Estática dos Fluidos

PME 3230 - Mecânica dos Fluidos I

PME/EP/USP

Prof. Antonio Luiz Pacífico

2° Semestre de 2016

Conteúdo da Aula

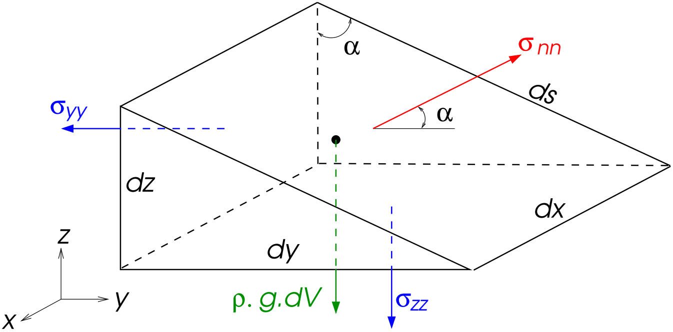
Introdução

Uma vez que um fluido é definido como sendo um meio material incapaz de resistir a qualquer valor de tensão de cisalhamento, segue-se que para um fluido em repouso (estático) somente tensões normais podem estar presentes.

A pressão que se encontra num fluido em repouso tem muitas aplicações práticas que vão desde cálculos de forças sobre objetos submersos, instrumentação para medição de pressão até dedução de propriedades associadas à atmosfera e aos oceanos. Os mesmos princípios poderão ser utilizados para determinar forças envolvidas em sistemas hidráulicos, como prensas, freios de automóveis, etc.

Conceito de Pressão

Parte-se de uma situação generalizada: um fluido perfeito (não estão presentes tensões de cisalhamento) escoando pode ser analisado por meio de um elemento de fluido de forma arbitrária, como ilustrado na figura abaixo.



Conceito de Pressão

Aplicando a 2^a Lei de Newton nas direções z e y:

Direção z:

$$dF_z = dF_{zz} + dF_n + dF_m = dm.a_z$$

onde dF_{zz} é devida à σ_{zz}; dF_n é devida a σ_{nn}; e dF_m é devida à massa (força peso).

$$-\sigma_{zz}.dx.dy + \sigma_{nn}.ds.dx.\text{sen}\alpha - \rho.g.dV = \rho.dV.a_z$$

Uma vez que $dV = [(dy.dz)/2].dx$ e $\text{sen}\alpha = dy/ds$, segue-se que:

$$-\sigma_{zz}.dx.dy + \sigma_{nn}\cdot ds\cdot dx\cdot\frac{dy}{ds} - \rho\cdot g\cdot\frac{dx.dy.dz}{2} = \rho.\frac{dx.dy.dz}{2}.a_z$$

Dividindo por $dx.dy$ e rearranjando,

$$\sigma_{nn} = \sigma_{zz} + \rho\cdot g\cdot\frac{dz}{2} + \rho\cdot\frac{dz}{2}\cdot a_z = \sigma_{zz} + \rho\cdot\frac{dz}{2}\cdot(g + a_z)$$

como dz é infinitesimalmente pequeno, segue-se que

$$\sigma_{nn} = \sigma_{zz}$$

Conceito de Pressão

Direção y:

$$-\sigma_{yy}.dx.dz + \sigma_{nn}.ds.dx.\cos\alpha = \rho.dV.a_y$$

Uma vez que $dV = [(dy.dz)/2].dx$ e $\cos\alpha = dz/ds$, segue-se que:

$$-\sigma_{yy}.dx.dz + \sigma_{nn} \cdot ds \cdot dx \cdot \frac{dz}{ds} = \rho.\frac{dx.dy.dz}{2}.a_y$$

Dividindo por $dx.dz$ e rearranjando,

$$\sigma_{nn} = \sigma_{yy} + \rho \cdot \frac{dy}{2} \cdot a_y$$

como dy é infinitesimalmente pequeno, segue-se que

$$\sigma_{nn} = \sigma_{yy}$$

Analogamente, para a direção x, a mesma conclusão seria obtida: $\sigma_{nn} = \sigma_{xx}$.

