Escoamento Laminar Viscoso em Dutos

PME 3230 - Mecânica dos Fluidos I

PME/EP/USP

Prof. Antonio Luiz Pacífico

2° Semestre de 2016

Conteúdo da Aula

Introdução

O objetivo deste capítulo é a aplicação das leis de conservação (principalmente as de conservação da massa e quantidade de movimento) aos escoamentos laminares viscosos, internos e incompressíveis em dutos.

Os escoamentos são classificados como internos ou externos dependendo do fato do fluido ser forçado a escoar num duto ou sobre uma superfície. Escoamento de água num cano é um exemplo de escoamento interno. Escoamento do ar ao redor de um automóvel é um exemplo de escoamento externo.

Quando o escoamento se dá no interior de um duto mas não ocupa toda sua seção transversal é chamado de escoamento em canal aberto. Outros exemplos deste tipo são escoamentos de rios ou canais construídos para o escoamento de rios e esgotos.

Introdução

A viscosidade e o gradiente de pressão são os efeitos dominantes nos escoamentos internos. Para escoamentos em canais abertos os efeitos dominantes são o da viscosidade e gravidade. Finalmente, nos escoamentos externos a viscosidade só tem infuência numa região do escoamento muito próxima a uma superfície, chamada de camada limite, ou na esteira formada à jusante de corpos imersos nesses escoamentos.

Dutos ou condutos são canais por onde o escoamento é forçado a passar. a forma geométrica da sua seção transversal é qualquer: circular, retangular, elíptica, etc. Entretanto, dutos de seção transversal circular recebem denominação própria, por ser a forma mais utilizada. Estes dutos são chamados de tubos. Cano é o termo coloquial para designar tubo.

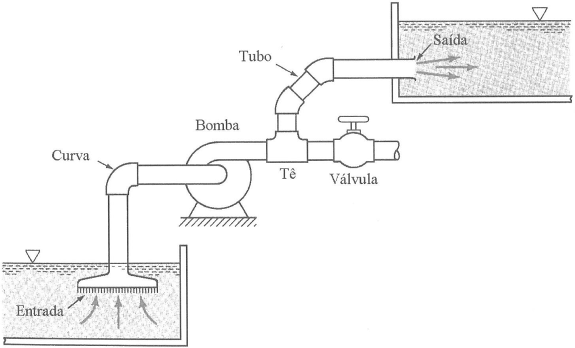
Introdução

Os escoamentos internos (confinados) são de grande utilização prática e são também muito comuns na natureza:

- oleodutos (não raramente com comprimentos superiores a centenas de kilómetros);
- sistemas sanguíneos em veias e artériras em seres vivos;
- sistemas (dutos) de transporte de ar em seres vivos;
- tubulações de águas e esgotos residencial e industrial;
- redes de dutos para sistemas de condicionamento de ar e refrigeração.

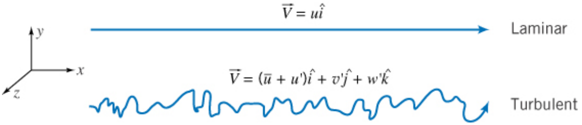
Todos estes exemplos têm em comum as mesmas leis básicas de Mecânica dos Fluidos que governam estes escoamentos.

Introdução



Muitos são os compenentes que, juntos, compõem os sistemas de tubulações. Os principais são: trechos retos de tubos e/ou dutos; e conexões. As conexões são de grande variedade: válvulas; cotovelos (ou joelhos) e curvas (raios mais longos); tês; filtros, etc. Além desses componentes as bombas e ventiladores são partes essenciais desses circuitos, uma vez que são eles que promovem o escoamento.

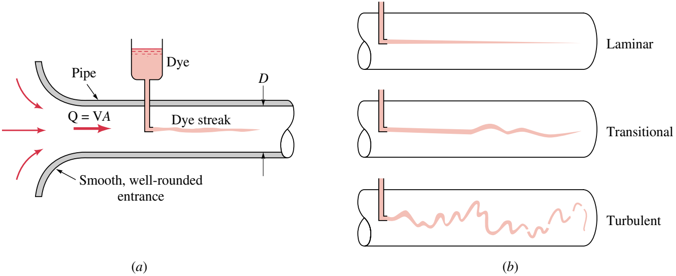
Escoamento Laminar e Turbulento



Um escoamento <u>laminar</u> é aquele onde as partículas movem-se em camadas lisas, ou lâminas. Quando o fluido é translúcido tem aparência ”vitrificada”.

