

Física I-IME

2º Semestre de 2016

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professor: **Luiz Nagamine**

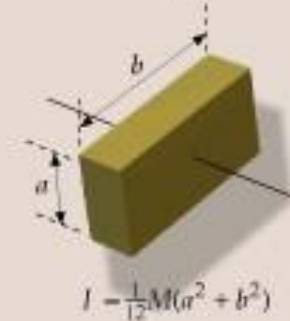
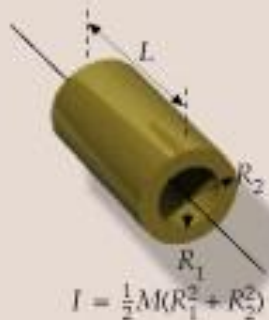
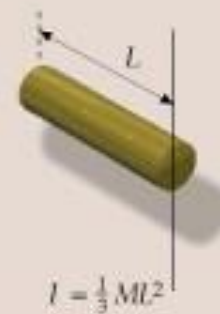
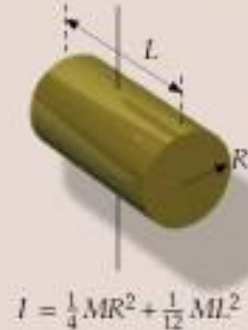
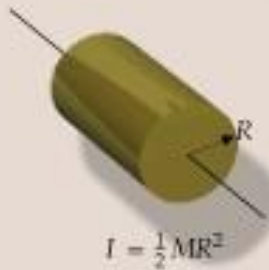
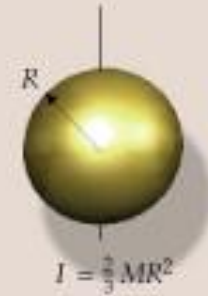
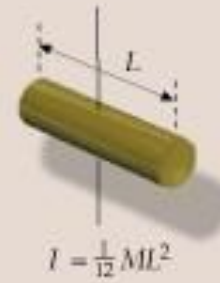
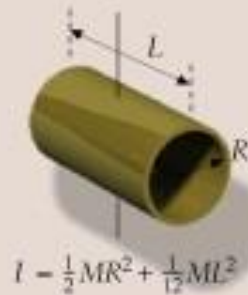
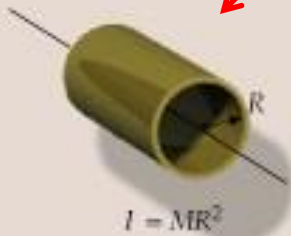
E-mail: nagamine@if.usp.br

Fone: **3091.6877**

16 e 17 de outubro

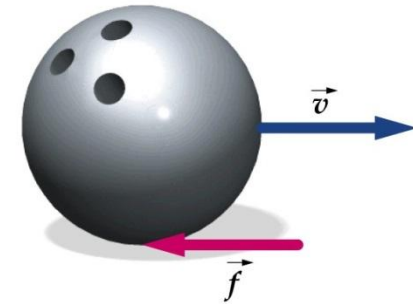
$$I = \int r^2 dm$$

cascas



Rolamento sem deslizar

Quando temos atrito estático, se considera que não há perda de energia no sistema, ou seja, que o sistema é conservativo. Isto é aproximadamente correto.



Exemplo: Uma bola de boliche, com 11 cm de raio e 7,2 kg, rola sem deslizar a 2,0 m/s. Ela continua a rolar sem deslizar, ao subir uma rampa até a altura h , quando atinge o repouso. Determine h .

Vamos considerar o sistema bola-pista-Terra. Não existem forças externas e nem forças internas dissipativas, então a Energia Mecânica se conserva.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + W_{nc} \qquad 0 = \Delta E_{mec} + 0$$

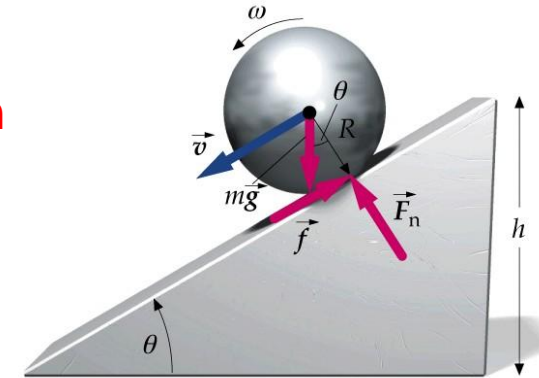
$$U_f + K_f = U_i + K_i \qquad 0 + mgh = 0 + \frac{1}{2}mv_{cm_i}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_i^2$$

Com $I = \frac{2}{5}mR^2$

$$h = \frac{7v_{cm_i}^2}{10g} = 29\text{cm}$$

Rolamento sem deslizar

Uma bola maciça, de raio R e massa m , desce rolando um plano inclinado com ângulo θ , sem deslizar. Determine a força de atrito e a aceleração do centro de massa.



Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à bola (rotação e translação). (o peso e a normal na polia, não geram torque)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ext} = I_{cm} \alpha = f_e R \\ F_{ext} = m a_{cm} \end{array} \right.$$

Com $a_{cm} = R\alpha$

$$mg \sin \theta - f_e = m a_{cm}$$

$$mg \sin \theta - \frac{I_{cm} a_{cm}}{R} = m a_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}}$$

$$F_e = \frac{mg \sin \theta}{1 + \frac{mR^2}{I_{cm}}}$$

Com

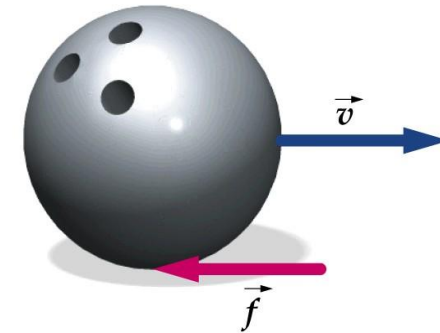
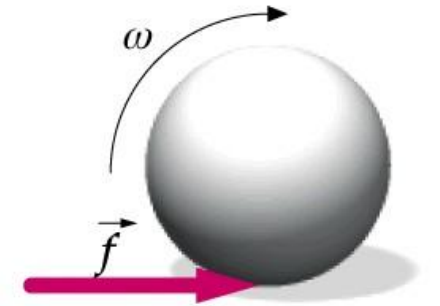
$$I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$$

Rolamento com deslizamento

Quando temos atrito dinâmico, se considera que haja perda de energia no sistema, ou seja, que o sistema não é conservativo. Parte da energia é convertida em calor.

O sentido da força de atrito é definido pela relação entre a velocidade angular e a velocidade do centro de massa.

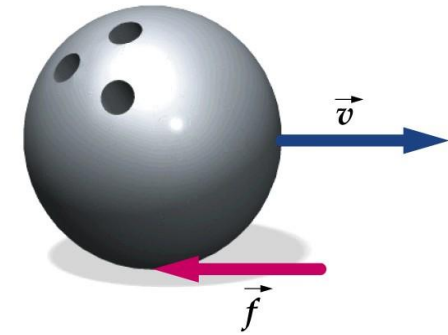
Exemplo: Uma bola de boliche, de massa m e raio R , é lançada sem rolamento, com velocidade de 5,0 m/s. O coeficiente de atrito cinético é 0,08. Determine (a) o tempo que a bola leva derrapando. (b) a distância deste trajeto.



Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à bola (rotação e translação).

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ext} = I_{cm} \alpha = F_e R \\ F_{ext} = m a_{cm} \end{array} \right. \quad \text{Com } a_{cm} = R \alpha$$

Rolamento com deslizamento



$$\tau_{ext} = I_{cm} \alpha = f_c R$$

Com $a_{cm} = R\alpha$

$$F_{ext} = ma_{cm}$$

$$-f_c = ma_{cm} = -\mu_c mg$$

$$a_{cm} = -\mu_c g$$

$$v_{cm} = v_0 - \mu_c g t$$

$$\alpha = \frac{f_c R}{I_{cm}} = \frac{\mu_c mg R}{\frac{2}{5} m R^2} = \frac{5 \mu_c g}{2 R}$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{5 \mu_c g}{2 R} t$$

Mas, quando não deslizar

$$v_{cm} = R\omega$$

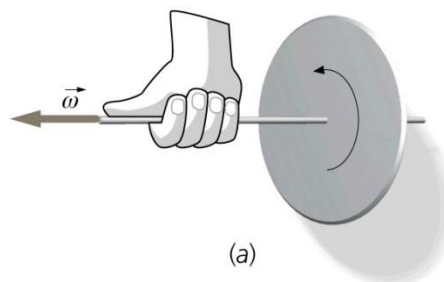
$$v_0 - \mu_c g t = \frac{5 \mu_c g R}{2 R} t$$

$$t = \frac{2v_0}{7\mu_c g}$$

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{12v_0^2}{49\mu_c g}$$

A natureza vetorial da rotação

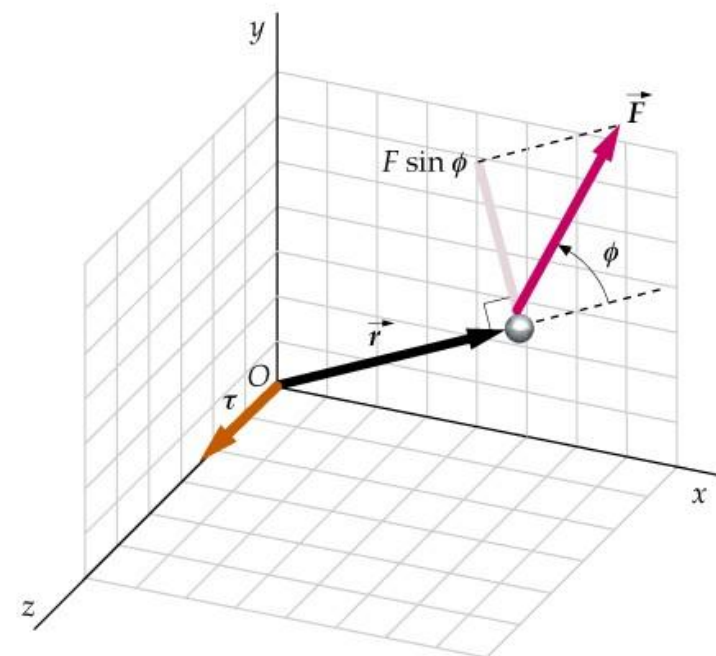
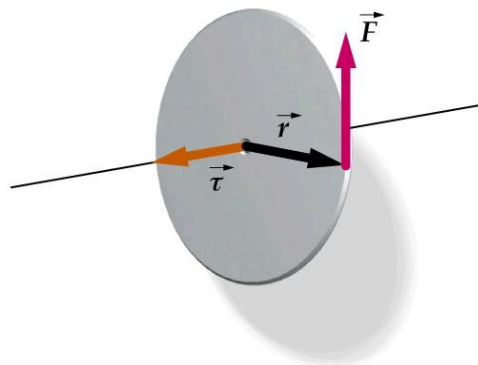
Agora, vamos considerar os casos em que o eixo de rotação pode alterar a sua direção. Isto explicita a natureza vetorial da rotação. Definimos a direção do vetor velocidade angular como perpendicular ao plano de rotação e o sentido dado pela regra da mão direita.