Assim, para o escoamento de fluido perfeito (invíscido), a tensão normal em um ponto é a mesma em todas as direções. Ela é, portanto, uma grandeza escalar.

A tensão normal em um escoamento de fluido perfeito é igual à *pressão termodinâmica* com sinal contrário: $\sigma_{nn} = -p$

Para a situação do fluido em repouso, $a_z = a_y = 0$ e os resultados obtidos continuam válidos: $\sigma_{zz} = \sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \sigma_{nn} = -p$.

Há dois modos de interpretar a propriedade pressão: (1) escala microscópica onde cada molécula é considerada individualmente; ou (2) escala macroscópica onde é o conjunto de moléculas que determina o comportamento médio do meio contínuo.

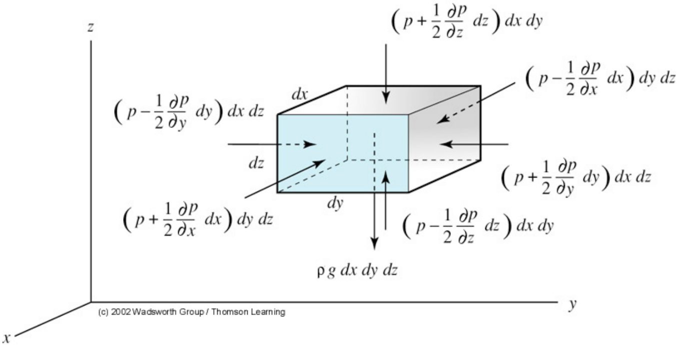
Conceito de Pressão

Do ponto de vista microscópico, o fluido é composto por um grande número de moléculas movendo-se de forma randômica e, frequentemente, colidindo-se umas contra as outras e contra as paredes do reservatório que as contém. Durante estas colisões há mudança de velocidade das partículas e, consequentemente, mudança de quantidade de movimento. Assim, a pressão num fluido (segundo este ponto de vista) é uma medida a quantidade de movimento linear médio do moléculas no fluido.

Do ponto de vista macroscópico a pressão de fluido é uma variável (propriedade) de estado, como a temperatura e a massa específica, e a mudança da propriedade pressão durante um processo é governada pelas leis da termodinâmica.

A Equação Básica de Estática dos Fluidos

Considere o elemento de fluido em repouso mostrado na figura abaixo.



Para este elemento, a força de campo (peso, associada ao campo gravitacional) é dada por:

$$d\vec{F}_c = \vec{g}.dm = \vec{g}.\rho.dV = \vec{g}.\rho.dx.dy.dz$$

A Equação Básica de Estática dos Fluidos

A força de superfície resultante (devida à pressão atuante nas faces do elemento) pode ser escrita por:

$$
\begin{aligned}
d\vec{F}_s = \; & \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\right) \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\right) \cdot dy \cdot dz\right] \cdot \vec{i} \\
& \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}\right) \cdot dx \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}\right) \cdot dx \cdot dz\right] \cdot \vec{j} \\
& \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2}\right) \cdot dx \cdot dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2}\right) \cdot dx \cdot dy\right] \cdot \vec{k}
\end{aligned}
$$

$$
d\vec{F}_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{k}\right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz
$$

$$
\therefore d\vec{F}_s = -\vec{\nabla} p.dx.dy.dz
$$

A Equação Básica de Estática dos Fluidos

A força resultante sobre o elemento será a soma da força de campo e de superfície:

$$d\vec{F}_R = d\vec{F}_c + d\vec{F}_s = \left(-\vec{\nabla}p + \rho.\vec{g}\right).dx.dy.dz = \left(-\vec{\nabla}p + \rho.\vec{g}\right).dV$$

