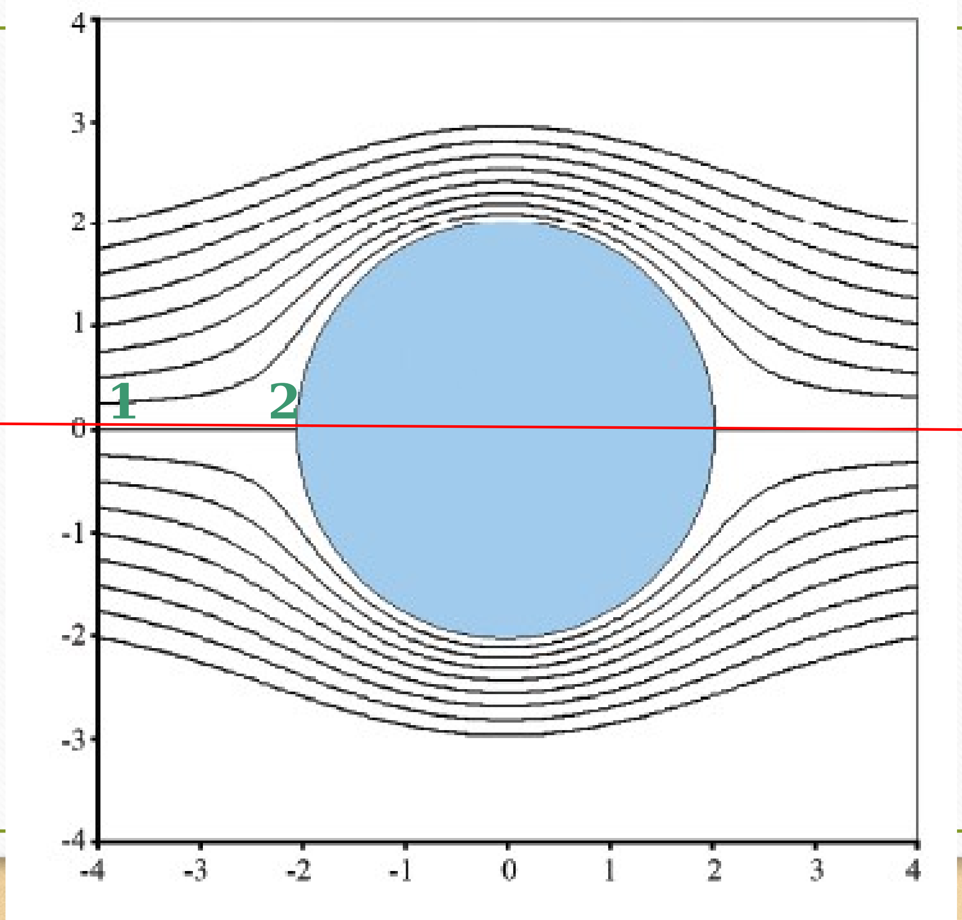
Fenômeno de Transporte

Aula 06

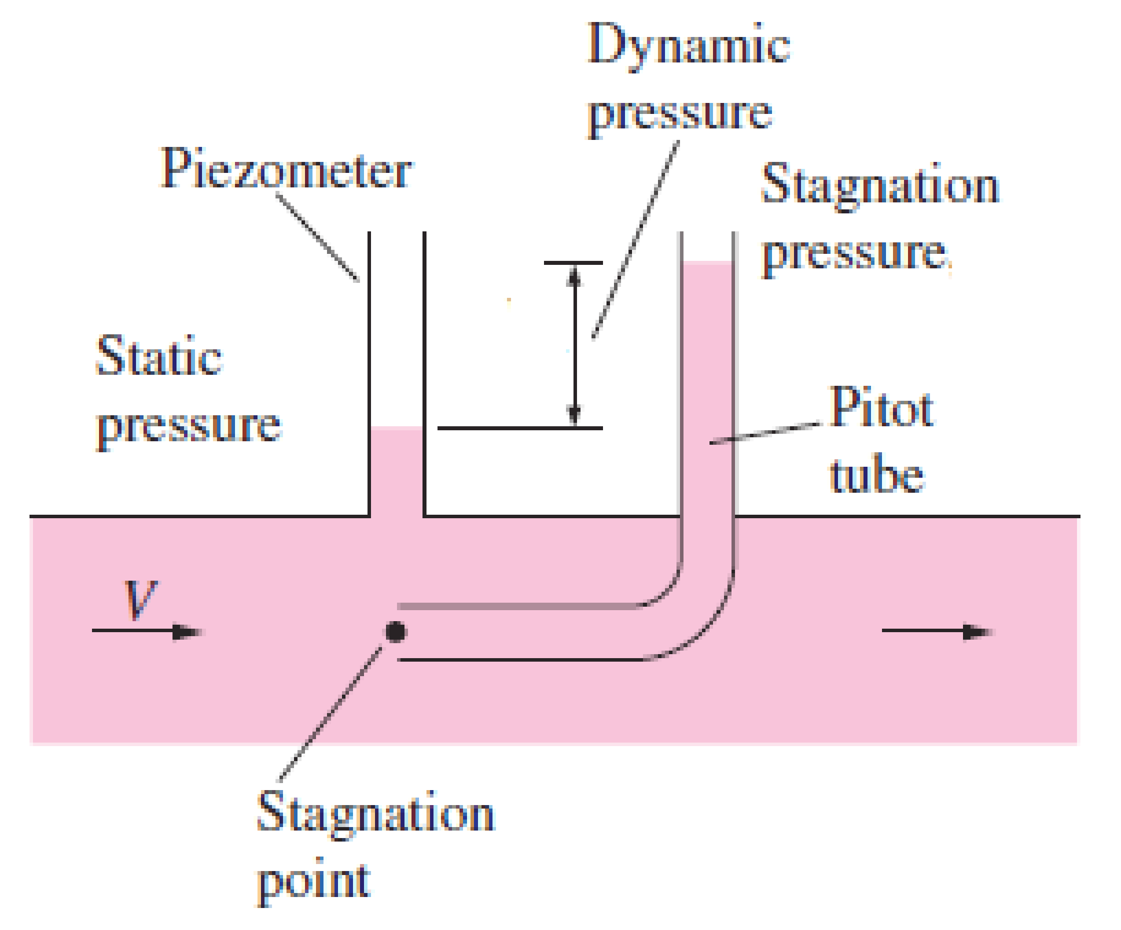
Objetivos

- Outras aplicações da equação de Bernoulli.
- Exemplos.
- Quantidade de movimento.
- Exercícios.