A natureza vetorial da Torque

A definição mais completa do torque é dada em termos do produto vetorial

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Quantidade de Movimento Angular

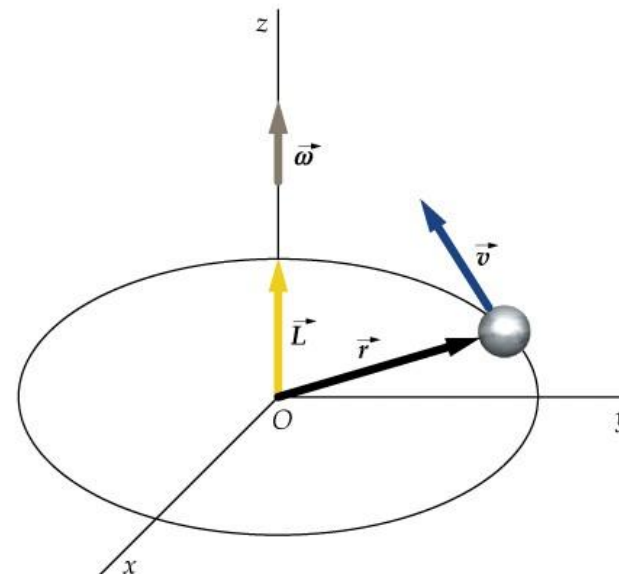
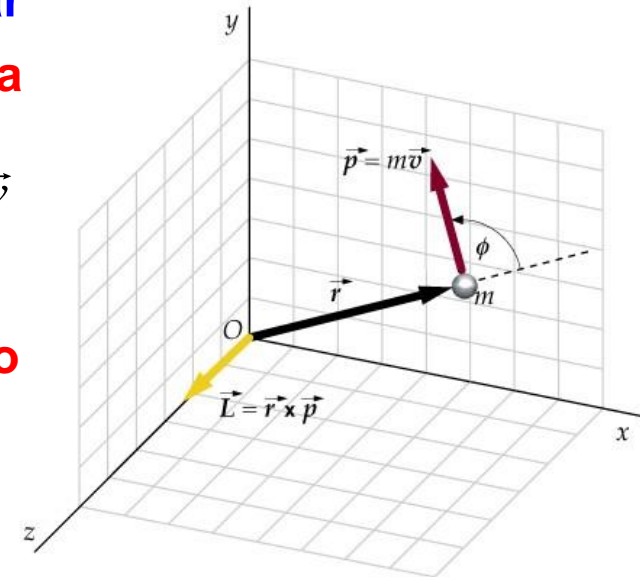
A figura ao lado, mostra uma partícula de massa m , na posição r , se movendo com uma velocidade v . Ela possui uma quantidade de movimento linear $\vec{p} = m\vec{v}$

Definimos a Quantidade de Movimento Angular (ou Momento Angular) em relação à origem, como sendo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Ou ainda, por analogia à quantidade de movimento linear podemos também escrever

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

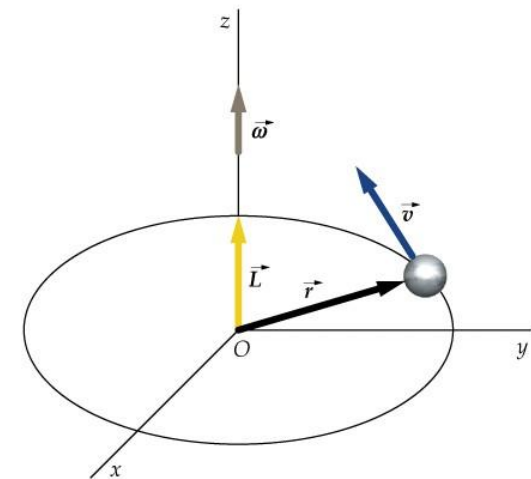


$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Ou ainda, por analogia à quantidade de movimento linear podemos também escrever

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

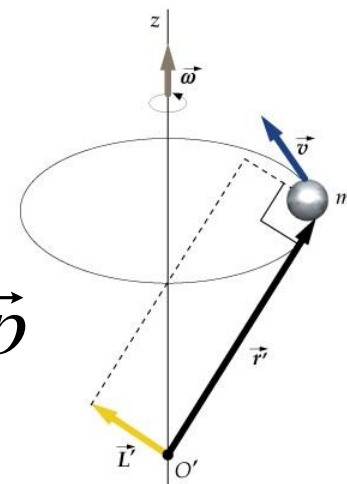
$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$



Porém, se mudarmos a origem do sistema de coordenadas, em relação ao plano da órbita, obtemos um novo valor de L que não é paralelo a ω .