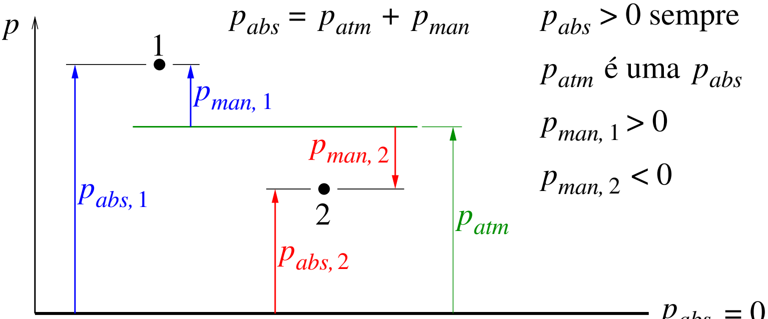
$$\frac{d\vec{F}_R}{dV} = -\vec{\nabla}p + \rho.\vec{g}$$

Para o fluido em repouso esta força resultante deve ser nula. Conclui-se, portanto, que:

$$-\vec{\nabla}p + \rho.\vec{g} = 0$$

Como a aceleração da gravidade só atua em uma direção, no caso do elemento ilustrado na direção do eixo Oz ($g_z = -g$), segue-se que a equação vetorial acima acima, decomposta, resulta em:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \; ; \; \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \; ; \text{ e } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho.g = -\gamma$$



$p_{abs} > 0$ sempre

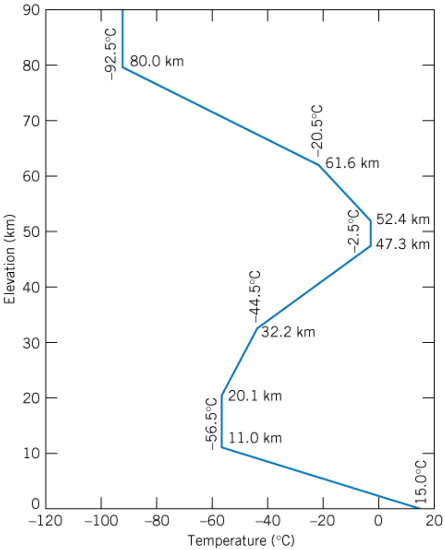
p_{atm} é uma p_{abs}

$p_{man,\,1} > 0$

$p_{man,\,2} < 0$

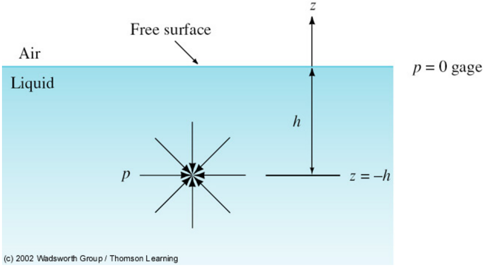
Subscritos: *abs* $\equiv$ absoluta; *man* $\equiv$ manométrica; *atm* $\equiv$ atmosférica.

Atmosfera Padrão



Em aviação o estabelecimento de uma atmosfera (fictícia) padrão é importante para que se tenha um padrão de comparação e de referência. Um dos padrões utilizados é a atmosfera padrão americana, ilustrada na figura ao lado. É importante salientar que esta atmosfera não é real, mas é uma tentativa de reprodução da atmosfera real dentro de certos limites observáveis de correlação com esta. Na atmosfera padrão americana, ao nível do mar, tem-se: 15 °C; 101,3 kPa; 1,225 kg/m^3; e $1,789 \times 10^{-5}$ Pa.s.

Variação da Pressão em Um Fluido Estático



Tomando a equação deduzida anteriormente:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho . g = -\gamma$$

e integrando-a dentro dos limites (ver figura ao lado) estabelecidos, para um fluido incompressível, resulta:

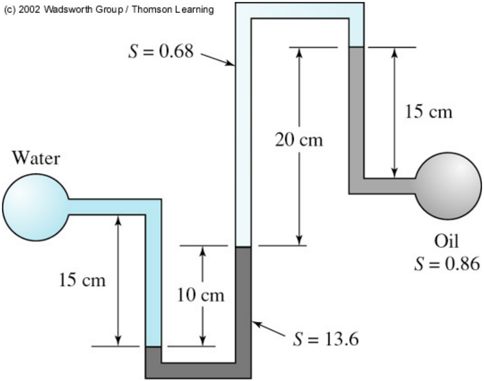
$$\int_{p(z)}^{p_0} dp = -\gamma \cdot \int_{z=-h}^{0} dz$$

