Experimentos Fatoriais 2^k Fracionados

Prof. Silvio S. Zocchi

ESALQ/USP

22/09/2015

1. Introdução

- Ex. Fatorial com $k = 6$ fatores $\Rightarrow 2^k = 2^6 = 64$ tratamentos
- Temos $64 - 1 = 63$ graus de liberdade (63 g.l.), sendo:

$$\binom{6}{1} = 6 \text{ g.l. para estimar os efeitos principais}$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ g.l. para estimar os efeitos de iterações duplas}$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20 \text{ g.l. para estimar os efeitos de iterações triplas}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{2!4!} = 15 \text{ g.l. para estimar os efeitos de iterações quádruplas}$$

$$\binom{6}{5} = 6 \text{ g.l. para estimar os efeitos de iterações quíntuplas}$$

$$\binom{6}{6} = 1 \text{ g.l. para estimar o efeito de iteração entre os 6 fatores}$$

- Temos, assim, $\sum_{j=3}^{6} \left(\begin{array}{c} 6 \\ j \end{array} \right) = 42$ g.l. para estimar os efeitos de iteração entre os 3 ou mais fatores
- Pesquisador pode assumir que os efeitos de interações envolvendo muitos fatores são pouco importantes
- Informações sobre os efeitos principais e de interações envolvendo poucos fatores pode ser obtida por meio de uma fração do fatorial completo (**fatorial fracionado**)
- Útil na fase de **seleção de fatores importantes**

O sucesso do uso dos fatoriais fracionados está baseado em **três ideias principais**:

1. O princípio dos **efeitos esparsos**. Quando há vários fatores, é provável que apenas alguns fatores principais e interações de baixa ordem influenciem as variáveis respostas
2. A propriedade da **projeção**. Se um dos fatores considerados não for significante, nem suas interações com os demais fatores, então o fatorial fracionado 2^{k-q} pode ser considerado com um fatorial 2^{k-q-1}.
3. **Experimentação sequencial**. Admite-se a possibilidade de se combinarem os resultados de dois ou mais fatoriais fracionados para estimar os efeitos de fatores e interações de interesse

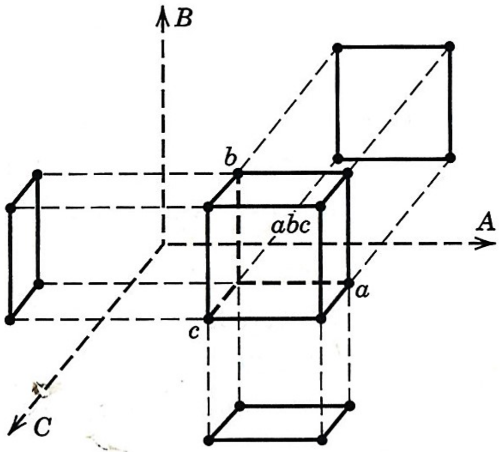


Figure 8-2 Projection of a 2_{III}^{3-1} design into three 2^2 designs.

2. Metade do fatorial 2^k (fatorial fracionado 2^{k-1})

Exemplo. $k = 3$ fatores $\Rightarrow$ fatorial completo tem $2^3 = 8$ tratamentos
Metade do fatorial 2^3 tem $2^{3-1} = 4$ tratamentos. Como selecionar os 4 tratamentos?

Tabela: Sinais relativos ao fatorial 2^3

	Efeitos fatoriais							
Trat.	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
(1)	+	−	−	−	+	+	+	−
a	+	+	−	−	−	−	+	+
b	+	−	+	−	−	+	−	+
ab	+	+	+	−	+	−	−	−
c	+	−	−	+	+	−	−	+
ac	+	+	−	+	−	+	−	−
bc	+	−	+	+	−	−	+	−
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

- Uma ideia é utilizar, como **gerador da fração**, o efeito fatorial ABC
- Neste caso teríamos duas frações:
  1. a, b, c e abc
  2. (1), ab, ac e bc
- Como distinguí-las?
- Analisando a tabela de sinais relativos ao fatorial completo 2^3, a primeira fração tem como característica, $I = +ABC$
- Dizemos, assim, que $I = +ABC$ é a **relação definidora** da primeira fração, chamada usualmente **fração principal**