Isto indica que a última definição não é universal.

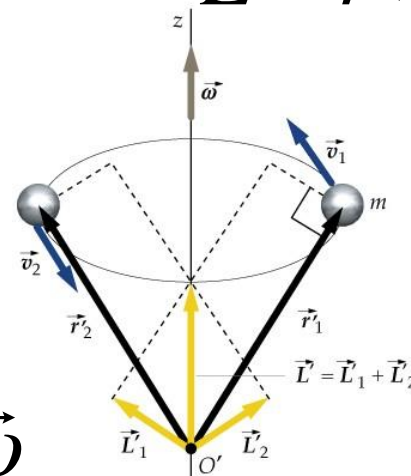
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



No entanto, se tivéssemos duas massas simétricas em relação ao eixo z, L seria paralelo a ω .

Isto mostra que a última definição é válida apenas quando temos simetria em relação ao eixo de rotação.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$



Mais analogias

A segunda lei de Newton para a translação pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{sis}}{dt}$$

A segunda lei de Newton para a rotação pode ser escrita em termos do torque e momento angular como:

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{sis}}{dt}$$

Impulso angular – Quantidade de movimento angular

$$\Delta\vec{L}_{sis} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau}_{ext} dt$$

Que é o análogo de

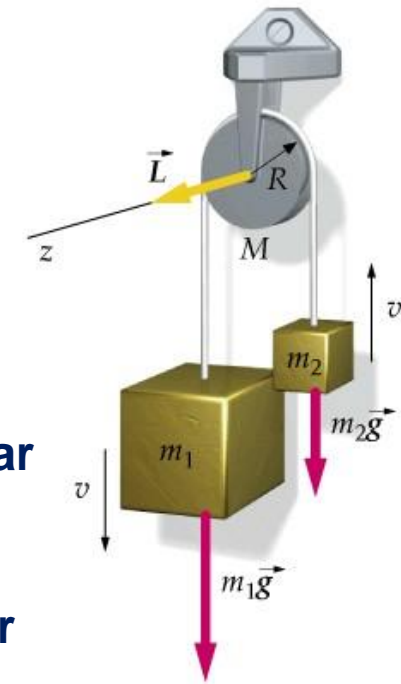
$$\Delta\vec{P}_{sis} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext} dt$$

Uma polia sem atrito nos mancais, tem dois blocos, de massas $m_1 > m_2$, ligadas por um fio de massa desprezível. A polia é disco de massa M e raio R . Determine a aceleração dos blocos.

Vamos fixar o sistema de coordenadas no eixo da polia, com o eixo z paralelo ao eixo da polia.

Vamos considerar o sistema como constituído das massas, polia e fio.

Como os vetores torque, velocidade angular e quantidade de movimento angular são paralelos ao eixo z , podemos tratar este problema, como unidimensional e trabalhar escalarmente.



$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\tau_{ext} = \tau_n + \tau_g + \tau_1 + \tau_2$$