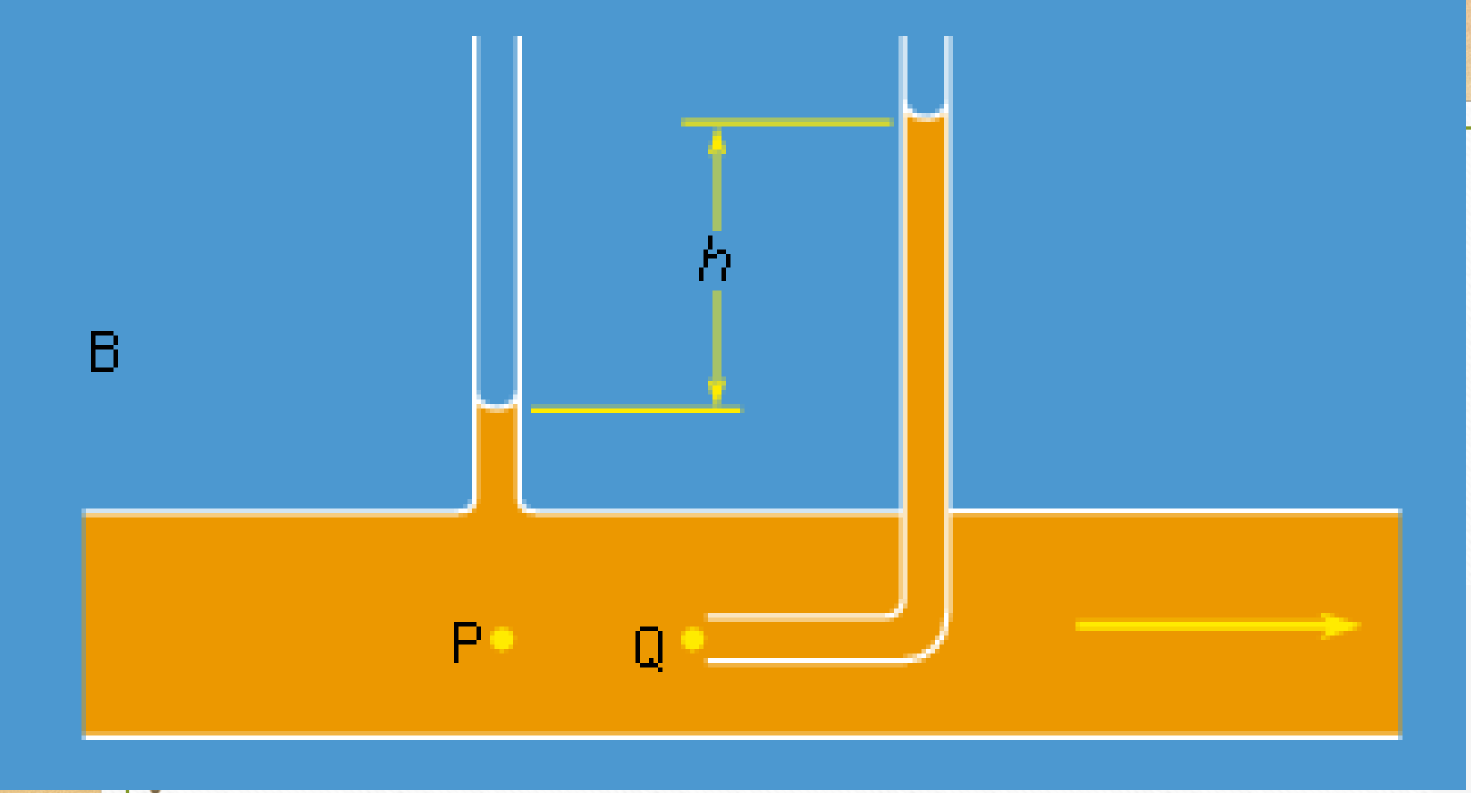
Pressão de estagnação e dinâmica



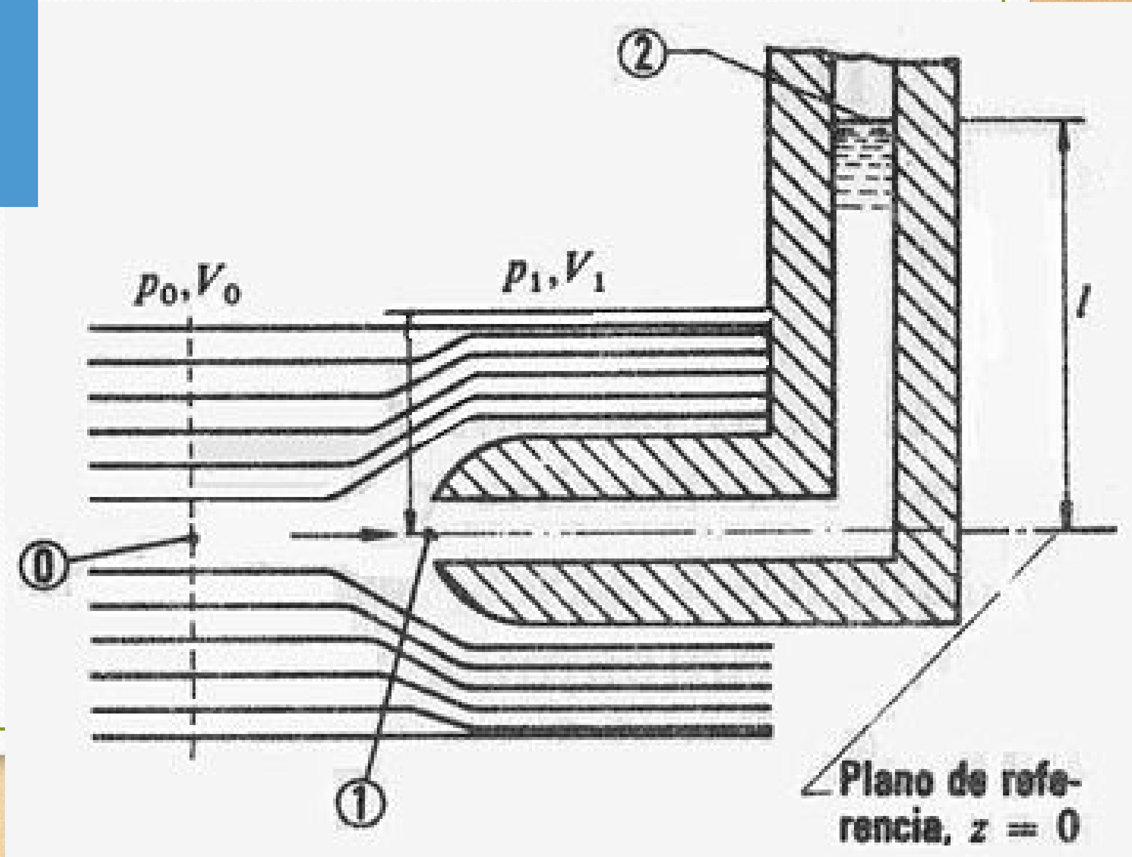
Determinação da velocidade em função da pressão