Tabela: Sinais relativos à **fração principal** do fatorial 2^3 (dada pela relação definidora $I = +ABC$)

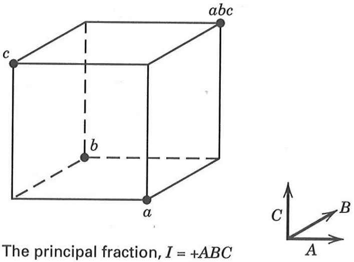
	Efeitos fatoriais							
Trat.	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
a	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
b	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
c	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
abc	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

- Analogamente, dizemos que $I = -ABC$ é a **relação definidora** da segunda fração, chamada usualmente de **fração complementar** ou **alternativa**

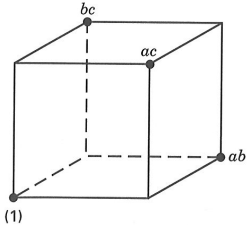
Tabela: Sinais relativos à **fração complementar** do fatorial 2^3 (dada pela relação definidora $I = -ABC$)

	Efeitos fatoriais							
Trat.	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
(1)	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
ab	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
ac	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
bc	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

Exercício 1. Obtenha os tratamentos de um fatorial fracionado 2^{3-1} dados pela relação definidora $I = -AB$. Quantos efeitos podemos estimar a partir dos resultados deste experimento?



(a) The principal fraction, $I = +ABC$



(b) The alternate fraction, $I = -ABC$

Figure 8-1 The two one-half fractions of the 2^3 design.

- Voltemos ao fatorial fracionado 2^{3-1} dado pela relação definidora $I = +ABC$
- Temos 4 tratamentos e, portanto, 3 graus de liberdade que podem ser utilizados para estimar os efeitos principais de A, B e C
- Combinações lineares para estimar os efeitos principais de A, B e C:

$$\begin{aligned}
\ell_A &= \frac{1}{2}(+a - b - c + abc) \\
\ell_B &= \frac{1}{2}(-a + b - c + abc) \\
\ell_C &= \frac{1}{2}(-a - b + c + abc)
\end{aligned}$$

Exercício 2. Obter as combinações lineares para estimar os efeitos das interações duplas

- Resposta do exercício 2:

$$\begin{aligned}
\ell_{BC} &= \frac{1}{2}(+a - b - c + abc) \\
\ell_{AC} &= \frac{1}{2}(-a + b - c + abc) \\
\ell_{AB} &= \frac{1}{2}(-a - b + c + abc)
\end{aligned}$$

- Podemos notar que $\ell_A = \ell_{BC}$, $\ell_B = \ell_{AC}$ e $\ell_C = \ell_{AB}$, ou seja, é impossível distinguir os efeitos A e BC, B e AC, e C e AB
- Na verdade, quando estimamos os efeitos de A, B e C, estamos, na verdade, estimando $A + BC$, $B + AC$ e $C + AB$, respectivamente

- Dois ou mais efeitos com esta propriedade são chamados de **associados** (*aliases*). Portanto, A e BC estão associados, e assim por diante. Notação:

$$\ell_A \rightarrow A + BC$$

$$\ell_B \rightarrow B + AC$$

$$\ell_C \rightarrow C + AB$$

- A **estrutura de associações** pode ser determinada usando a relação definidora utilizada, no caso, $I = +ABC$
- A multiplicação de qualquer coluna (ou efeito) pela relação definidora produz a associação para tal coluna (ou efeito)

$$A.I = A.ABC = A^2BC = BC \Rightarrow A = BC$$

$$B.I = B.ABC = AB^2C = AC \Rightarrow B = AC$$

$$C.I = C.ABC = ABC^2 = AB \Rightarrow C = AB$$

Exercício 3. Considere a **fração complementar** ao fatorial fracionado dado pela relação definidora $I = +ABC$. Apresente sua relação definidora, a estrutura de associações e ℓ'_A, ℓ'_B e ℓ'_C