$$\tau_{ext} = m_1 g R - m_2 g R$$

$$L_z = L_p + L_1 + L_2$$

$$L_z = I\omega + m_1 v R + m_2 v R$$

$$\tau_{ext} = \frac{dL}{dt} = I\alpha + (m_1 + m_2)aR$$

$$a = R\alpha$$

$$I = 1/2MR^2$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} g$$

Movimento de piões

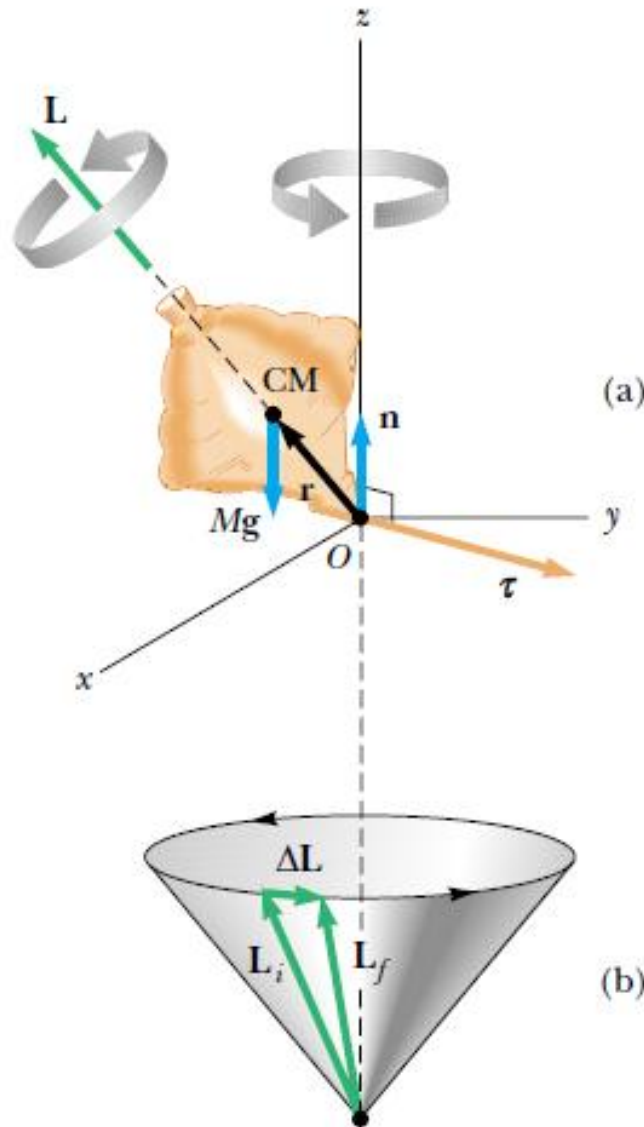


Figure 11.14 Precessional motion of a top spinning about its symmetry axis. (a) The only external forces acting on the top are the normal force \mathbf{n} and the gravitational force $M\mathbf{g}$. The direction of the angular momentum \mathbf{L} is along the axis of symmetry. The right-hand rule indicates that $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times M\mathbf{g}$ is in the xy plane. (b). The direction of $\Delta\mathbf{L}$ is parallel to that of $\boldsymbol{\tau}$ in part (a). The fact that $\mathbf{L}_f = \Delta\mathbf{L} + \mathbf{L}_i$ indicates that the top precesses about the z axis.

Movimento de giroscópio

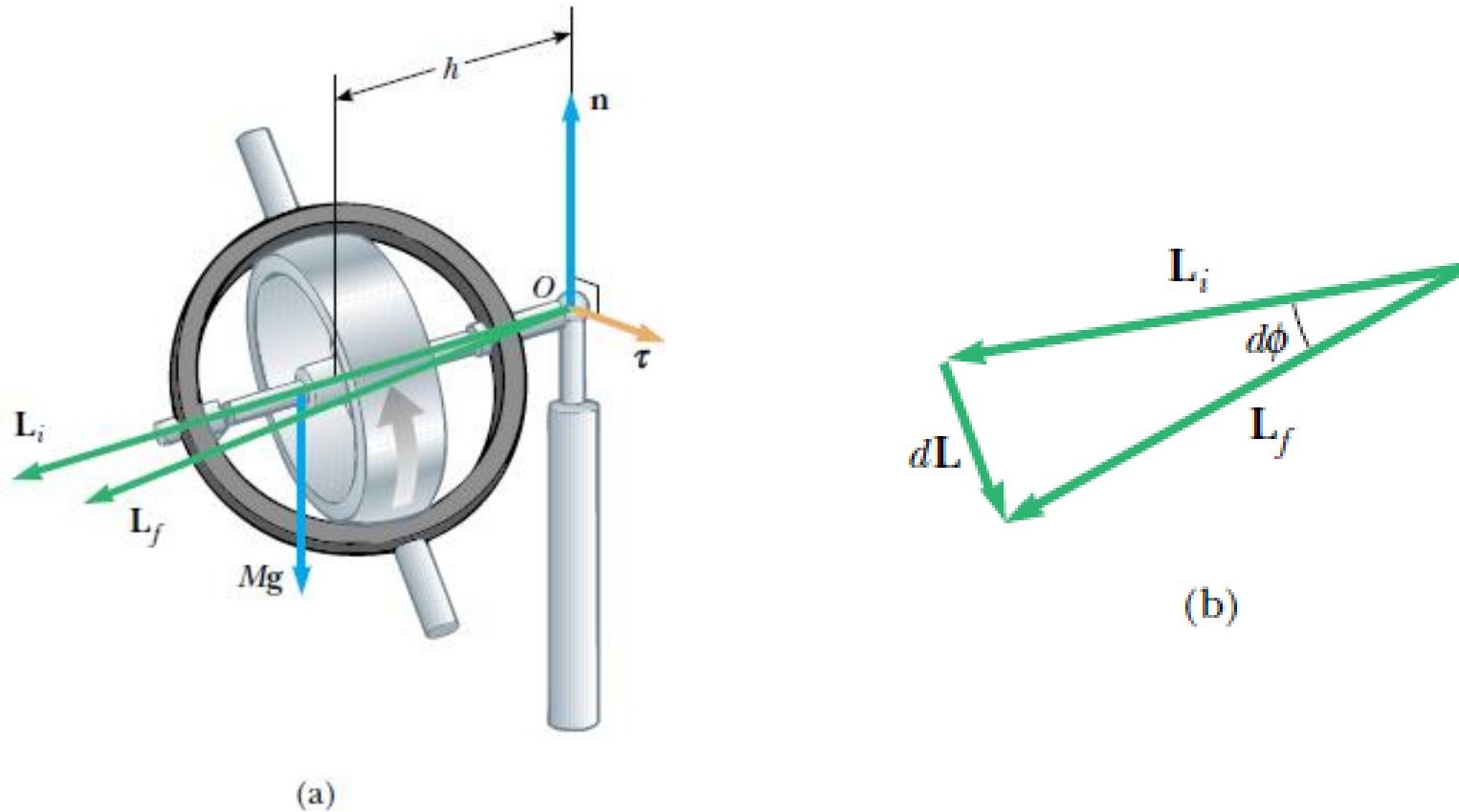
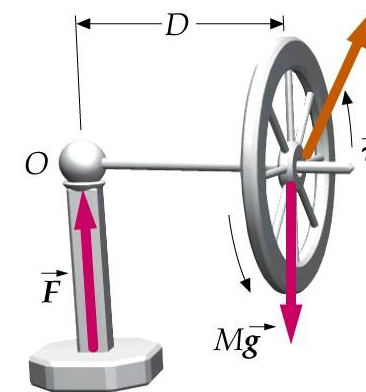