Um escoamento <u>turbulento</u> é aquele no qual as partículas misturam-se rapidamente, devido às flutuações aleatórioas no campo tridimensional de velocidades. Não existem escoamentos turbulentos uni ou bidimensionais, são sempre tridimensionais. O que se pode falar é apenas de uma direção predominante do escoamento, como indicado na figura acima para a componente na direção axial (x) do escoamento. Assim, o conceito de regime permanente, quando o escoamento é turbulento, deve ser entendido para a média da variável (propriedade) em análise: escoamentos turbulentos só podem ser permanentes em média. Neste tipo de escoamento as flutuações (u', v', w') transportam quantidade de movimento através das LC's aumentando a tensão de cisalhamento média. Escoamentos turbulentos apoiam-se em teorias semi-empíricas e em dados experimentais. Turbulência é propriedade do escoamento, não do fluido.

Experiência de Reynolds



Há mais de um século Osborne Reynolds (1842 - 1912) idealizou o seguinte experimento: injetar um filete de tinta num escoamento através de um tubo transparente. Na figura ao lado, o resultado esquemático obtido.

Nos escoamentos turbulentos as flutuações causam transferência de quantidade de movimento entre as partículas intensificando o atrito e, portanto, a potência de bombeamento necessária.

Número de Reynolds

Como já visto em teoria de análise dimensional, o número de Reynolds, Re, deve ser interpretado como uma relação entre intensidades de forças de inerciais e forças viscosas. Na sua definição utiliza-se uma dimensão *comprimento* como sendo o chamado comprimento característico. Para escoamentos internos este comprimento é o chamado diâmetro hidráulico, D_h, dado por:

$$D_h = \frac{4.A_c}{P}$$

onde A_c é a área da seção transversal do duto e P o perímetro <u>molhado</u> desta seção. Para tubos: $A_c = (\pi/4).D^2$ e $P = \pi.D$, o que resulta, portanto, $D_h = D$, onde D é o diâmetro do tubo. Assim,

$$\text{Re} = \frac{\rho.\overline{V}.D_h}{\mu} = \frac{\overline{V}.D_h}{\nu}$$

Número de Reynolds

Introduzindo as definições de vazões volumétrica, Q, e mássica, $\dot{m}$, para tubos:

$$Q = \overline{V}.A_c = \overline{V} \cdot \frac{\pi.D^2}{4} \Rightarrow \overline{V} = \frac{4.Q}{\pi.D^2} \therefore \text{Re} = \frac{4.Q}{\pi.D.\nu}$$

$$\dot{m} = \rho.\overline{V}.A_c = \rho.\overline{V} \cdot \frac{\pi.D^2}{4} \Rightarrow \overline{V} = \frac{4.\dot{m}}{\rho.\pi.D^2} \therefore \text{Re} = \frac{4.\dot{m}}{\pi.D.\mu}$$

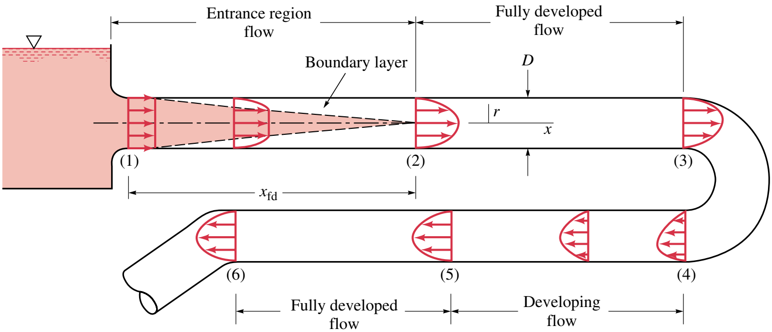
Classificação dos regimes de escoamento em função do número de Reynolds:

- Escoamento **laminar**: $\text{Re} < 2100$;
- Escoamento de **transição**: $2100 < \text{Re} < 4000$;
- Escoamento **turbulento**: $\text{Re} > 4000$;

Na prática adota-se escoamento turbulento para $\text{Re} > 2100$.