Resposta do exercício 3

- Relação definidora: $I = -ABC$
- Estrutura de associação:

$$A.I = A.(-ABC) = -A^2BC = -BC \Rightarrow A = -BC$$

$$B.I = B.(-ABC) = -AB^2C = -AC \Rightarrow B = -AC$$

$$C.I = C.(-ABC) = -ABC^2 = -AB \Rightarrow C = -AB$$

- Assim, quando estimamos A, B e C a partir desta fração, estamos, na verdade, estimando $A - BC$, $B - AC$ e $C - AB$. Notação:

$$\ell'_A \rightarrow A - BC$$

$$\ell'_B \rightarrow B - AC$$

$$\ell'_C \rightarrow C - AB$$

- Ambas as frações pertencem à mesma **família**, ou seja, as duas frações juntas formam um fatorial 2^3 completo.
- Assim, se após executarmos uma fração, executarmos a outra fração, teremos um fatorial completo 2^3 em 2 blocos com efeito da interação ABC confundido com o de blocos
- Podemos, deste modo, obter as estimativas dos efeitos de A, B, C, AB, AC e BC livre de efeitos associados. Mas, como?
- Ex. Temos que $\ell_A \to A + BC$ e $\ell'_A \to A - BC$. Logo:

$$\frac{1}{2}(\ell_A + \ell'_A) = \frac{1}{2}(A + BC + A - BC) \to A$$

e

$$\frac{1}{2}(\ell_A - \ell'_A) = \frac{1}{2}(A + BC - A + BC) \to BC$$

Tabela: Separando os efeitos fatoriais associados A e BC, B e AC e C e AB a partir das combinações lineares complementares ℓ e ℓ'

i	A partir de $\frac{1}{2}(\ell_i + \ell'_i)$	A partir de $\frac{1}{2}(\ell_i - \ell'_i)$
A	A	BC
B	B	AC
C	C	AB

Exercício 4. Relacione os tratamentos que compõem as duas metades do fatorial 2^4 dada pelo gerador $ABCD$. Para cada fração 2^{4-1}, apresente sua relação definidora e estrutura de associações. Apresente as combinações lineares ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D, ℓ_{AB}, $\ldots$, ℓ_{CD}, ℓ'_A, $\ldots$, ℓ'_{CD} e uma forma de estimar o efeito CD, livre de seu efeito associado AB

Resolução de um delineamento

Definição

Um delineamento tem **resolução** R se os efeitos envolvendo p fatores estão associados com outros envolvendo pelo menos $R - p$ fatores ($p \leq R - p$)

Resolução	R	p	$R - p$
III	3	1	2
IV	4	1	3
	4	2	2
V	5	1	4
	5	2	3
VI	6	1	5
	6	2	4
	6	3	3

- Os fatoriais fracionados 2^{3-1} vistos até aqui têm resolução III os pois fatores principais estão associados com efeitos de interações duplas.
- Notação usual: 2^{3-1}_{III}
- Os delineamentos mais importantes na prática são os de resolução III, IV e V
- Delineamentos de resolução III
    - Nenhum efeito principal associado com outro efeito principal
    - Efeitos principais associados com efeitos de interações duplas ou envolvendo três ou mais fatores

- Delineamentos de resolução IV
  - Nenhum efeito principal associado com outro efeito principal ou com efeitos de interações duplas
  - Efeitos de interações duplas associados com efeitos de interações duplas ou envolvendo três ou mais fatores
  - Ex. fatorial 2^{4-1} definido por $I = +ABCD$

    Notação usual: 2_{IV}^{4-1}

    Associações:
    $A = BCD$, $B = ACD$, $C = ABD$, $D = ABC$
    $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$

- Delineamentos de resolução V
  - Nenhum efeito principal associado com outro efeito principal ou com efeitos de interações duplas ou triplas
  - Nenhum efeito de interação dupla associado com outro efeito de interação dupla ou com efeitos de interações duplas
  - Efeitos de interações duplas associados com efeitos de interações triplas ou envolvendo quatro ou mais fatores
  - Efeitos de interações triplas associados com efeitos de interações triplas ou envolvendo quatro ou mais fatores
  - Ex. fatorial 2^{5-1} definido por $I = +ABCDE$. Notação usual: 2_V^{4-1}