Figure 11.15 (a) The motion of a simple gyroscope pivoted a distance h from its center of mass. The gravitational force Mg produces a torque about the pivot, and this torque is perpendicular to the axle. (b) Overhead view of the initial and final angular momentum vectors. The torque results in a change in angular momentum dL in a direction perpendicular to the axle. The axle sweeps out an angle $d\phi$ in a time interval dt .

A “roda de bicicleta” vista na aula consiste em um corpo em rotação, com o seu eixo livre para alterar a sua direção.

A quantidade de movimento angular da roda é:

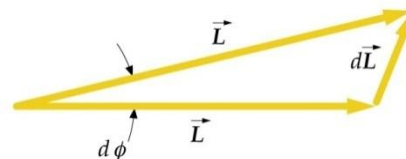
$$\vec{L} = I_{cm} \vec{\omega}$$



Aplicando-se a segunda lei de Newton para a rotação, temos:

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g}$$

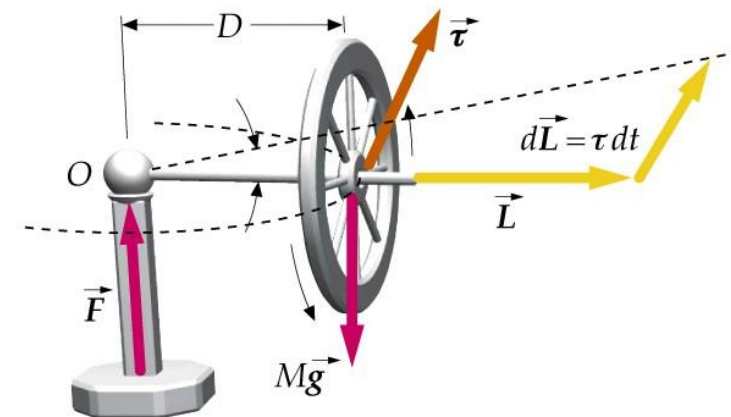
$$d\vec{L} = \vec{\tau}_{ext} dt$$



$$dL = L d\phi$$

A velocidade de precessão da roda em torno do eixo vertical é dada por:

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{\tau_{ext}}{L} = \frac{MgD}{I_{cm} \omega}$$



Quantidade de Movimento Angular

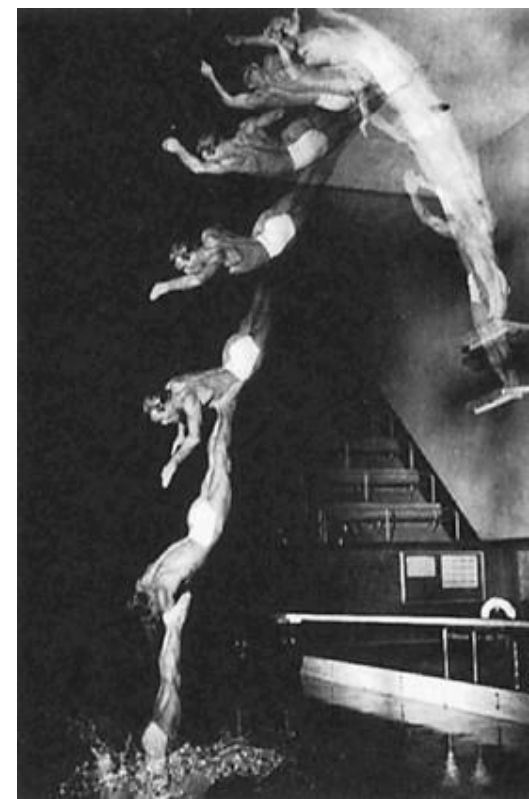
Quando o torque externo resultante sobre um sistema é nulo, temos:

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{L}_{sis} = cte$$

Temos a Conservação da Quantidade de Movimento Angular do sistema.