Região de Entrada e Escoamento Plenamente Desenvolvido

Num tubo, comprimento de entrada é distância necessária para que $V(x,r)$ deixe de ser função de x e passe a ser apenas função de r: $V(r)$.

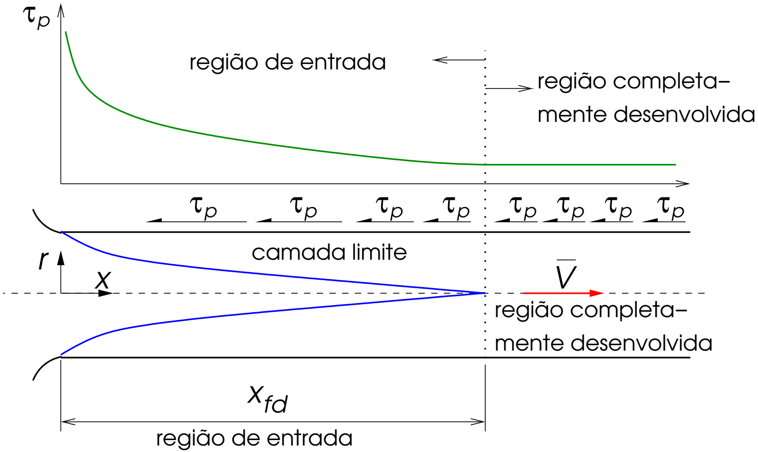


$$x_{fd} = 0,06.D.\text{Re} \text{ (escoamento laminar)}$$

$$x_{fd} = 4,4.D.\text{Re}^{1/6} \text{ (escoamento turbulento)}$$

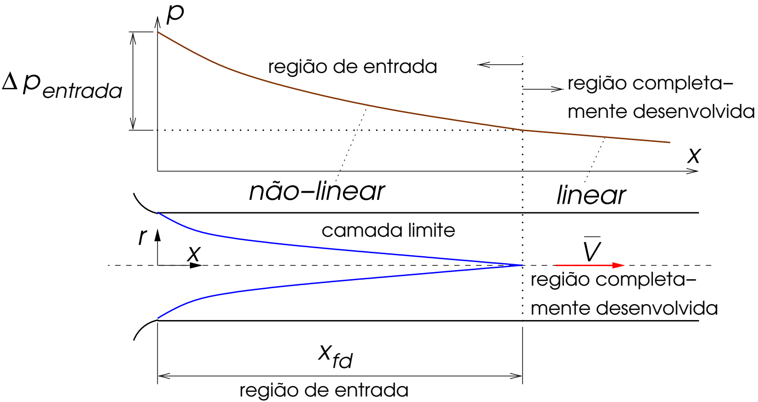
Tensão de Cisalhamento e Pressão

Variação da tensão de cisalhamento na parede na direção do escoamento de um tubo para as regiões de entrada e de escoamento completamente desenvolvido.

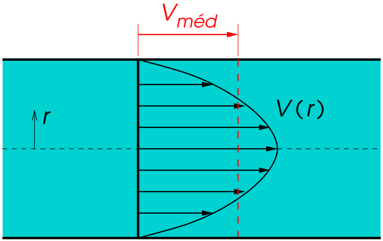


Tensão de Cisalhamento e Pressão

Variação da pressão do escoamento de um tubo para as regiões de entrada e de escoamento completamente desenvolvido.



Escoamento Interno: Conceito de Velocidade Média

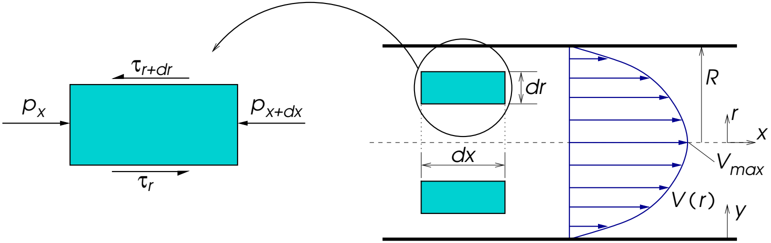


Devido à condição de não-escorregamento (aderência) a velocidade do fluido em contato com as paredes do duto é zero. Na linha de centro é máxima. Em escoamentos internos é conveniente utilizar o conceito de **velocidade média**, V_{med} ou $\overline{V}$, para utilizar, o conceito de escoamento uniforme numa seção.

$$\dot{m} = \rho.\overline{V}.A_c = \int_{A_c} \rho.V(r).dA_c$$

$$\overline{V} = \frac{\int_{A_c} \rho.V(r).dA_c}{\rho.A_c} = \frac{\int_0^R \rho.V(r).2.\pi.r.dr}{\rho.\pi.R^2} \therefore \overline{V} = \frac{2}{R^2} \cdot \int_0^R V(r).r.dr$$

O desenvolvimento que se segue é válido para escoamentos laminares (Re < 2100), em regime permanente, completamente desenvolvido.



