

# Teorema de Transporte de Reynolds e Leis Integrais

## **Primeira Lei da Termodinâmica**

# 1ª lei da Termodinâmica para sistemas:

$$\Delta E = Q + W$$

Varição da energia total de um sistema = **entrada** de calor + **entrada** de trabalho (trabalho sofrido)

A conservação de energia  $\Delta E = Q + W$  pode ser escrita em termos de variação com o tempo, para sistemas:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (1)$$

Taxa de variação no tempo da energia total de um sistema = taxa líquida de transferência de calor para o sistema + potência mecânica transferida ao sistema

Teorema de Transporte de Reynolds (TTR) para a equação da energia para uma abordagem de Euler, com **volume de controle** VC.

$$\left. \frac{dN}{dt} \right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho d\forall + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (2)$$

Não é necessário memorizar a derivação, apenas entenda qual a origem dos termos.

A equações integrais são bem complicadas, mas ao final teremos formas algébricas mais simples, que é o que aplicamos na solução de problemas.

Seja  $N = E$  energia total do sistema

$$\eta = \frac{N}{\text{massa}} = \frac{E}{\text{massa}} = e, \text{ onde } E = \int_{m_{\text{sist}}} edm = \int_{\forall_{\text{sist}}} e\rho d\forall$$

o TTR fica então:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{sist}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} e\rho d\forall + \int_{SC} e\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (3)$$

Como não se mede energia diretamente, esta forma de apresentação não é útil. Deve-se substituir os termos de energia por grandezas mais facilmente aplicáveis ou mensuráveis ( $u$  (energia interna do sistema),  $\frac{V^2}{2}$ ,  $gz$ )

O termo de energia é constituído pelas formas disponíveis de energia no sistema:

$$e = u + \frac{v^2}{2} + gz$$

*u = energia interna por unidade de massa*

*$v^2/2$  = energia cinética por unidade de massa*

*gz = energia potencial por unidade de massa*

Voltando às equações (1) e (3):

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz\right) \rho d\forall + \int_{\vec{S}C} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz\right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \dot{Q} + \dot{W}$$

O termo de potência  $\dot{W}$  (potência das forças externas) realizado sobre o sistema (nos dois sentidos: pode ser potência retirada também) pode ser descrito como:

$$\dot{W} = \dot{W}_{fluxo} + \dot{W}_{máquina} + \dot{W}_{\tau}$$

Onde

$\dot{W}_{fluxo}$  - potência exercida por fluxo adjacente ou pistão

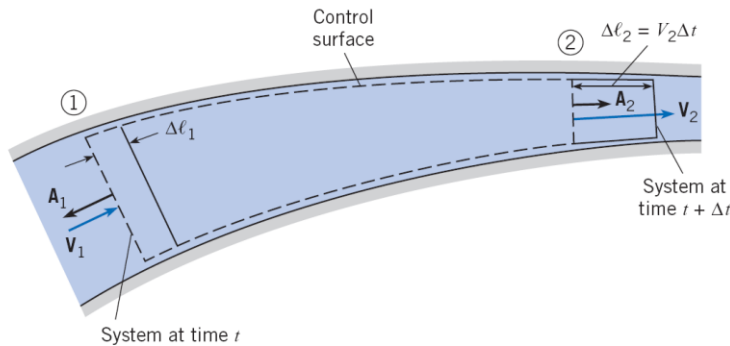
$\dot{W}_{máquina}$  é a potência transferida por **eixo** de máquina

$\dot{W}_{\tau}$  é a potência consumida pelas forças externas cisalhantes

Na expressão acima foram considerados desprezíveis os trabalhos realizados por forças elétricas, magnéticas e de tensão superficial.

# $\dot{W}_{fluxo}$ ou $\dot{W}_{pressão}$

Trabalho de Fluxo é o trabalho realizado por forças de pressão. Não importa se o trabalho é feito por um pistão ou por fluido adjacente.



