Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo

# Variáveis Aleatórias Discretas

Professora Renata Alcarde Sermarini

Piracicaba
abril 2016

Maioria dos problemas $\Rightarrow$ Poucos modelos básicos

$\Downarrow$

Verificar as suposições do modelo

# Distribuição de Bernoulli

## Distribuição de Bernoulli

**Experimento:** O departamento de Entomologia e Acarologia da ESALQ/USP realizou um experimento para verificar a eficácia de uma nova substância no controle de determinada praga. Um grupo de 30 insetos foi submetido à nova substância e, depois de um determinado período, foram avaliados. Tomando-se ao acaso, um inseto do estudo, verifica-se se este esta vivo ou morto.

# Distribuição de Bernoulli

Variável aleatória $X$: mortalidade.

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \quad \text{se morreu} \\
x &= 0 \quad \text{se não morreu}
\end{aligned}
$$


Algumas pressuposições:

- É realizada apenas uma repetição do experimento;
- Apenas dois resultados possíveis: morreu ou não morreu.

# Distribuição de Bernoulli

Evento $M = \{\text{O inseto morreu}\}$

$$P(M) = \pi \qquad P(\bar{M}) = 1 - \pi.$$

Distribuição de probabilidade:

| Resultados | $x$ | $P(X = x)$ |
|---|---|---|
| $\bar{M}$ | 0 | $1 - \pi$ |
| $M$ | 1 | $\pi$ |
| Total | | $(1 - \pi) + \pi = 1$ |

Portanto, a variável aleatória $X$: mortalidade, tem distribuição de Bernoulli.

# Distribuição de Bernoulli

A função de probabilidade de uma variável Bernoulli é dada por:

$$P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x}.$$

Logo,

$$P(X = 0) =$$
$$P(X = 1) =$$

# Distribuição de Bernoulli

A função de probabilidade de uma variável Bernoulli é dada por:

$$P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x}.$$

Logo,

$$P(X = 0) = \pi^0 (1 - \pi)^{1-0} = 1 - \pi$$
$$P(X = 1) = \pi^1 (1 - \pi)^{1-1} = \pi$$

# Distribuição de Bernoulli

## Média

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x=0}^{1} xP(X = x) = 0 \times (1 - \pi) + 1 \times \pi = \pi.$$

## Variância

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = \pi - \pi^2 = \pi(1 - \pi)$$

Logo, o desvio padrão de uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli é dado por:

$$\sigma_X = \sqrt{\pi(1 - \pi)}.$$

# Distribuição de Bernoulli

**Exemplo**: Um grupo composto por 10 pessoas ingeriu uma determinada bebida calmante, 6 afirmaram sentir-se melhor e mais calmos após um determinado período. Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa desse grupo. Seja $X =$ "aprensentar-se mais calmo". Verifique se é um ensaio de Bernoulli. Determinar a $P(X = x)$, calcular $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

## Distribuição binomial

**Experimento:** Verificar se dois insetos submetidos à nova substância permaneceram vivos ou morreram.

Pressuposições:

- o fato de um inseto morrer, ou não, não tem influência no fato de o outro inseto morrer, ou não, ou seja, as mortes são **independentes**;
- a probabilidade dos insetos morrerem é a mesma, igual a $\pi$.
- só há dois resultados possíveis para cada inseto: morreu ou não morreu (ensaio de Bernoulli); e
- existem duas repetições.