$$p_0 - p(z) = -\gamma . [0 - (-h)]$$

$$p(z) = p_0 + \gamma . h = p_0 + \rho . g . h$$

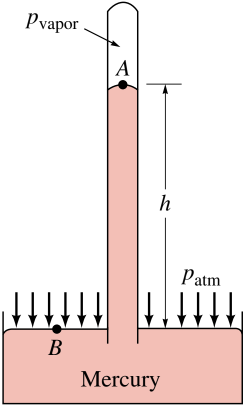
Lei de Stevin

Variação da Pressão em Um Fluido Estático



Princípio dos vasos comunicantes: A pressão é igual num mesmo fluido compressível em repouso, na mesma cota, sem solução de continuidade.

Medição da Pressão Atmosférica



Inicialmente em vácuo $(p_{abs} \approx 0)$ o tubo é mergulhado num recipiente com mercúrio. A pressão atmosférica atuante na superfície do recipinete empurra a coluna de mercúrio para cima. No equilíbrio a pressão atmosférica suporta a coluna de mercúrio. A altura da coluna é uma indicação da pressão atmosférica local. O mercúrio é muito utilizado em barômetros, uma vez que a sua pressão de vapor é baixíssima. Assim, independente da temperatura ambiente, a contra-pressão que o vapor de mércurio faz no sentido de empurrar a coluna de mercúrio para baixo é insignificante e pode ser desprezada: $p_{atm} = p_{vapor} + \gamma.h = \gamma.h$

Variação da Pressão na Atmosfera Padrão Americana

Gases, por serem compressíveis, apresentarão variação da sua massa específica com a variação da pressão. Como a pressão num meio fluido estático varia com a altura, segue-se que para gases haverá variação da sua massa específica com a altura. Considerando ar atmosférico como gás ideal:

$$dp = -\rho.g.dz = -\frac{p.g}{R.T} \cdot dz = -\frac{p.g}{R.(T_0 - m.z)} \cdot dz$$

onde $T = T_0 - m.z$ é um modelo de variação de T com a altura z nos primeiros 11 km da atmosfera padrão americana. O símbolo m é a razão de decremento de $T(z)$ [coeficiente angular da reta $T = f(z)$]. Procedendo à integração desde $p = p_0$ em $z = 0$ até uma pressão p e altura z genéricos, obtém-se:

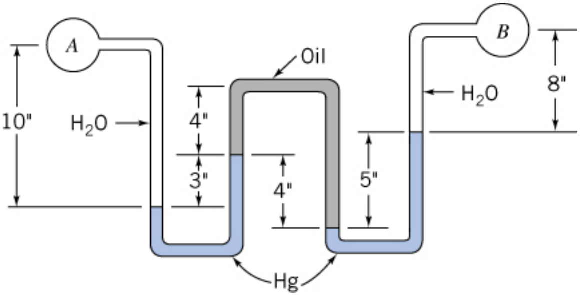
$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_0^z \frac{g}{R.(T_0 - m.z)} \cdot dz$$

O resultado é:

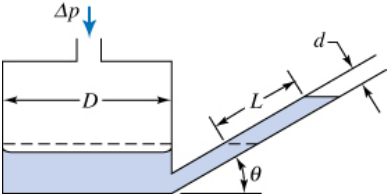
$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{m.z}{T_0}\right)^{g/m.R} = p_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/m.R}$$

Exercício de Aula 1

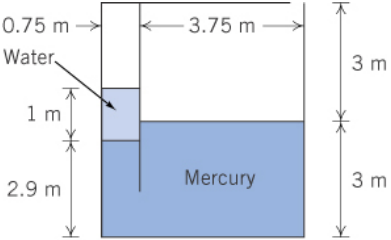
Enunciado: Água escoa no interior dos tubos *A* e *B*. Óleo lubrificante ($SG = 0,88$) está na parte superior do tubo em **U** invertido. Mercúrio ($SG = 13,6$) está na parte inferior dos dois tubos em **U**. Determine a diferença de pressão, $p_A - p_B$, em kPa. [Fox, McDonald e Pritchard, Ex. 3.3, 6a Edição]