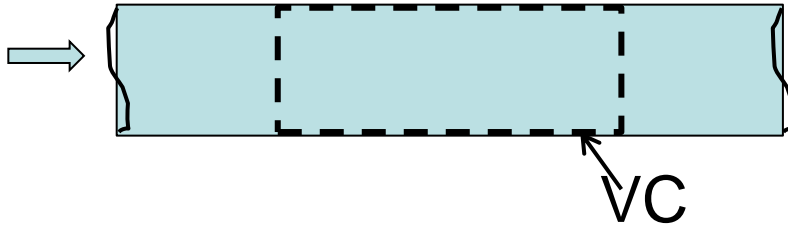
Como  $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l}$  , então  $\dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

mas  $\vec{F} = \int_A p d\vec{A}$  e, portanto  $\dot{W}_{fluxo} = - \int_{SC} p \vec{v} \cdot \vec{n} dS$  (4)

A quantidade  $\vec{v} \cdot \vec{n}$  é positiva para a expansão e negativa para a compressão. O sinal negativo na expressão (4) garante que o trabalho realizado pelas forças de pressão é positivo quando realizado no sistema e negativo quando realizado pelo sistema, de acordo com a convenção de sinais adotada. O sinal é negativo por convenção, (antigo: máquina a vapor transfere energia para a máquina e tira-se trabalho)

## Explicação adicional para $\dot{W}_{fluxo}$ ou $\dot{W}_{pressão}$

Este sinal é negativo porque vem da dedução do fluxo de energia para um VC



Não há fluxo de energia de pressão pela parede do tubo, só pelas seções de troca de massa (entrada e saída)

As tensões normais no fluido (interno ao VC) são iguais à pressão, só que com sinal contrário:  $\sigma = -P$

A potência associada às tensões normais em uma partícula fluida

$\delta\dot{W}_{tensão\ normal}$  pode ser avaliada como o produto escalar da força normal ( $\delta\vec{F}_{tensão\ normal}$ ) associada a esta tensão e à velocidade da partícula:

$$\delta\dot{W}_{tensão\ normal} = \delta\vec{F}_{tensão\ normal} \cdot \vec{v}$$

Se a força devida a esta tensão normal for expressa como o produto da pressão local, pois  $\sigma = -P$ , pela área da partícula fluida  $\delta A \vec{n}$ , então

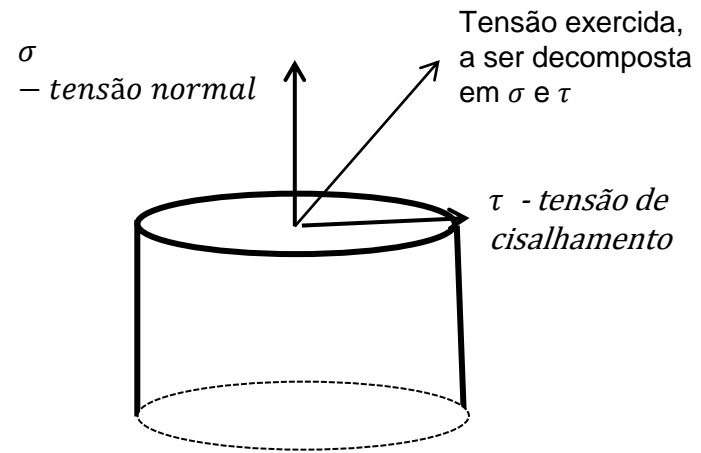
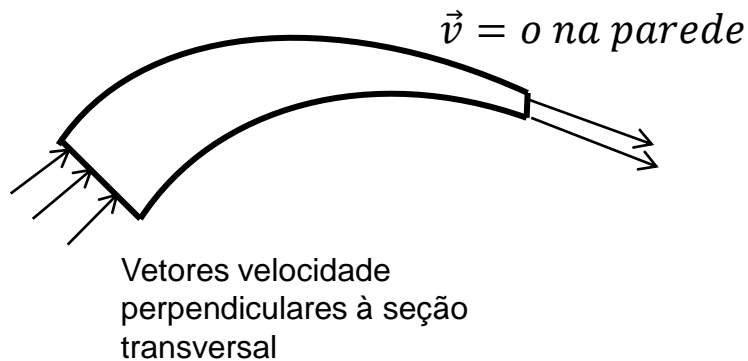
$$\delta\dot{W}_{tensão\ normal} = \sigma \vec{n} \delta A \cdot \vec{v} = -p \vec{n} \delta A \cdot \vec{v} = -p \vec{v} \cdot \vec{n} \delta A$$