Balanço de forças para regime permanente ($\vec{a} = 0$):

$$(2.\pi.r.dr.p)_x - (2.\pi.r.dr.p)_{x+dx} + (2.\pi.r.dx.\tau)_r - (2.\pi.r.dx.\tau)_{r+dr} = 0$$

Escoamento Laminar Plenamente Desenvolvido

Dividindo por $2.\pi.dr.dx$, resulta:

$$r \cdot \frac{p_{x+dx} - p_x}{dx} + \frac{(r.\tau)_{r+dr} - (r.\tau)_r}{dr} = 0$$

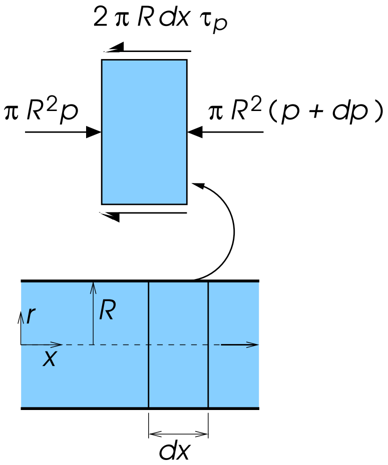
No limite, quando $dx \to 0$ e $dr \to 0$:

$$r \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{d(r.\tau)}{dr} = 0$$

Acrescentanto, agora, a hipótese de que o fluido é newtoniano (o que é verdade para grande maioria dos fluidos), então $\tau = -\mu.(dV/dr)$. Além disso, para $\mu = constante$, resulta:

$$\frac{\mu}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dV}{dr}\right) = \frac{dp}{dx} \tag{1}$$

OBS: $dV/dr = -dV/dy$, uma vez que $y = R - r$.



A igualdade da Eq. (1) só pode ser mantida se ambos os lados forem iguais à mesma constante. Isso pode ser verificado no balanço de forças da figura ao lado:

$$\pi.R^2.p - \pi.R^2.(p + dp) - 2.\pi.R.dx.\tau_p = 0$$

Que, simplificando, resulta em:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2.\tau_p}{R} = Cte \qquad (2)$$

Portanto, uma vez que se determinou que $dp/dx = Cte$, a solução da Eq. (1) é:

$$V(r) = \frac{1}{4.\mu} \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right) + C_1.\ln r + C_2 \qquad (3)$$

Escoamento Laminar Plenamente Desenvolvido

As condições de contorno para solução da Eq. (3) são: (a) $dV/dr = 0$ em $r = 0$ (por razões de simetria); e (b) $V = 0$ em $r = R$ (pela condição de não-escorregamento). Assim,

$$V(r) = -\frac{R^2}{4.\mu} \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{4}$$

Aplicando o conceito de velocidade média visto anteriormente, pode-se obter:

$$\overline{V} = -\frac{R^2}{8.\mu} \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right) \tag{5}$$

Combinando as Eqs. (4) e (5), conclui-se que:

$$V(r) = 2 \cdot \overline{V} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{6}$$

Se a velocidade máxima, V_{max}, ocorre para $r = 0$, é fácil deduzir que $V_{max} = 2.\overline{V}$: *A velocidade média para escoamentos laminares completamente desenvolvidos em tubos é a metade da velocidade máxima*.

Escoamento Laminar Plenamente Desenvolvido

Complementando a análise, como $(\partial p/\partial x)$ não é função da coordenada r isto significa que $2.\tau/r$ também deve ser independente de r [Cf. Eq. (2)], o que sugere que $\tau = C.r$.