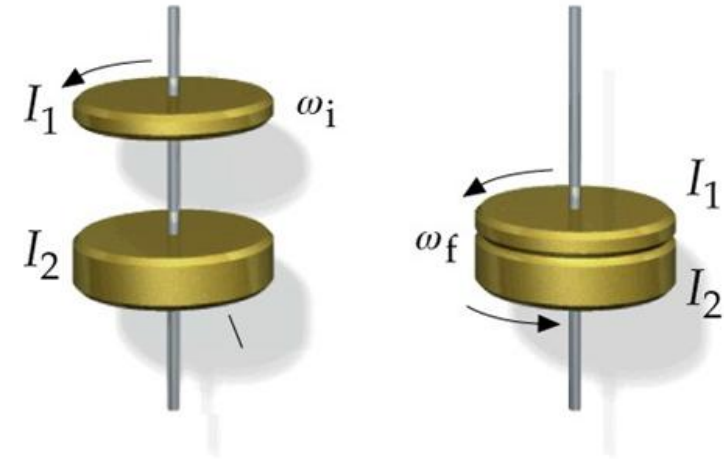


O peso não gera torque em relação ao eixo que passa pelo centro de massa.



O disco 1 gira livremente com velocidade angular ω_i . Seu momento de inércia é I_1 . Ele cai sobre o disco 2, com momento de inércia I_2 , que está em repouso. Devido ao atrito cinético, os dois discos tendem a ter a mesma velocidade. Determine ω_f .

Temos a Conservação da Quantidade de Movimento Angular do sistema.



$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad L_i = L_f = cte$$

$$I_1\omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f$$

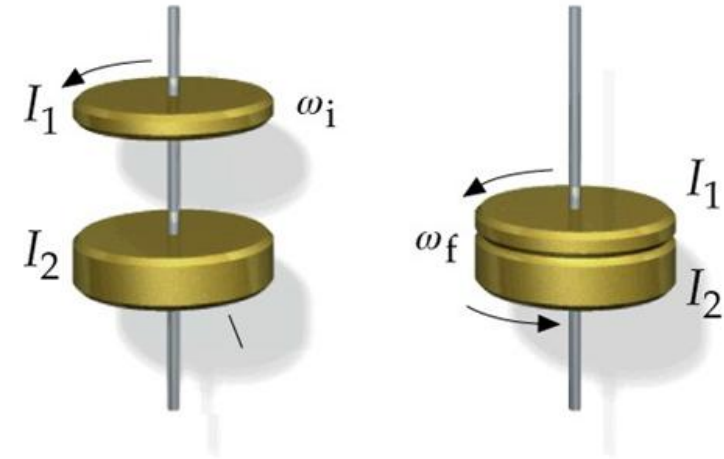
$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \omega_i = \frac{1}{1 + I_2/I_1} \omega_i$$

Podemos escrever a Energia Cinética de Rotação como:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I}$$

Vamos verificar a conservação da energia cinética

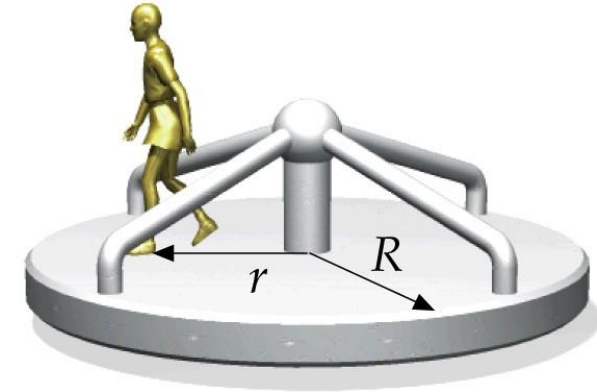
$$K_i = \frac{L_i^2}{2I_1} \quad K_f = \frac{L_f^2}{2(I_1 + I_2)}$$



Portanto, a Energia Cinética não se conservou.

$$\longrightarrow \frac{K_f}{K_i} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

Um parque possui um pequeno carrossel, cuja plataforma tem 3,0 m de diâmetro e $130 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ de momento de inércia. Cinco colegas se colocam próximo à borda, com o carrossel girando a 20 rpm. Considere que quatro dos colegas se movam rapidamente para o centro do carrossel ($r = 30 \text{ cm}$). Se a aceleração centrípeta necessária para atirar o quinto colega para fora do carrossel é de $4g$ (g é a aceleração da gravidade), determine se este foi arremessado. (a massa de cada colega é 60 kg)



Como o torque externo em relação ao eixo do carrossel é nulo, há conservação da quantidade de movimento angular

$$L_f = L_i \quad \longrightarrow \quad I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

$$I_i = 5mR^2 + I_{carr}$$

$$I_i = 805 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_f = mR^2 + 4mr^2 + I_{carr}$$

$$I_f = 287 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

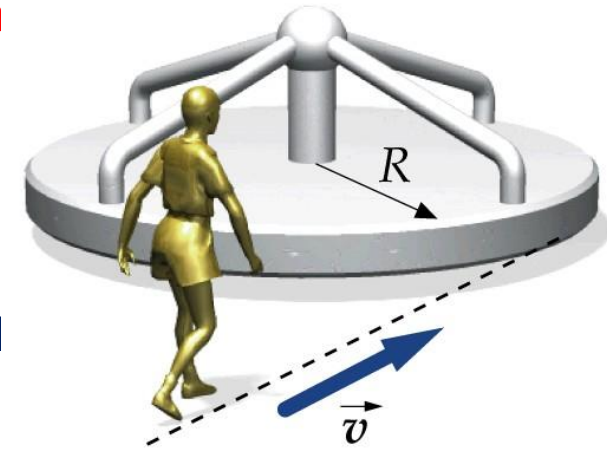
$$\omega_f = 56,2 \text{ rpm} = 5,88 \text{ rad} / \text{s}$$

$$a_c = \omega^2 R = 51,9 \text{ m} / \text{s}^2 > 5g$$

Arremessado !