# $\dot{W}_\tau$ - potência das forças externas cisalhantes

$$\dot{W}_\tau \cong 0$$

pois as linhas de corrente são perpendiculares à seção transversal



$$\dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad e \quad \vec{F} = \tau \cdot A$$

$$\text{Daí: } \dot{W}_\tau \cong 0$$

Finalmente, o **trabalho de eixo**  $\dot{W}_{máquina}$  pode ser considerado como o trabalho de eixo girante,

$$\dot{W}_{máquina} = \omega T = 2\pi nT, \text{ com}$$

$\omega = \text{velocidade angular em rad/s}$

$T = \text{torque do eixo}$

$n = \text{revoluções do eixo por unidade de tempo} \left( \frac{\text{rotações}}{\text{segundo}} \right)$

Uma **bomba** realiza trabalho no fluido, aumentando portanto sua energia. Pela definição adotada na Mec Flu, isto é **trabalho positivo**.

Trabalho realizado pelo escoamento em **turbinas** é considerado **trabalho negativo**.

A mesma convenção vale para o calor  $\dot{Q}$ :  $\dot{Q}$  é positivo quando transferido para o sistema e negativo quando transferido para fora do sistema

Voltando à equação da energia, com o termo de potência externa dividido em dois  $\dot{W}_{fluxo}$  e  $\dot{W}_{máquina}$  :

$$\dot{W}_{máquina_{sist}} + \dot{Q}_{sist} - \int_{SC} p \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \left( u + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho d\forall + \int_{SC} \left( u + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

onde  $\dot{Q}$  pode assumir a forma de radiação, condução ou convecção (qualquer forma de transferência de calor).

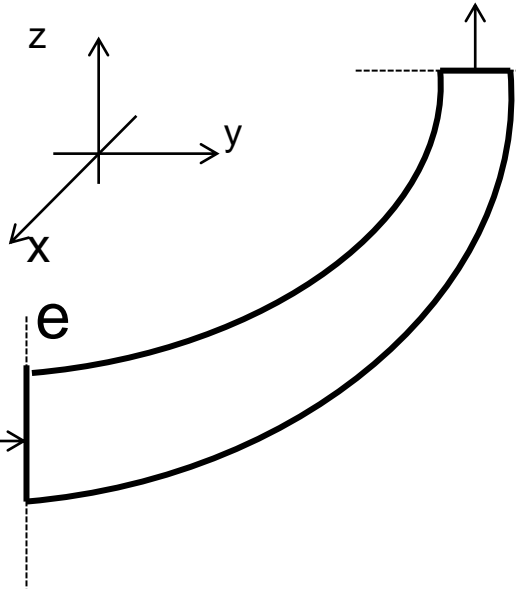
Observar que **em um instante  $t_0$**  o **sistema** se confunde com o  $\forall C$  e o trabalho de eixo e a troca de calor estão relacionadas ao  $\forall C$ . Da expressão acima resulta a

**equação geral da energia aplicada a um VC:**

$$\dot{W}_{máquina} + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \left( u + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho dV + \int_{SC} \left( u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

Às vezes  $u + \frac{p}{\rho}$  são combinados na 2ª integral:  $h = u + p/\rho$  onde  $h$  é a entalpia específica.

# Pode-se ter a equação **geral** da energia **aplicada a dutos**:



- VC com 1 entrada e 1 saída,
- Regime permanente
- Fluido incompressível

Com estas hipóteses,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  e a equação se transforma em:

$$\dot{W}_m + \dot{Q} = \int_{SC} \left( u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

$$\dot{W}_m + \dot{Q} = - \int_{A_e} \left( u_e + \frac{v_e^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho} \right) \rho v_e dA_e + \int_{A_s} \left( u_s + \frac{v_s^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho} \right) \rho v_s dA_s$$

Observar que para realizar a integração, é necessário conhecer o perfil de velocidades (as outras grandezas são consideradas uniformes).