Tubo de Pilot utilizado em aeronaves

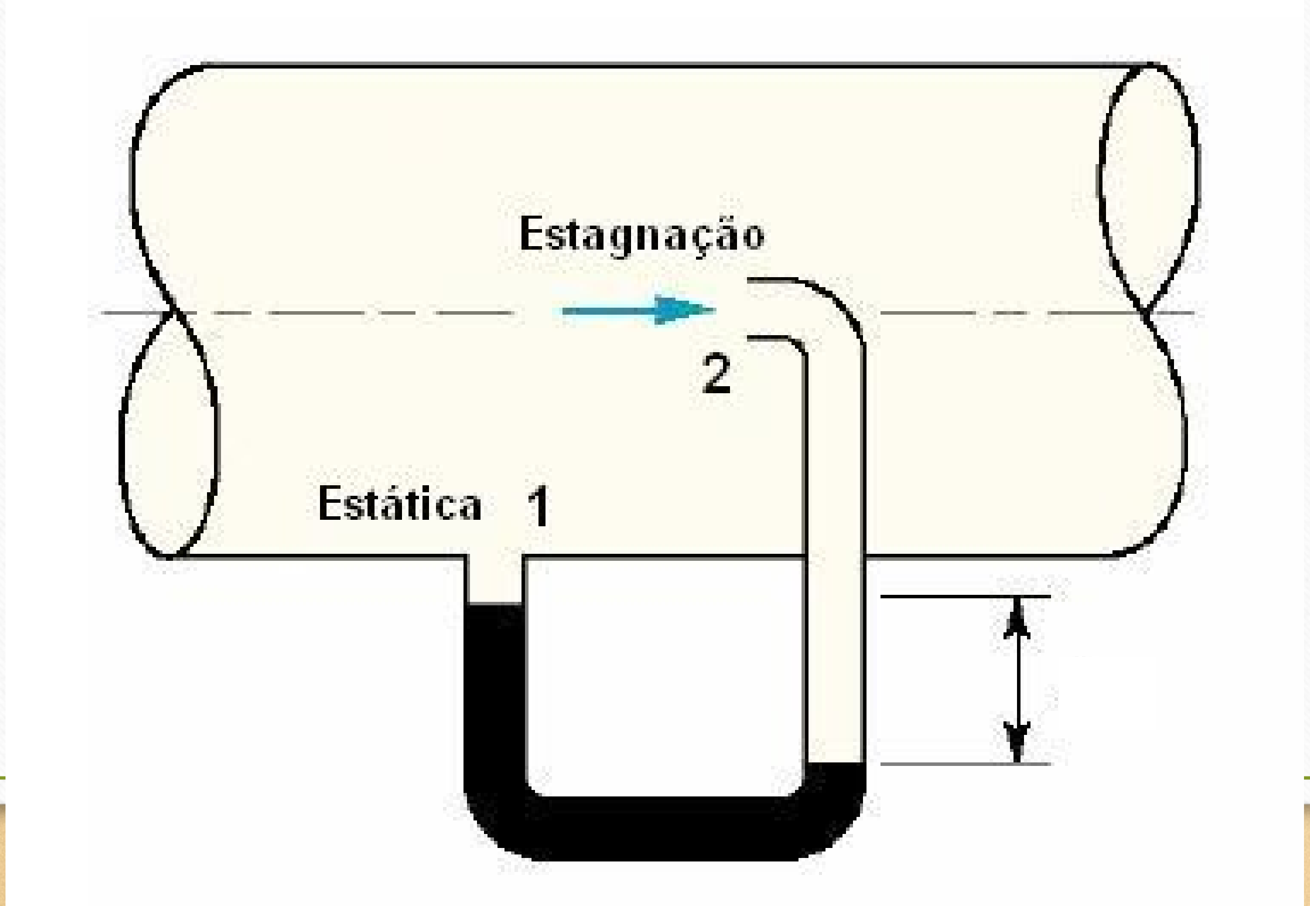


h
B
P
Q

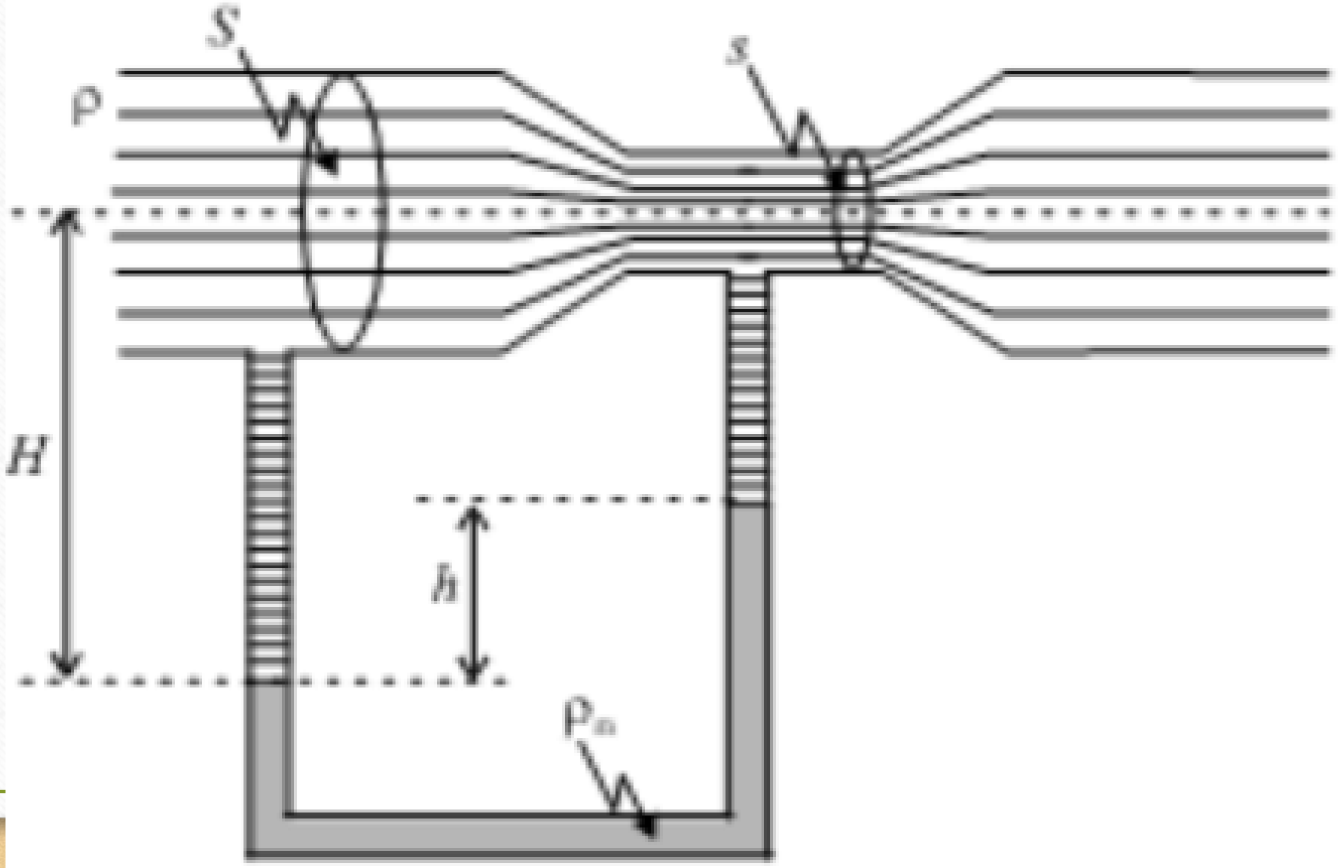


②
p_0, V_0
p_1, V_1
l
⓪
①
Plano de referencia, $z = 0$

Tubo de Pilot estático



Tubo de Venturi e manômetro - exemplo



Equação da quantidade de movimento para regime permanente

Equação da quantidade de movimento

- Segunda lei de Newton modificada funcionalmente para o estudo da mecânica dos fluidos.
- A existência de uma aceleração implica na existência de uma força resultante que a cada instante tem a mesma direção e o sentido da aceleração.
- Para acelerar uma massa é necessário aplicar uma força provocada por algum agente externo, em geral este agente externo é uma superfície sólida em contato com o escoamento.

- Assim, a segunda lei de Newton pode ser expressa como:

$$\sum \vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Sabendo que:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