# Distribuição binomial

Variável aleatória $X =$ número de insetos mortos.

| Resultado | Probabilidade | $x$ |
|---|---|---|
| $MM$ | $\pi\pi$ | 2 |
| $M\bar{M}$ | $\pi(1-\pi)$ | 1 |
| $\bar{M}M$ | $(1-\pi)\pi$ | 1 |
| $\bar{M}\bar{M}$ | $(1-\pi)(1-\pi)$ | 0 |
| Total | 1 | |

# Distribuição binomial

Variável aleatória $X =$ número de insetos mortos.

| Resultado | Probabilidade | $x$ |
|---|---|---|
| $MM$ | $\pi\pi$ | 2 |
| $M\bar{M}$ | $\pi(1-\pi)$ | 1 |
| $\bar{M}M$ | $(1-\pi)\pi$ | 1 |
| $\bar{M}\bar{M}$ | $(1-\pi)(1-\pi)$ | 0 |
| Total | 1 | |

Distribuição de probabilidades

| $x_i$ | $P(X=x)$ |
|---|---|
| 0 | $(1-\pi)^2$ |
| 1 | $2\pi(1-\pi)$ |
| 2 | $\pi^2$ |
| Total | 1 |

# Distribuição binomial

### Generalizando...

A probabilidade de $x$ insetos morrerem e, portanto, $n - x$ insetos permanecerem vivos, nesta sequência,

$$\underbrace{M, M, \ldots, M}_{x}, \underbrace{\bar{M}, \bar{M}, \ldots, \bar{M}}_{n-x}$$

é dada por:

$$\pi^x(1-\pi)^{n-x}.$$

Outras sequências podem ocorrer com a mesma probabilidade, tais como:

$$M, M, M \ldots, \bar{M}, \bar{M}, M, \bar{M}, \ldots, \bar{M} \quad \text{ou} \quad M, M, M \ldots, \bar{M}, M, \bar{M}, \bar{M}, \ldots, \bar{M}.$$

Existem

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

# Distribuição binomial

Generalizando...

Logo,

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

**Observações**:

- a denominação binomial decorre do fato de os coeficientes $\binom{n}{x}$ serem exatamente os coeficientes do desenvolvimento binomial dos termos $(a + b)^n$;
- o cálculo dos coeficientes, para $n$ e $x$ grandes, é difícil de ser realizado.

**Notação**: $X \sim B(n; \pi)$.

# Distribuição binomial

Pressuposições:

- Existem $n$ repetições ou provas idênticas do experimento;
- Só há dois tipos de resultados possíveis em cada repetição;
- As probabilidades $\pi$ de sucesso e $(1 - \pi)$ de fracasso permanecem constantes em todas as repetições;
- Os resultados das repetições são independentes uns dos outros.

# Distribuição binomial

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

**Média**

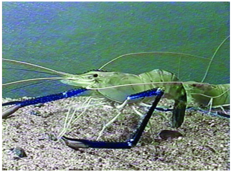
$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = n\pi.$$

**Variância**

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = n\pi(1-\pi)$$

# Distribuição binomial

Um produtor de camarões de água doce tratados com uma alimentação especial deseja comparar o sabor proporcionado por esta nova alimentação, com o sabor produzido pela alimentação tradicional. A cada um de quatro provadores são fornecidas três porções exatamente iguais, em ordem aleatória, duas das quais com alimentação tradicional, e a outra com alimentação especial. Cada um desses provadores é inquirido sobre a porção que prefere. Suponha que essas duas fórmulas sejam igualmente saborosas.



# Distribuição binomial

Seja $Y$ o número de provadores que preferem camarões tratados com alimentação especial.

(a) Qual é a probabilidade de pelo menos três dos quatro provadores preferirem a fórmula nova?

(b) Calcule $E(Y)$ e $Var(Y)$.

# Distribuição binomial

**Exercício**: Seja $X$ a variável aleatória número de plantas com mutação em um total de $n$ plantas irradiadas e $p = 0,0001$ a probabilidade de uma planta irradiada apresentar mutação. Calcular:

(a) a probabilidade de não aparecer plantas com mutação em um total de 1000 plantas irradiadas;

(b) a probabilidade de aparecer ao menos uma planta com mutação em 1000 plantas irradiadas;

(c) a probabilidade de não aparecer planta com mutação em 2000 plantas irradiadas;

(d) a probabilidade de aparecer pelo menos duas plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas;

(e) o número médio esperado de plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas;

(f) a variância esperada do número de plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas;

(g) o número mínimo de plantas que devemos irradiar de modo que a probabilidade de aparecer ao menos uma planta com mutação seja maior ou igual a 0,90.