Como é a força de atrito entre os pés dos 4 colegas e o carrossel, enquanto se movem?

Uma criança de 25 kg, corre a 2,5 m/s, tangente à borda de um carrossel de raio 2,0 m. O carrossel inicialmente em repouso, tem momento de inércia de 500 kg.m². A criança pula sobre o carrossel. Determine a velocidade angular final do conjunto.



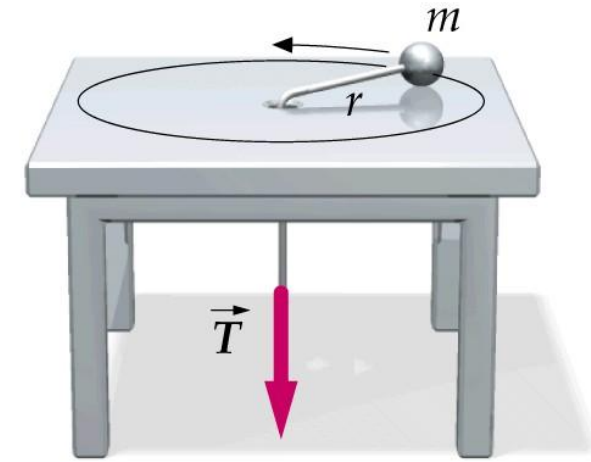
Como o torque externo em relação ao eixo do carrossel é nulo, há conservação da quantidade de movimento angular

$$L_f = L_i \quad \longrightarrow \quad I_f \omega_f = |\vec{r}_c \times m\vec{v}_i| = Rmv_i$$

$$I_f = mR^2 + I_{carr}$$

$$\omega_f = \frac{Rmv_i}{mR^2 + I_{carr}} = 0,21 \text{ rad} / \text{s}$$

Uma partícula de massa m se move sem atrito com velocidade v_0 em um círculo de raio r_0 . A partícula está presa a um fio que passa por um furo na mesa. O fio é puxado até que o raio do movimento passe a ser r_f . (a) Determine a velocidade final. (b) Determine a tensão no fio. (c) Determine o trabalho realizado pela tensão sobre a partícula.



Como a tensão é radial, não realiza torque sobre a partícula, então há conservação da quantidade de movimento angular da partícula.

$$L_f = L_i \longrightarrow \left| \vec{r}_f \times m\vec{v}_f \right| = \left| \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 \right| \longrightarrow v_f = \frac{r_0 v_0}{r_f}$$

$$T = m \frac{v^2}{r}$$

$$L = mrv$$

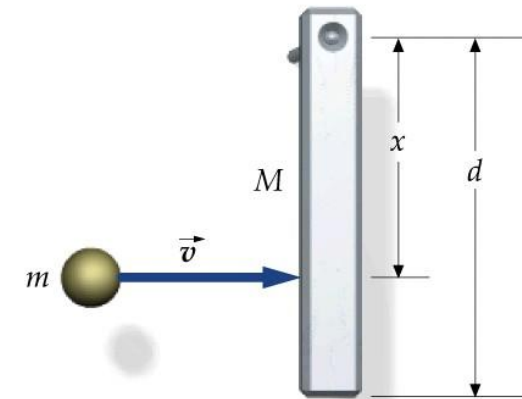
$$T = \frac{L^2}{mr^3}$$

$$dW = \vec{T} \cdot d\vec{l} = -Tdr$$

$$W = -\int_{r_0}^{r_f} Tdr = -\int_{r_0}^{r_f} \frac{L^2}{mr^3} dr$$

$$W = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{1}{r_f^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$$

Uma barra fina de massa M e comprimento d está pendurada em um pivô. Um pedaço de massa de modelar de massa m e velocidade v , atinge a barra a uma distância x do pivô e se prende a ela. Determine a razão entre as energias cinéticas antes e depois da colisão.



A colisão é inelástica, não há conservação da energia mecânica do sistema.

Durante a colisão há uma grande força no pivô, portanto não há conservação da quantidade de movimento linear.

A força no pivô é radial, não existe torque e temos conservação da quantidade de movimento angular.

$$L_f = L_i \quad \longrightarrow \quad L_f = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mvx$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{L_f^2}{2I_f}$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{L_f^2}{2I_f}}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{3}{2} \frac{(mxv)^2}{(3mx^2 + Md^2)}$$

$$I_f = mx^2 + \frac{1}{3}Md^2$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{1}{1 + \frac{Md^2}{3mx^2}}$$

Uma pessoa está sobre uma cadeira giratória, com a roda de bicicleta com seu eixo na vertical. Se ela gira a roda, o que acontece com a cadeira?

A mesma condição anterior, porém com o eixo da roda na horizontal.

Como fazer para colocar o eixo na vertical?

O que acontece com a cadeira?