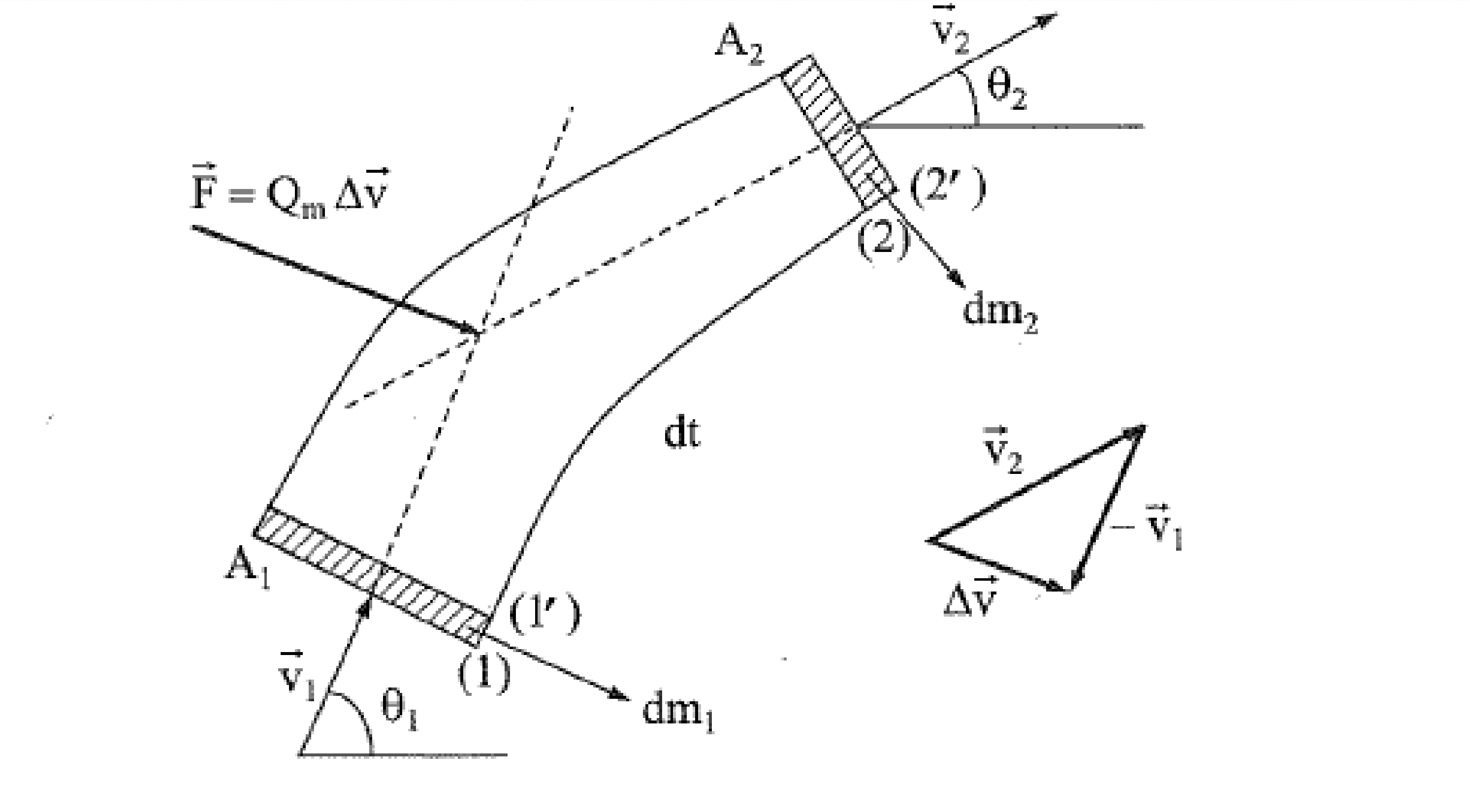
$$\sum \vec{F}_R = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\sum \vec{F}_R = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

“A força resultante que age no sistema em estudo é igual a variação temporal da quantidade de movimento do sistema”

- Inicialmente consideraremos um tubo de corrente em regime permanente.

- Limitamos nosso tubo aos pontos (1) e (2) [Figura 1] para a análise do problema.



A_2
$\vec{v}_2$
θ_2
$\vec{F} = Q_m \Delta\vec{v}$
(2′)
(2)
dm_2
dt
$\vec{v}_2$
$-\vec{v}_1$
$\Delta\vec{v}$
A_1
(1′)
(1)
$\vec{v}_1$
θ_1
dm_1

Figura 1.0

- Sabemos que:

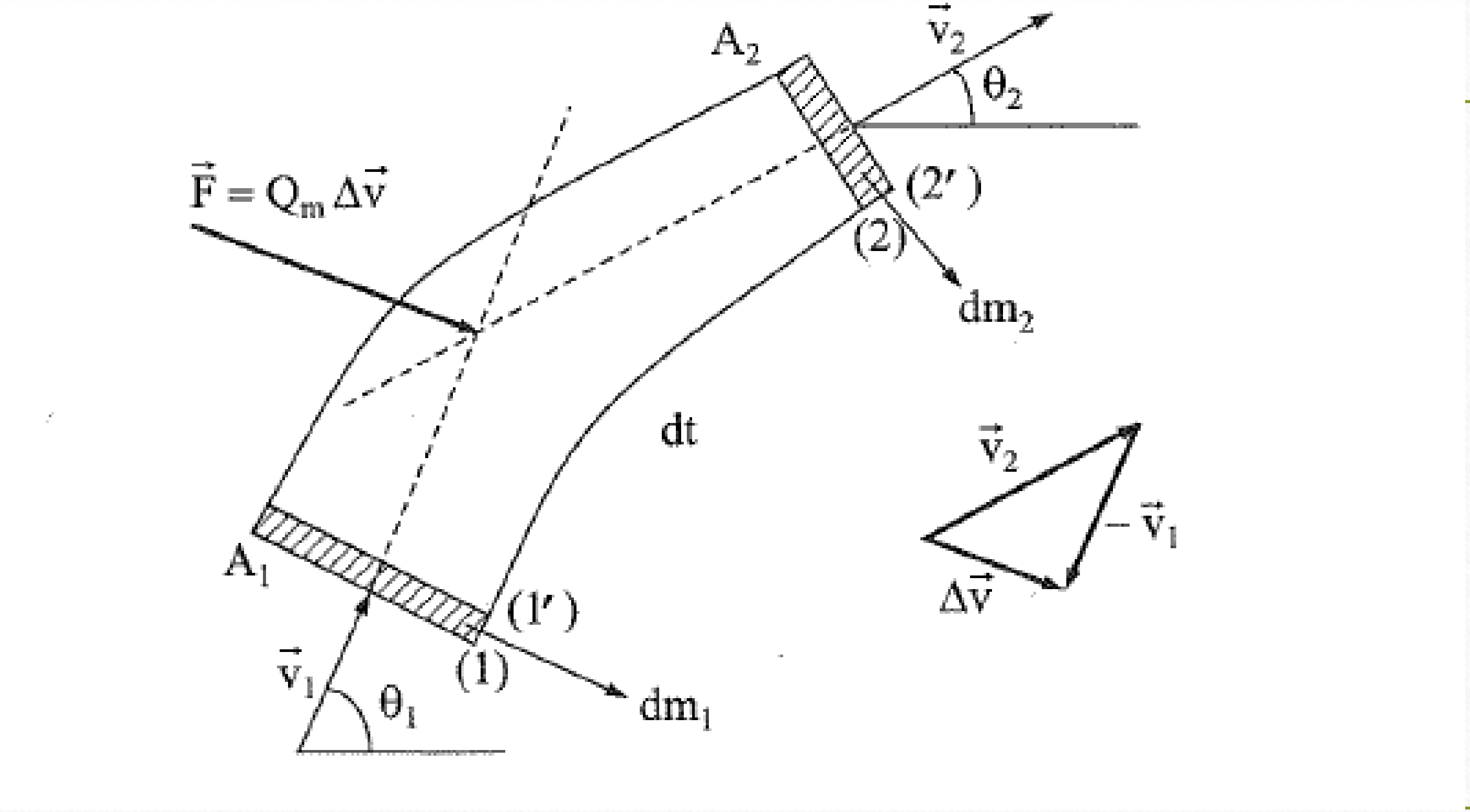
$$I_m = vazão\ de\ massa$$

$$I_m = \frac{dm}{dt}$$

$$\sum \vec{F}_R = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\sum \vec{F}_R = I_m \overrightarrow{\Delta v}$$

- Em um intervalo de tempo *dt*, a massa do fluido que atravessa a seção (1) com uma velocidade $\vec{v}$ será dm_1 provocando um incremento da quantidade de movimento fluido entre as seções (1) e (2).



- Pelo teorema da quantidade de movimento, a força resultante que age no fluido entre as seções (1) e (2) será:

$$\overrightarrow{F_R} = \frac{dm_2\overrightarrow{v_2}}{dt} - \frac{dm_1\overrightarrow{v_1}}{dt}$$

- Ou

$$\overrightarrow{F_R} = I_{m2}\overrightarrow{v_2} - I_{m1}\overrightarrow{v_1}$$

- Como o regime é permanente

$$I_{m2} = I_{m1} = I_m$$

- Portanto:

$$\overrightarrow{F_R} = I_m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})$$

A equação acima mostra que a força tem a direção da variação da velocidade e o ponto de aplicação pode ser encontrado na intersecção das direções de $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_1}$.

