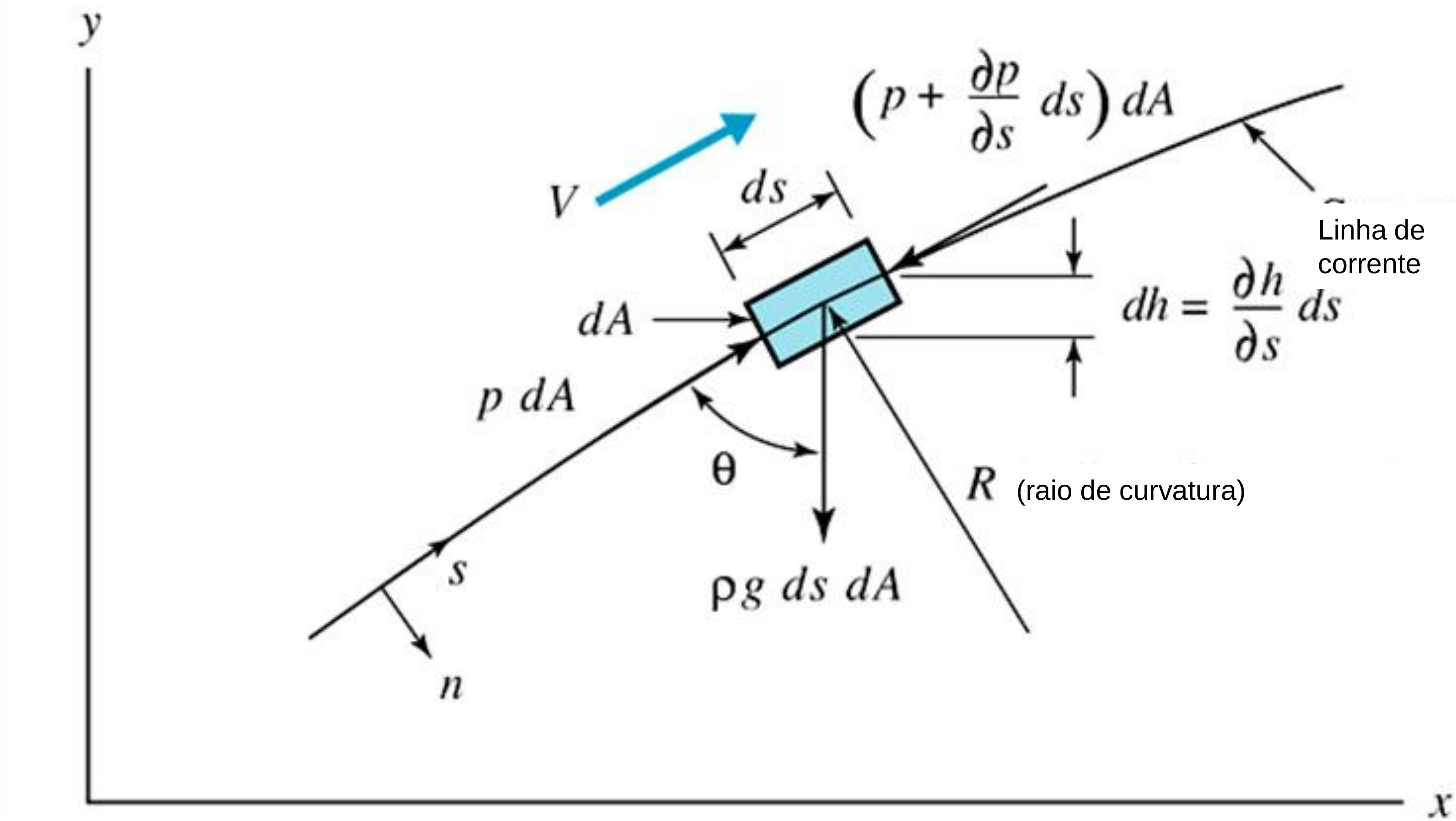
Fluido incompressível $\nabla . \vec{v} = 0$, ou Mach<0,3

Aplicada a uma partícula cilíndrica de fluido com comprimento ds e área dA em uma linha de corrente

Forças agindo: Pressão e Peso

Para facilitar, será considerado um sistema de coordenadas intrínseco:





$$expansão\ em\ série\ de\ Taylor:$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

$$\sum F_{ext\,\vec{e}_s} = m.a_{\vec{e}_s}$$

$$pdA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}ds\right)dA - \rho g.ds.dA.cos\theta = \rho ds.dA.a_s \qquad (1)$$

$$onde\ a_s = V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t} \qquad e\ \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$dh = dscos\theta = \frac{\partial h}{\partial s}ds \quad pois\ cos\theta = \frac{\partial h}{\partial s}$$

Tomando-se (1) e dividindo por $dsdA$ e fazendo as substituições:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g\frac{\partial h}{\partial s} = \rho V\frac{\partial V}{\partial s}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{\partial h}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s}$$

$como\ \rho$ é $constante, e$

$V \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V^2/2}{\partial s}$, resulta:

$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh\right) = 0$ ou:

$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = constante$ ou ainda:

$$\frac{V^2{}_1}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{V^2{}_2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_2$$

Se a expressão anterior for dividida por g, resulta

$$\frac{\boldsymbol{V^2}_{\boldsymbol{1}}}{\boldsymbol{2g}} + \frac{\boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{h_1} = \frac{\boldsymbol{V^2}_{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{2g}} + \frac{\boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{h_2}$$

$A\ soma\ dos\ termos$ $\left(\frac{p}{\gamma} + h\right)$ é chamada de **carga piezométrica**

$e\ a\ soma\ dos\ tr\hat{e}s\ termos$ é $chamada\ de$ $\boldsymbol{carga\ mec\hat{a}nica\ total}$.

Observar que a equação de Bernoulli pode ser considerada um “Princípio de conservação de energia mecânica”, pois não há perdas por atrito a serem consideradas, ou seja não há conversão de energia mecânica para energia térmica

$A\ press\tilde{a}o\ p$ é $chamada\ de\ press\tilde{a}o\ est\acute{a}tica$.

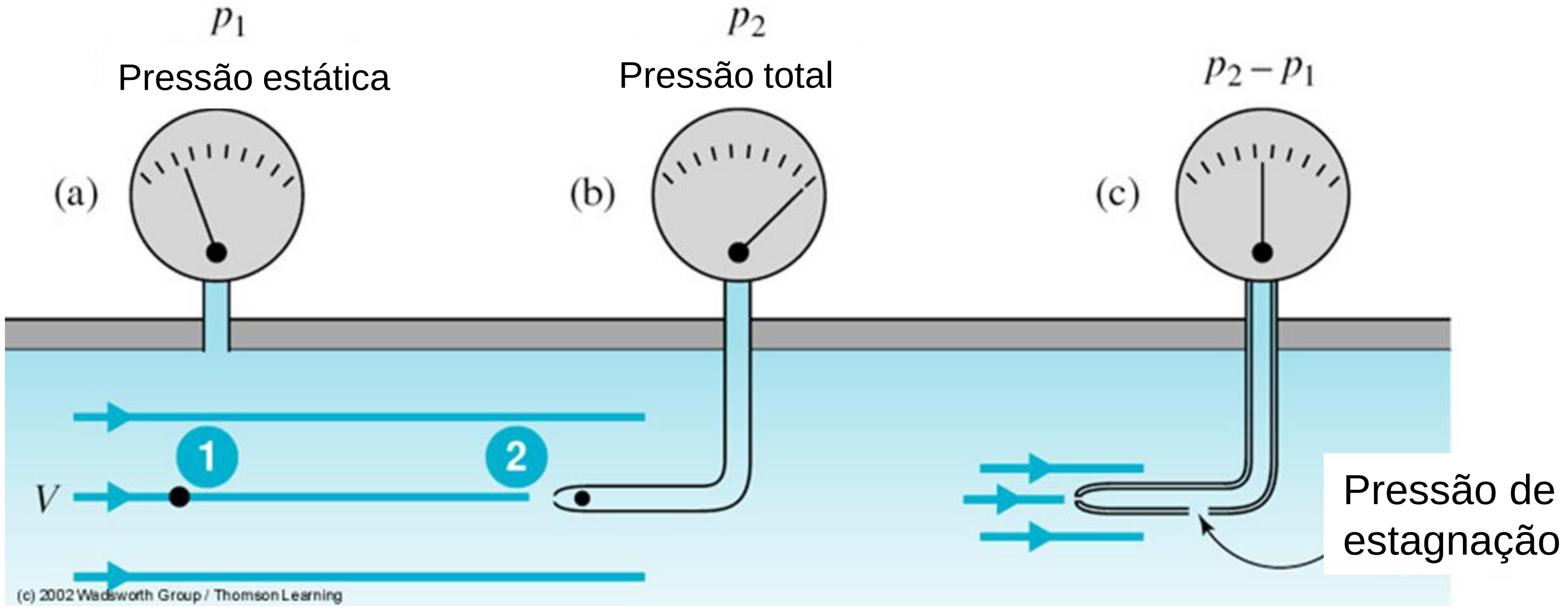
A $soma\ dos\ dois\ termos$:

$p + \rho\frac{V^2}{2} = p_T$ é chamada pressão total $ou\ press\tilde{a}o\ de\ estagna\c{c}\tilde{a}o$

Matriz de tubos de Pitot atrás da roda, para determinar o campo de velocidades

Método Euleriano aplicado a um arranjo com tubos de Pitot em ensaio em carro de F1.

Observe que a posição do carro na pista é monitorada como um todo, Lagrange, mas a distribuição de velocidades do ar na frente do pneu é monitorada em pontos fixos, Euler.


p_1
Pressão estática
p_2
Pressão total
$p_2 - p_1$
(a)
(b)
(c)
1
2
V
Pressão de estagnação
(c) 2002 Wadsworth Group / Thomson Learning