Universidade de São Paulo

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"

Departamento de Ciências Exatas

LCE 0211 - Estatística Geral

Exercícios extraídos do material **Notas para acompanhar a disciplina LCE0210 Estatística Geral** (Zocchi, Silvio S.; Leandro, Roseli A. 1999.)

1) Considere uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 5 bolas pretas. Retire 3 bolas, uma a uma e sem reposição, e defina a variável X igual ao número de bolas pretas. Pede-se:

(a) Obter uma tabela contendo todos os possíveis resultados desse experimento e as probabilidades associadas a cada um desses resultados;

(b) Obter a distribuição da variável aleatória X e um gráfico que a represente.

2) Seja X a variável aleatória discreta número de ramificações por colmo cuja distribuição de probabilidade é dada por:

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Pede-se:

(a) Obter a função de distribuição acumulada $F(x)$ para a variável aleatória X e um gráfico que a represente;

(b) Calcular o número médio de ramificações por colmo ($\mathrm{E}(X)$). Resp: 2,3

(c) Calcular: $\mathrm{E}(4X)$, $\mathrm{E}(X+1)$, $\mathrm{E}(X^2)$ e a variância de X. Resp: 9,2; 3,3; 7,3; 2,01

(d) Calcular $\mathrm{Var}(2X)$ e $\mathrm{Var}(X+1)$. Resp:8,04; 2,01.

3) O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidades:

t	2	3	4	5	6	7
$P(t)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Pede-se:

(a) Calcular o tempo médio de processamento $\mu_T = \mathrm{E}(T)$; Resp:4,6 min.

(b) Calcular $\mathrm{E}(T^2)$, $\mathrm{E}(T^2+1)$, $\mathrm{Var}(T)$; Resp: 23,2; 24,2; 2,04

Considere que para cada peça processada, o operário ganha um fixo de 2,00 u.m. (unidade monetária), mas se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha um adicional de 0,5 u.m. por minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 3 minutos, recebe a quantia de 4 u.m. ($2+2\times 0,5$). Seja G a variável aleatória quantia ganha por peça. Pede-se:

(c) Obter a distribuição de probabilidade de G;

(d) Calcular a esperança e a variância de G; Resp: 2,75 u.m.; 0,4125 u.m.^{2}

4) Em um ensaio de cultura de tecidos do maracujazeiro, são colocados 5 explantes por frasco com meio de cultura e é então observado, após um certo período de tempo, o número de explantes enraizados por frasco. Sabendo-se que teoricamente, 80% dos explantes enraizam nesse meio, obter:

(a) A distribuição de probabilidade da variável aleatória X = número de explantes enraizados por frasco contendo 5 explantes e um gráfico que a represente.

(b) a probabilidade de pelo menos 3 explantes enraizem; Resp:0,942

(c) a esperança e a variância de X. Resp: 4; 0,8

5) Seja X uma variável aleatória contínua com função de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < 0 \\ 2x & \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para} \quad x > 1 \end{cases}$$

Pede-se:

(a) Fazer o gráfico de $f(x)$

(b) Verificar se $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade

(c) Calcular $P(0 < X < 0{,}5)$. Resp: 0,25

(d) Calcular a média, a moda e a variância de X. Resp: 2/3, 1, 1/18

(e) Obter a função de distribuição acumulada de X e a mediana. Resp:0,707

6) Seja X uma variável aleatória contínua com função de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < 0 \\ kx^2 & \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para} \quad x > 1 \end{cases}$$

em que k é uma constante. Pede-se:

(a) Determinar k de modo que a função $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade. Resp: $k = 3$

(b) Fazer o gráfico de $f(x)$

(c) Calcular $P(0{,}5 < X \leq 1)$ Res:7/8

(d) Calcular a média e a variância de X. Resp: 3/4, 3/80.

7) Seja X a variável aleatória contínua renda, em centenas de reais, cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{9}(3 - x^{1/2}) & \text{para} \quad 0 < x \leq 9 \\ 0 & \text{para} \quad x > 9 \end{cases}$$

Pede-se:

(a) Construir o gráfico de $f(x)$

(b) Calcular a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter renda até 3 centenas de reais. Resp: 0,6151

(c) Calcular a renda média (esperança de X) Resp: 2,7 centenas de reais

(d) Calcular a variância de X Resp: 4,2814 (centenas de reais)^2

(e) Obter a função de distribuição acumulada de X e seu gráfico

(f) Indicar, no gráfico de $F(x)$, a mediana, o primeiro quartil e o terceiro quartil.

8) **Distribuição de Pareto.** Essa distribuição é frequentemente utilizada na Economia, como um modelo para distribuição de renda. Dizemos que a variável aleatória X tem distribuição de Pareto, com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < \beta \\ \alpha\beta^{\alpha}x^{-\alpha-1} & \text{para} \quad x \geq \beta \end{cases}$$

em que β pode representar o nível mínimo de renda, e x é o nível de renda (ver Figura 1)

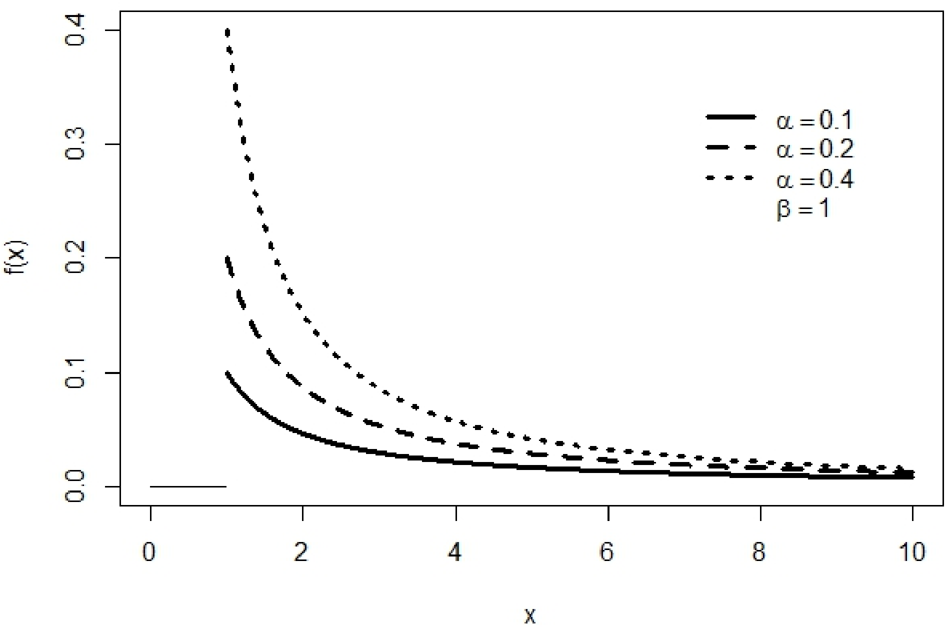

Figura 1: Gráfico da função densidade de probabilidade de Pareto para $\beta = 1$ e diferentes valores de α

(a) Provar que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

(b) Provar que a média de X é dada por:

$$\mu_X = E(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1}, \text{para} \quad \alpha > 1$$

(c) Provar que a variância de X é dada por:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \text{para} \quad \alpha > 2$$