Esta equação também pode determinar a força resultante que age no fluido entre (1) e (2).

- O fluido em questão está sujeito a forças de contato normais (de pressão) e tangenciais (tensões de cisalhamento) e a força peso causada pelo campo gravitacional.

- As forças devidas às pressões são respectivamente: p_1A_1 e p_2A_2, em módulo [Figura 2].
- Para determinar os vetores das forças nessas duas seções, adotam-se versores normais a elas, com sentido para fora do tubo de corrente, por convenção.

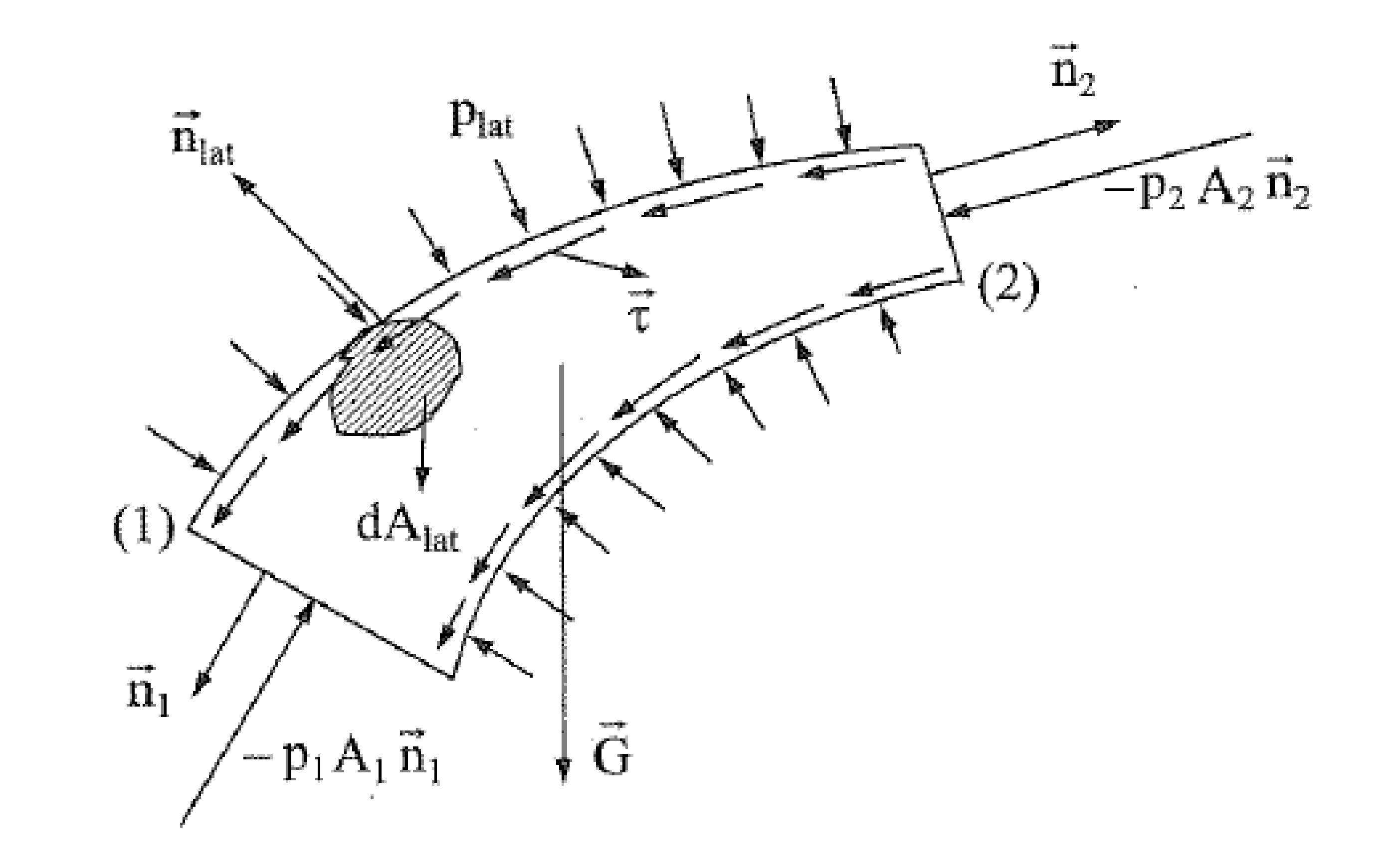
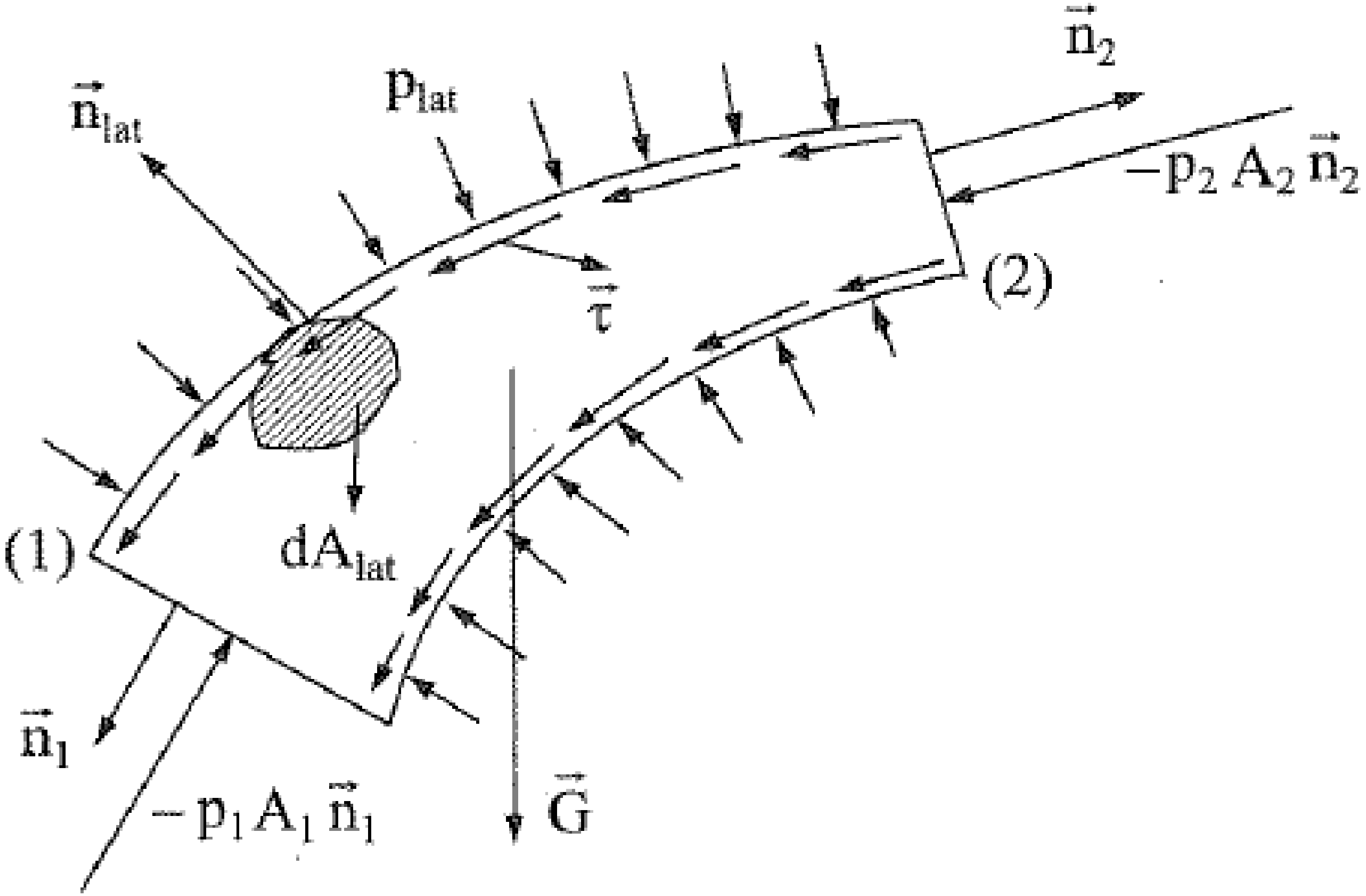


Figura 2

- Desta forma, as forças que agem no fluido nas seções (1) e (2) serão respectivamente:

$$-p_1 A_1 \overrightarrow{n_1} \quad e \quad -p_2\, A_2 \overrightarrow{n_2}$$

- Na superfície lateral , o fluido está sujeito as pressões e também as tensões de cisalhamento devido ao seu movimento em contato com o meio.
- A resultante das pressões pode ser obtida adotando-se em cada ponto uma normal dirigida para fora.