Enunciado: Um manômetro de reservatório com tubo inclinado é construído como mostrado na figura abaixo. Analise o manômetro para obter uma expressão geral para a deflexão do líquido, L, no tubo inclinado, em termos da diferença de pressão aplicada, Δp. Obtenha, também, uma expressão geral para a sensibilidade do manômetro. [Fox, McDonald e Pritchard, Ex. 3.2, 6a Edição]

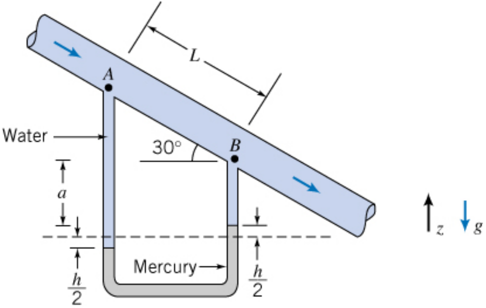


Enunciado: Um tanque repartido contém água e mercúrio ($SG = 13,6$) conforme mostrado na figura. Qual é a pressão manométrica do ar preso na câmara esquerda? A que pressão deveria o ar da câmara esquerda ser comprimido de modo a levar a superfície da água para o mesmo nível da superfície livre na câmara direita? [Fox, McDonald e Pritchard, 3.15, 6a Edição]

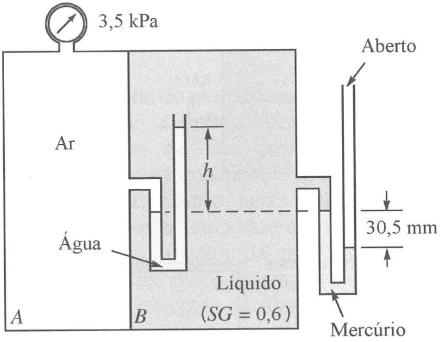


Exercício de Aula 4

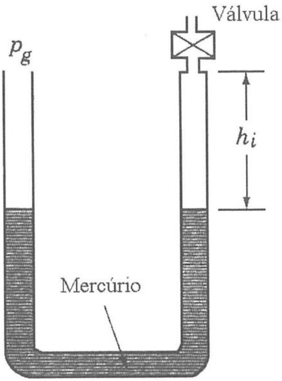
Enunciado: Água flui para baixo ao longo de um tubo inclinado de 30° em relação à horizontal conforme mostrado na figura. A diferença de pressão $p_A - p_B$ é causada parcialmente pela gravidade e parcialmente pelo atrito. Obtenha uma expressão algébrica para a diferença de pressão citada. Calcule esta diferença se $L = 5$ pés e $h = 6''$. [Fox, McDonald e Pritchard, 3.24, 6a Edição]



Enunciado: Os compartimentos *A* e *B* do reservatório mostrado na figura abaixo contém ar e um líquido que apresenta densidade igual a 0,6. Determine a altura *h* indicada no manômetro sabendo que a pressão atmosférica vale 101,3 kPa. Observe que o manômetro instalado no compartimento *A* indica que a pressão no ar é igual a 3,5 kPa. [Munson, 2.33 , 4a Edição]



Exercício de Aula 6



Enunciado: As duas extermidades do manômetro de mercúrio em **U** mostrado na figura ao lado estão inicialmente abertas para a atmosfera e sob a ação da atmosfera padrão. Quando a válvula no topo da perna direita é aberta o nível de mercúrio abaixa h_i. Após isto, a válvula é fechada e ar comprimido é aplicado na perna esquerda do manômetro. Determine a relação entre a leitura diferencial do manômetro e a pressão aplicada na perna esquerda do manômetro, p_g. Mostre, num gráfico, como a leitura diferencial varia com p_g para $h_i = 25$, 50, 75 e 100 mm e na faixa $0 \leqslant p_g \leqslant 300$ kPa. Admita que a temperatura do ar aprisionado no manômetro permanece constante. [Munson, 2.39 , 4a Edição]