As condições de contorno para a distribuição de τ são: (1) para $r = 0 \Rightarrow \tau = 0$; e (2) para $r = R \Rightarrow \tau = \tau_p = \tau_{max}$. Portanto,

$$\tau(r) = \frac{\tau_p}{R} \cdot r \tag{7}$$

Nas equações anteriores, onde aparece o termo $(\partial p/\partial x)$, pode-se substituir por $\Delta p/L$, uma vez que se $(\partial p/\partial x)$ é constante e equivale ao coeficiente angular da reta $p(x)$ então, para a região completamente desenvolvida, $\Delta p/L$ já dá o valor desejado para $(\partial p/\partial x)$.

Perda de Carga em Escoamentos Laminares

Designando por p_1 a pressão numa posição genérica x_1 de um tubo e de p_2 a pressão em outra posição genérica x_2 tal que $x_2 = x_1 + L$ sendo L a distância entre x_1 e x_2, a queda de pressão entre esses pontos é dada por:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{L}$$

Observe que $dp/dx < 0$. Substituindo este resultado na Eq. (5), obtém-se:

$$\Delta p_L = \frac{8.\mu.L.\overline{V}}{R^2} = \frac{32.\mu.L.\overline{V}}{D^2} \tag{8}$$

onde, excepcionalmente para este caso, $\Delta p_L = p_1 - p_2$, para contornar o fato de que $p_2 - p_1$ seria negativo!

Perda de Carga em Escoamentos Laminares

Uma outra maneira de se expressar a queda de pressão numa distância L de tubos é (resultado de análise dimensional):

$$\Delta p_L = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho.\overline{V}^2}{2} \tag{9}$$

onde f é conhecido como **fator de atrito de Darcy, ou de Darcy-Weisbach**, dado por:

$$f = \frac{8.\tau_p}{\rho.\overline{V}^2} \tag{10}$$

Combinando as Eqs. (8) e (9), obtém-se uma importante relação para escoamentos laminares em tubos:

$$f = \frac{64.\mu}{\rho.\overline{V}.D} = \frac{64}{Re} \tag{11}$$

Perda de Carga em Escoamentos Laminares

OBS: além do fator de atrito de Darcy, f, existe o chamado coeficiente de atrito de Fanning, C_f. A relção entre os dois é:

$$C_f = \frac{2.\tau_p}{\rho.\overline{V}^2} = \frac{f}{4}$$

A queda de pressão, Δp_L pode ser convertida em perda de carga, h_L, pela relação manométrica $\Delta p_L = \rho.g.h_L$. Assim:

$$h_L = \frac{\Delta p_L}{\rho.g} = f \cdot \frac{L}{D}.\frac{\overline{V}^2}{2.g} \tag{12}$$

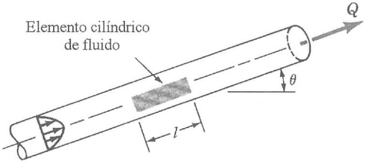
Finalmente, combinando a Eq. (8) com a definição de vazão volumétrica, $Q = \overline{V}.A_c$, obtém-se:

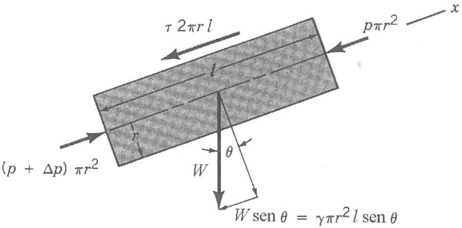
$$Q = \frac{\Delta p_L.\pi.D^4}{128.\mu.L} \tag{13}$$

Conhecida como **Lei de Poiseuille**.

Escoamento Laminar em Dutos Inclinados

Caso o tubo seja inclinado (ver figura) o ajuste a ser feito é bastante simples: onde há Δp_L, substitui-se por $\Delta p_L - \gamma.L.\text{sen}\theta$, sendo $\theta > 0$ para escoamento ascendente ou $\theta < 0$ para escoamento descendente. Outro modo é usar o termo $\Delta p_L - \gamma.L.\text{sen}\theta$ mas usar o ângulo θ medido a partir da direção Ox positiva no sentido anti-horário. Neste segundo caso não há necessidade de se preocupar com o sinal de θ.