$\vec{n}_2$
p_{lat}
$\vec{n}_{lat}$
$-p_2 A_2 \vec{n}_2$
$\vec{\tau}$
(2)
(1)
dA_{lat}
$\vec{n}_1$
$-p_1 A_1 \vec{n}_1$
$\vec{G}$

$F's$ = Força que a lateral do contudo está fazendo no fluido

- Considerando um elemento de área no entorno de um ponto da superfície lateral terá:

$$d\overrightarrow{F'_S} = -p_{lat} dA_{lat} \vec{n}_{lat} + \vec{\tau}\, dA_{lat}$$

- Logo a força resultante das pressões e tensões de cisalhamento na superfície lateral será:

$$\vec{F'}_s = \int -p_{lat} dA_{lat} \vec{n}_{lat} + \int \vec{\tau}\, dA_{lat}$$

- A força resultante que age no fluido entre (1) e (2) será a soma das componentes.

$$\vec{F}_R = \overrightarrow{F'}_s + (-p_1 A_1 \vec{n}_1) + (-p_2 A_2 \vec{n}_2) + \vec{G}$$

- No entanto vimos que:

$$\sum \vec{F}_R = I_m \overrightarrow{\Delta v}$$

- Assim:

$$I_m\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{F'}_s + (-p_1 A_1 \vec{n}_1) + (-p_2 A_2 \vec{n}_2) + \vec{G}$$

- A equação acima corresponde aos caso em que o fluido está em contato com a superfície sólida na superfície lateral entre (1) e (2). Nestas condições a força $\overrightarrow{F'}_s$ **representaria a força resultante da parede** do conduto no fluido.

$$\overrightarrow{F'}_s = p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + I_m\overrightarrow{\Delta v} - \vec{G}$$

- Na prática o interesse consiste em determinar a força que o fluido aplica na superfície sólida com o qual está em contato entre as seções (1) e (2).
- Como F'_S representa a força resultante da superfície sólida no fluido, então pelo princípio da ação e reação a força que o fluido aplica na superfície será: $-\overrightarrow{F'}_S = \vec{F}_S$.
- Assim:

$$\vec{F}_S = -\left[p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + I_m \overrightarrow{\Delta v}\right] + \vec{G}$$

Método de utilização da equação

- A equação desenvolvida anteriormente não é aplicada normalmente na forma vetorial. Sua resolução consiste e adotar um sistema de referencia, como por exemplo o plano cartesiano, e a partir dai projetar os vetores em cada um dos eixos.

Aplicação 1 – conduto com redução gradual da seção.

- Seja o contudo da Figura 3. Supondo as propriedades uniformes nas seções e o regime permanente.

- Será determinado um esforço horizontal do fluido sobre o conduto.

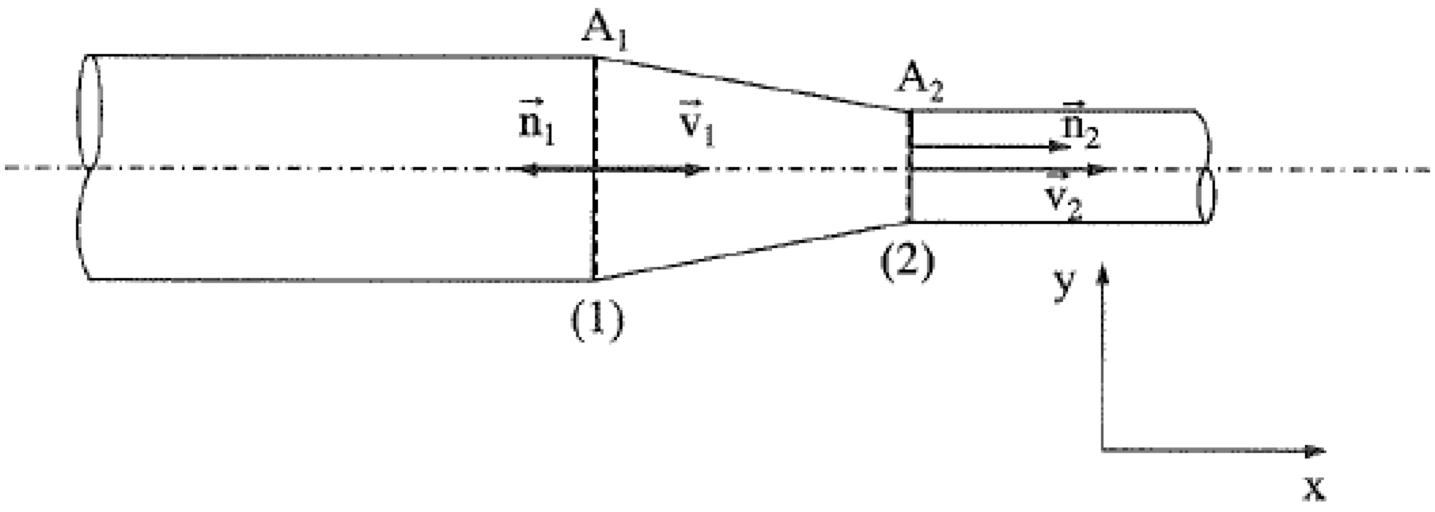


Figura 3

- Assim, para o trecho (1) e (2) pode ser escrever:

$$\vec{F}_S = -\left[p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + I_m \overrightarrow{\Delta v}\right] + \vec{G}$$

- Desconsiderando o efeito do campo gravitacional

$$\vec{F}_S = -\left[p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + I_m \overrightarrow{\Delta v}\right]$$

- De acordo com o referencial adotado temos a projeção da força no eixo x escrita da seguinte maneira:

$$\vec{F}_{Sx} = -[p_1A_1(-1) + p_2A_2(1) + I_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]$$

- Ou ainda:

$$\vec{F}_{Sx} = p_1A_1 - p_2A_2 + I_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

- Lembrando que:

$$I_m = \frac{m}{t} \text{ e}$$

$$\rho = \frac{m}{V} => m = \rho V \text{ temos:}$$

$$I_m = \frac{\rho V}{t}$$

- A vazão volumétrica pode ser expressa por: $I = \frac{V}{t}$ logo

$$I_m = \rho I$$

- Desta forma temos:

$$\vec{F}_{Sx} = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \rho I(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Aplicação 2 – Redução de seção e mudança de direção

- Consideremos a seguinte Figura 4:

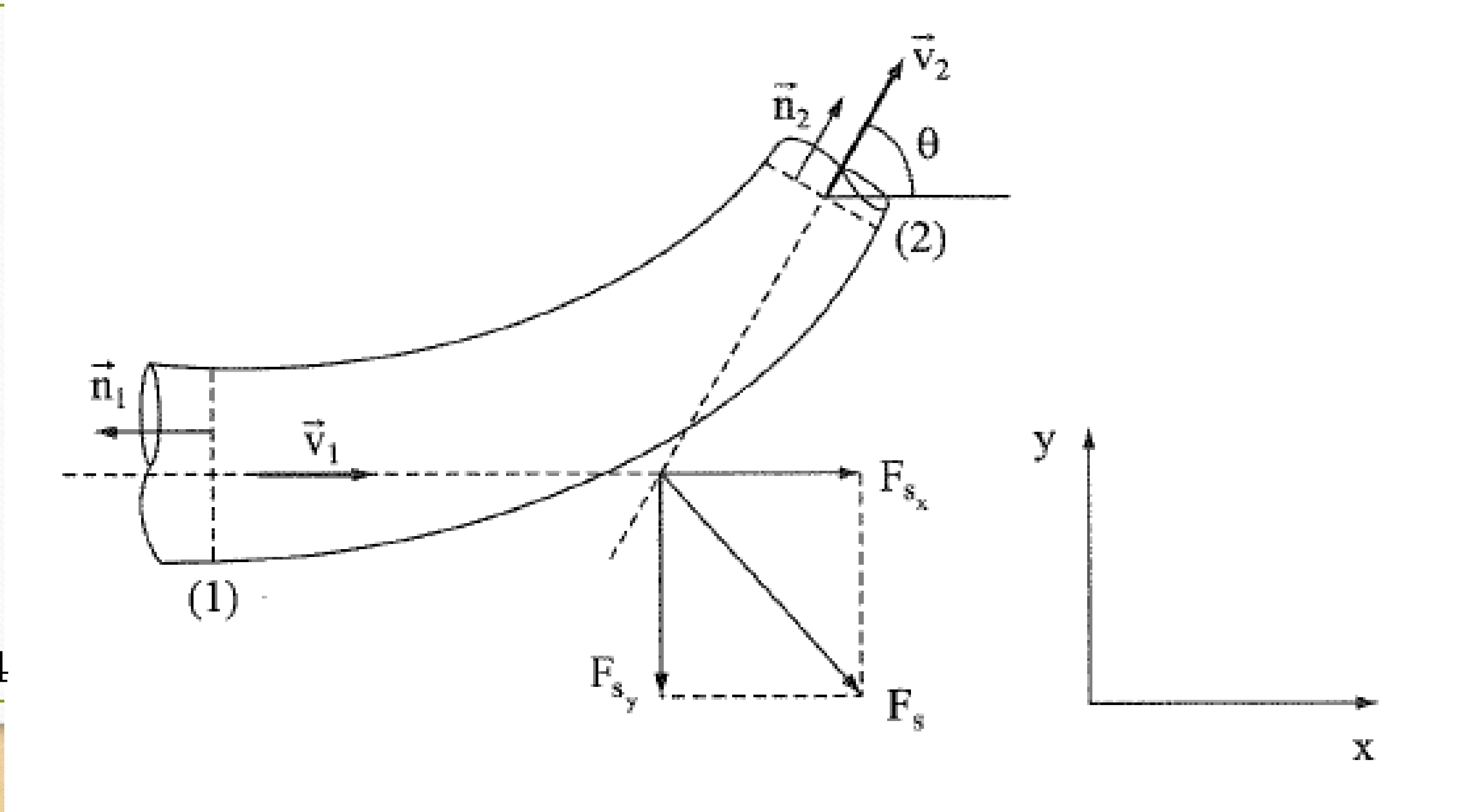


Figura 4

- A força resultante pode ser expressa de forma geral como:

$$\vec{F}_S = -\left[p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + I_m \overrightarrow{\Delta v}\right]$$

- Projetando a força no ***eixo x*** temos:

$$F_{Sx} = -[p_1 A_1 (-1) + p_2 A_2 \cos\theta + I_m (v_2 \cos\theta - v_1)]$$

- Ou ainda:

$$F_{Sx} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta + I_m (v_1 - v_2 \cos\theta)$$

- Projetando a força no ***eixo y*** temos:

$$F_{Sy} = -[p_1 A_1 (0) + p_2 A_2 \operatorname{sen}\theta + I_m (v_2 \operatorname{sen}\theta - 0)]$$

- Ou

$$F_{Sy} = -p_2 A_2 \operatorname{sen}\theta - I_m v_2 \operatorname{sen}\theta$$

- A ***força resultante*** será:

$$F_S = \sqrt{F_{sx}^2 + F_{sy}^2}$$

Aplicação 3 – Desviador de jato fixo

- De acordo com a Figura 5 há um desviador de já ou uma pá (pás de turbina).
- O fluido lançado contra o desviador sofre uma deflexão provocada por este.

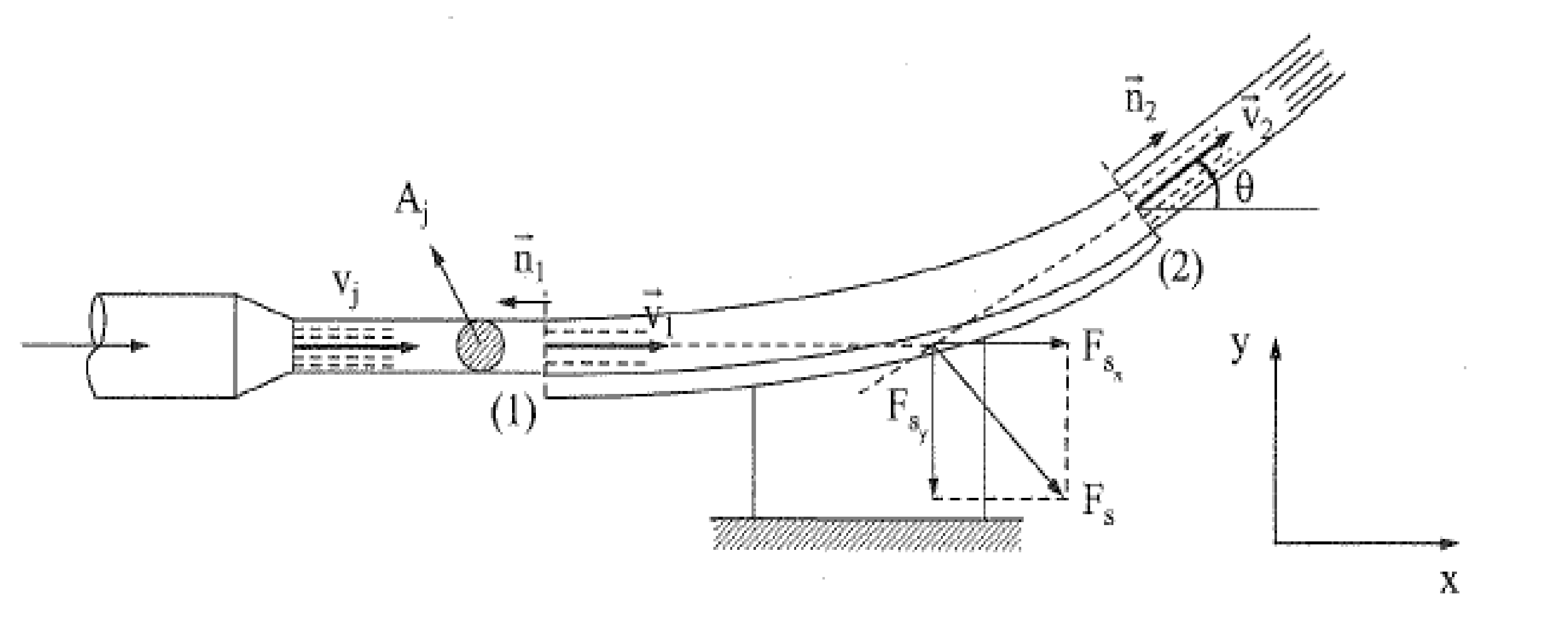
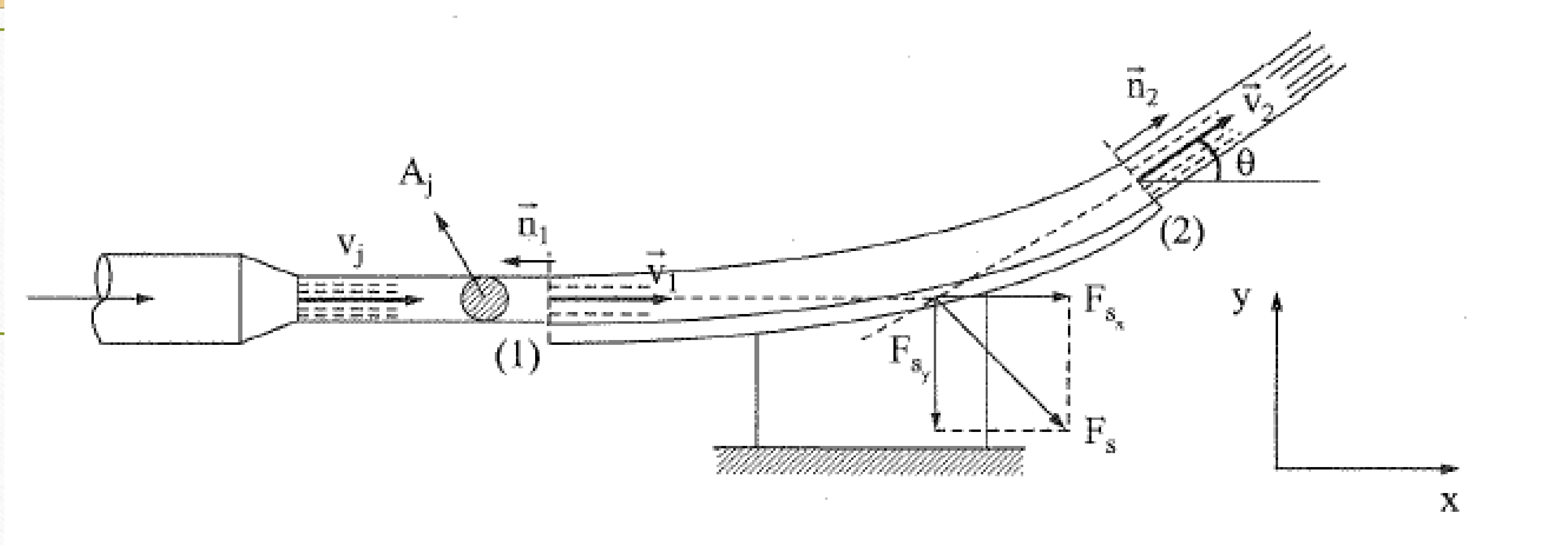