Construção de fatoriais 2^{k-1}

- Ideia 1. Dividir os tratamentos em dois blocos considerando a interação envolvendo os k fatores $(ABCD \dots K)$ confundida com blocos. Cada bloco será um fatorial 2^{k-1} com a maior resolução possível.
- Ideia 2. Construir um fatorial completo com $k-1$ fatores. Considerar $I = ABC \dots K$ ou $I = -ABC \dots K$ e portanto, $K = ABC \dots (K-1)$ ou $K = -ABC \dots (K-1)$ que definem a última coluna

Tabela: Fatorial 2_{IV}^{4-1} dado pela relação definidora $I = +ABCD \Rightarrow D = +ABC$

Fatorial 2^3				
A	B	C	$D = +ABC$	Trat.
$-$	$-$	$-$	$-$	(1)
$+$	$-$	$-$	$+$	*ad*
$-$	$+$	$-$	$+$	*bd*
$+$	$+$	$-$	$-$	*ab*
$-$	$-$	$+$	$+$	*cd*
$+$	$-$	$+$	$-$	*ac*
$-$	$+$	$+$	$-$	*bc*
$+$	$+$	$+$	$+$	*abcd*

Exercício 5. Construir o fatorial 2_{IV}^{4-1} dado pela relação definidora $I = -ABCD$

- Importante! Se, dos quatros fatores considerados em seu experimento, você acredita que um deles seja menos importante do que os demais, este deverá ser o fator D
- Isto pois, pela propriedade da projeção, se o fator D e interações envolvendo o mesmo não forem significativos, teremos um fatorial 2^3 completo envolvendo os demais fatores, A, B e C

Exemplo 8-1 de Montgomery

Tabela: Taxas de filtração, em gal./h, segundo os fatores: temperatura, A; pressão, B; concentração, C e taxa de agitação, D

A	B	C	$D = +ABC$	Trat.	Taxa de filtração
$-$	$-$	$-$	$-$	(1)	45
$+$	$-$	$-$	$+$	ad	100
$-$	$+$	$-$	$+$	bd	45
$+$	$+$	$-$	$-$	ab	65
$-$	$-$	$+$	$+$	cd	75
$+$	$-$	$+$	$-$	ac	60
$-$	$+$	$+$	$-$	bc	80
$+$	$+$	$+$	$+$	$abcd$	96

- Relação definidora: $I = +ABCD$
- Associações:
  $A = BCD$, $B = ACD$, $C = ABD$, $D = ABC$
  $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$
- Combinação linear para estimar A

$$\begin{aligned}\ell_A &= \frac{1}{4}(-(1) + ad - bd + ab - cd + ac - bc + abcd) \\ &= \frac{1}{4}(-45 + 100 - 45 + 65 - 75 + 60 - 80 + 96) \\ &= 19,00 \rightarrow A + BCD\end{aligned}$$

- Combinação linear para estimar AB

$$\begin{aligned}\ell_{AB} &= \frac{1}{4}(+(1) - ad - bd + ab + cd - ac - bc + abcd) \\ &= \frac{1}{4}(+45 - 100 - 45 + 65 + 75 - 60 - 80 + 96) \\ &= 1,00 \rightarrow AB + CD\end{aligned}$$

Tabela: Estimativas dos efeitos e associações entre efeitos para os dados de taxa de filtração, com efeitos significativos ($\alpha = 5\%$) em negrito

Estimativa	Estrutura de associações
$\ell_A = 19,00$	$\ell_A \rightarrow \mathbf{A} + BCD$
$\ell_B = 1,50$	$\ell_B \rightarrow B + ACD$
$\ell_C = 14,00$	$\ell_C \rightarrow \mathbf{C} + ABD$
$\ell_D = 16,50$	$\ell_D \rightarrow \mathbf{D} + ABC$
$\ell_{AB} = -1,00$	$\ell_{AB} \rightarrow AB + CD$
$\ell_{AC} = -18,50$	$\ell_{AC} \rightarrow \mathbf{AC} + BD$
$\ell_{AD} = 19,00$	$\ell_{AD} \rightarrow \mathbf{AD} + BC$

- Modelo para predizer a taxa de filtração:

$$\hat{y} = 70,75 + \frac{19,00}{2}x_1 + \frac{14,00}{2}x_3 + \frac{16,50}{2}x_4 - \frac{18,50}{2}x_1x_3 + \frac{19,00}{2}x_1x_4$$