# Distribuição de Poisson

**A distribuição de Poisson**

é largamente utilizada quando desejamos contar número de ocorrências de um evento de interesse, por unidade de tempo, comprimento, área ou volume. A unidade de medida deve ser estabelecida de tal modo que o valor esperado das contagens seja baixo (inferior a 10).

# Distribuição de Poisson

**Exemplos**:

- número de indivíduos por quadrante de 1 $m^2$;
- número de colônias de bactérias por 0,01 $mm^2$ de uma dada cultura, observado em uma plaqueta de laboratório;
- número de defeitos em 1000 m de tecido;
- número de acidentes em uma esquina movimentada e bem sinalizada, por dia;
- número de partículas radioativas emitidas numa unidade de tempo: e número de micronúcleos/1000 células.

**Importante**: Estudo de dinâmica de populações e de entomologia.

# Distribuição de Poisson

### Função de probabilidades

A função de probabilidades de uma variável aleatória $X$ com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda$ é dada por:

$$P(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

em que $\lambda$ é igual ao número de ocorrências do evento de interesse por unidade de tempo, distância, área, ...

**Notação**: $X \sim P(\lambda)$.

# Distribuição de Poisson

### Média

A esperança de uma variável aleatória $X$ com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda$ é dada por:

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = \lambda.$$

### Variância

A variância de uma variável aleatória $X$ com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda$ é dada por:

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

# Distribuição de Poisson

**Exemplo**: A emissão de partículas radioativas tem sido modelada por meio de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada. Suponha que o número de partículas alfa, emitidas por minuto, seja uma variável aleatória seguindo o modelo de Poisson com parâmetro 5, isto é, a taxa média de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto. Calcule a probabilidade de haver mais de duas emissões em um minuto.

# Distribuição de Poisson

**Exemplo**: Sabe-se que numa certa rede de computadores ocorre em média uma queda por semana. Um pesquisador deseja realizar um trabalho envolvendo simulação em que são necessários 2 dias consecutivos sem haver queda na rede. Supondo o modelo de Poisson, calcular a probabilidade dele não conseguir realizar a simulação.

# Aproximação da distribuição binomial pela distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson, $P(\lambda)$, com $\lambda = n\pi$ é uma boa aproximação à distribuição binomial $B(n, \pi)$, quando $\pi$ for pequeno e $n$ for bastante grande, tal que $n\pi \leq 10$.

# Aproximação da distribuição binomial pela distribuição de Poisson

**Exemplo**: Seja $X$ a variável número de plantas com mutação em um total de $n$ plantas irradiadas e $\pi = 0,0001$ a probabilidade de uma planta irradiada apresentar mutação. Calcular, usando a distribuição de Poisson como uma aproximação à binomial:

(a) a probabilidade de não aparecer planta com mutação em 1000 plantas irradiadas;

(b) a probabilidade de aparecer ao menos uma planta com mutação em 1000 plantas irradiadas;

(c) a probabilidade de não aparecer plantas com mutação em 2000 irradiadas;

(d) a probabilidade de aparecer ao menos duas plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas;

(e) o número médio esperado de plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas;

(f) a variância esperada do número de plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas;

(g) o número mínimo de plantas que devem ser irradiadas de modo que a probabilidade de aparecer ao menos uma planta com mutação seja maior ou igual a 0,90.

# Referências


1. ANDRADE, D.F.; OGLIARI, P.J. **Estatística para as ciências agrárias e biológicas com noções de experimentação**. Editora da UFSC, Florianópolis, 2007.
2. ZOCCHI, S.S.; LEANDRO, R.A., Notas para acompanhar a disciplina LCE-211-Estatística Geral. ESALQ-USP, Piracicaba, S.P. 1999.