Figura 5



- Deste modo temos:

$$\vec{F}_S = -[p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + I_m \overrightarrow{\Delta v}]$$

- Entre os pontos (1) e (2) o jato está livre da pressão atmosférica, ou seja p1 = p2 = 0, desta forma

$$\vec{F}_S = -I_m \overrightarrow{\Delta v} \text{ ou } \vec{F}_S = -I_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \text{ ou ainda } \vec{F}_S = I_m(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

- Projetando no *eixo x* temos:

$$F_{Sx} = I_m(v_1 - v_2 \cos\theta)$$

- Projetando no *eixo y*

$$F_{Sy} = -I_m v_2 \operatorname{sen}\theta$$

- Considerando $v1 = v2 = vj$ temos então:

$$F_{Sx} = I_m v_j (1 - \cos\theta)$$

- Lembrando que ρ e $\frac{V}{t}$ podemos escrever a vazão de massa da seguinte forma:

$$I_m = \rho \frac{V}{t} => I_m = \rho \frac{Ad}{t} = \rho A v_j$$

- Assim a componente em x pode ser expressa da seguinte maneira:

$$F_{Sx} = \rho A v_j^2 (1 - \cos\theta)$$

- Já a componente em y será:

$$F_{Sy} = \rho A v_j^2 \operatorname{sen}\theta$$

- Já a componente em y será:

Aplicação 4 – Jato incidindo numa placa plana

- O jato a atingir o anteparo é espalhado uniformemente em todas as direções. Desta forma a velocidade *v2* não terá componente na direção do eixo x [Figura 6].
- Como p1 = p2 = 0 temos:

- O jato a atingir o anteparo é espalhado uniformemente em todas as direções. Desta forma a velocidade *v2* não terá componente na direção do eixo x [Figura 6].
- Como p1 = p2 = 0 temos:

$$F_S = I_m(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

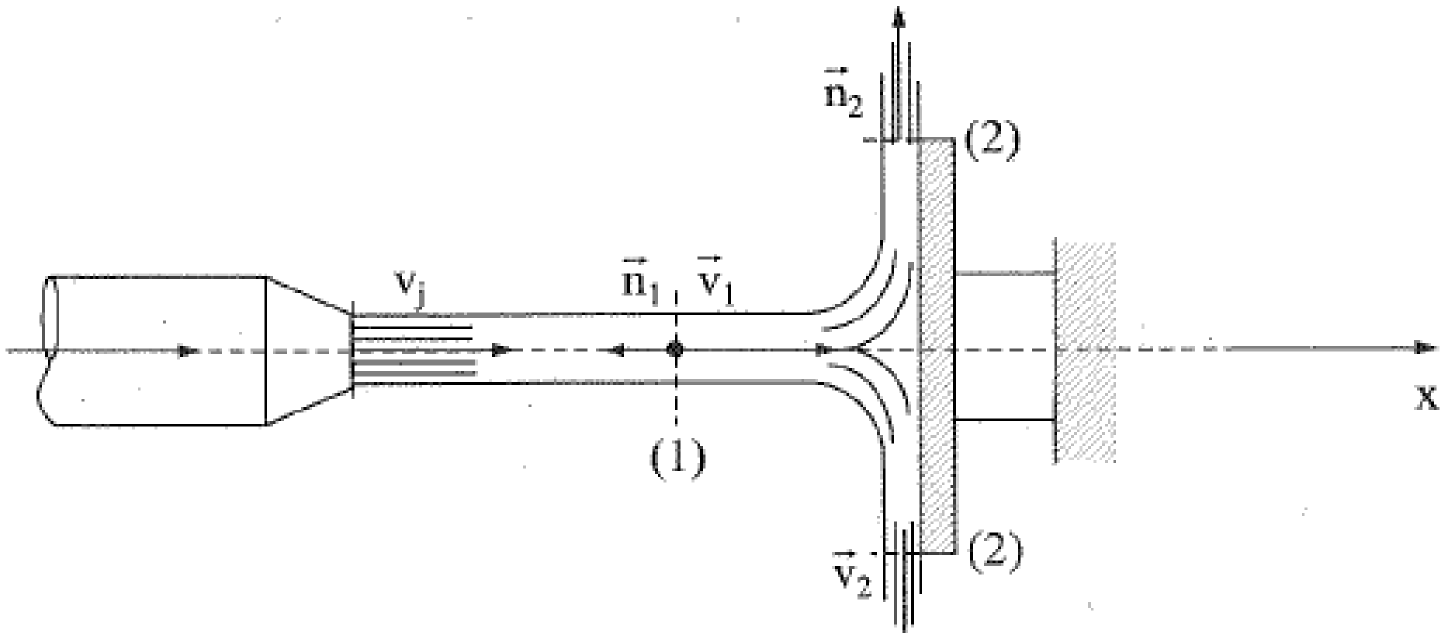


Figura 6

- A projeção da força em x será:

$$F_{Sx} = I_m v_1$$

- Ou

$$F_{Sx} = \rho I v_1$$