Escoamento Laminar em Dutos Inclinados

As principais equações para o caso do tubo inclinado são:

$$\frac{\Delta p_L - \gamma.L.\text{sen}\theta}{L} = \frac{2.\tau}{r} = \frac{2.\tau_p}{R} \tag{14}$$

$$\overline{V} = \frac{(\Delta p_L - \gamma.L.\text{sen}\theta).D^2}{32.\mu.L} \tag{15}$$

$$Q = \frac{(\Delta p_L - \gamma.L.\text{sen}\theta).\pi.D^4}{128.\mu.L} \tag{16}$$

Considerações Sobre Energia

A Equação da Energia é dada por:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \cdot \frac{\overline{V}_1^2}{2.g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \cdot \frac{\overline{V}_2^2}{2.g} + z_2 + h_L \therefore H_1 = H_2 + h_L \tag{17}$$

onde $\alpha = 1$ para perfis de velocidade uniformes e $\alpha > 1$ para perfis não uniformes. Para escoamentos ideais (invíscidos) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $h_L = 0$ (equação de Bernoulli). Para escoamentos completamente desenvolvidos $\alpha_1 = \alpha_2$, uma vez que para esta região $V = V(r)$ somente e não mais da coordenada axial. Assim, nos casos onde não há variação da área da seção transversal do tubo os termos $(\alpha.\overline{V}^2)/(2.g)$ são constantes. Voltando à Eq. (17):

$$h_L = \left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2\right) \tag{18}$$

Considerações Sobre Energia

Analisando a Eq. (18) o que se conclui é que a energia dissipada pelas forças viscosas é dada pelo consumo da energia mecânica (pressão mais gravidade).

Finalmente, uma vez que,

$$\frac{\Delta p_L}{L} = \frac{2.\tau}{r} \Rightarrow \frac{\gamma.h_L}{L} = \frac{2.\tau}{r}$$

já considerando $\Delta p_L = p_1 - p_2 > 0$. Introduzindo a perda de carga:

$$h_L = \frac{2.\tau.L}{\gamma.r} \text{ ou } h_L = \frac{4.\tau_p.L}{\gamma.D} \tag{19}$$

Ou seja, o elemento responsável pela perda de carga é a tensão de cisalhamento na parede.

Exercício de Aula 1

Enunciado: O escoamento de água num tubo de 3 mm de diâmetro deve permanecer laminar. Construa um gráfico da vazão máxima permitida em função da temperatura para $0 < T < 100\ ^{\circ}$C. [Munson, 8.3, 4a Edição]

Exercício de Aula 2

Enunciado: O gradiente de pressão necessário para forçar água a escoar num tubo horizontal com 25,4 mm de diâmetro é 1,13 kPa/m. Determine a tensão de cisalhamento na parede do tubo. Calcule, também, a tensão de cisalhamento a 7,6 e 12,7 mm da parede do tubo. Considere escoamento laminar completamente desenvolvido. [Munson, 8.9, 4a Edição]

Exercício de Aula 3

Enunciado: Refaça o exercício 2 considerando que o tubo apresenta uma inclinação de 20 °C. O escoamento é para cima ou para baixo? Justifique sua resposta. [Munson, 8.10, 4a Edição]

Exercício de Aula 4

Enunciado: Um fluido, massa específica e viscosidade dinâmica iguais a 1000 kg/m^3 e 0,3 N.s/m^2, respectivamente, escoa em regime permanente num tubo vertical que apresenta diâmetro e altura iguais a 0,1 m e 10 m, respectivamente. O escoamento é para baixo e o fluido é descarregado do tubo como um jato livre. Determine a máxima pressão na seção de alimentação do tubo para que o escoamento permaneça laminar ao longo do tubo. [Munson, 8.15, 4a Edição]

Exercício de Aula 5

Enunciado: Glicerina a 20 $^\circ$C escoa para cima num tubo (diâmetro = 75 mm). A velocidade na linha de centro do tubo é igual a 1,0 m/s. Determine a perda de carga e a queda de pressão sabendo que o comprimento do tubo é igual a 10 m. [Munson, 8.17, 4a Edição]

Exercício de Aula 6

Enunciado: Óleo (densidade = 0,87; e $\nu = 2,2 \times 10^{-4}$ m^2/s) escoa no tubo vertical mostrado na figura ao lado. A vazão do óleo é 4×10^{-4} m^3/s. Determine a leitura do manômetro, *h*. Refaça o exercício considerado, agora, que o escoamento é ascendente. [Munson, Ex. 8.22 e 8.23, 4a Edição]