Como os perfis de velocidade nunca são uniformes (se  $v$  fosse a velocidade média, a integral estaria resolvida) deve-se introduzir o **coeficiente de energia cinética**  $\alpha$ , que possibilita correções para os perfis reais de velocidade:

Admitem-se propriedades uniformes nas seções de entrada e saída (observar que  $v$  é a velocidade em cada ponto da seção e  $V$  é a velocidade média, como se fosse um perfil uniforme). Define-se  $\alpha$  como

$$\alpha = \frac{\int_A \rho \left(\frac{v^2}{2}\right) v dA}{\int_A \rho \left(\frac{V^2}{2}\right) V dA} = \frac{\int_A \rho \left(\frac{v^3}{2}\right) dA}{\int_A \rho \left(\frac{V^3}{2}\right) dA} = \frac{\int_A \rho v^3 dA}{\rho V^3 A} = \frac{\textit{perfil real}}{\textit{perfil médio}}$$

Para escoamentos turbulentos, normalmente  $\alpha = 1$ , e para escoamentos laminares,  $\alpha = 2$ . Na transição,  $1 \leq \alpha \leq 2$ .

Voltando à equação **geral** da energia aplicada a dutos:

$$\dot{W}_m + \dot{Q} = - \int_{A_e} \left( u_e + \frac{v_e^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho} \right) \rho v_e dA_e + \int_{A_s} \left( u_s + \frac{v_s^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho} \right) \rho v_s dA_s$$

Com a definição de  $\alpha$  pode-se abrir as integrais (considerando propriedades uniformes):

$$\dot{W}_m + \dot{Q} = - \left( u + \alpha \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right)_e \rho Q_e + \left( u + \alpha \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right)_s \rho Q_s$$

Lembrando que  $Q_s = Q_e = Q$  (vazão) e que  $\dot{Q}$  é energia

$$\left( \frac{\alpha_e V_e^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho} \right) \rho Q - \left( \frac{\alpha_s V_s^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho} \right) \rho Q = (u_s - u_e) \rho Q - \dot{Q} - \dot{W}_m$$

$$\underbrace{\left( \frac{\alpha_e V_e^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho} \right)}_{\substack{\text{energia mecânica por} \\ \text{unidade de massa} \\ \text{na entrada}}} - \underbrace{\left( \frac{\alpha_s V_s^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho} \right)}_{\substack{\text{energia mecânica por} \\ \text{unidade de massa} \\ \text{na saída}}} = \underbrace{\left\{ u_s - u_e - \frac{\dot{Q}}{\rho Q} \right\}}_{\substack{\text{termos térmicos} \\ \text{perda de} \\ \text{energia por} \\ \text{dissipação} \\ \text{viscosa incluída}}} - \underbrace{\frac{\dot{W}_m}{\rho Q}}_{\substack{\text{potência por} \\ \text{unidade de} \\ \text{massa devida} \\ \text{ao trabalho} \\ \text{de eixo}}}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\alpha_e V_e^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho}\right)}_{\text{energia mecânica por unidade de massa na entrada}} - \underbrace{\left(\frac{\alpha_s V_s^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho}\right)}_{\text{energia mecânica por unidade de massa na saída}} = \underbrace{\left\{u_s - u_e - \frac{\dot{Q}}{\rho Q}\right\}}_{\text{termos térmicos perda de energia por dissipação viscosa incluída}} - \underbrace{\frac{\dot{W}_m}{\rho Q}}_{\text{potência por unidade de massa devida ao trabalho de eixo}}$$

Dividindo esta expressão por g, resulta:

$$\underbrace{\left(\frac{\alpha_e V_e^2}{2g} + \frac{p_e}{\gamma} + z_e\right)}_{H_e = \text{carga total na seção de entrada}} - \underbrace{\left(\frac{\alpha_s V_s^2}{2g} + \frac{p_s}{\gamma} + z_s\right)}_{H_s = \text{carga total na seção de saída}} = \underbrace{\left\{u_s - u_e - \frac{\dot{Q}}{\rho Q}\right\} \frac{1}{g}}_{\frac{\dot{W}_a}{\gamma Q} = \text{perda de carga no trecho}} - \underbrace{\frac{\dot{W}_m}{\gamma Q}}_{\text{carga retirada ou fornecida por máquina}}$$

$$H_e - H_s = \frac{\dot{W}_a}{\gamma Q} - \frac{\dot{W}_m}{\gamma Q}$$

Se  $\dot{W}_m > 0 \rightarrow$  Bomba

Se  $\dot{W}_m < 0 \rightarrow$  Turbina