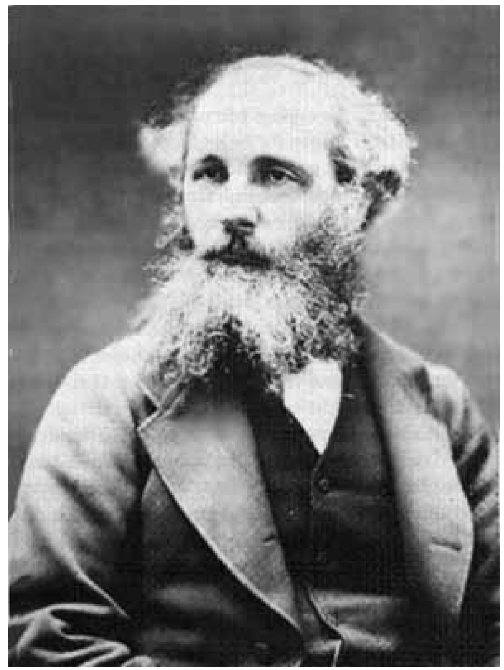
Equações de Maxwell

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_s \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_\Sigma \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_\tau \rho \cdot d\tau$$



(1831 - 1879)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Formulações Clássicas do M.E.F.

Equações de Maxwell

Equação de Poisson
(Linear ou Não Linear)

Definição de uma
Funcional de Energia

Método dos Resíduos
Ponderados

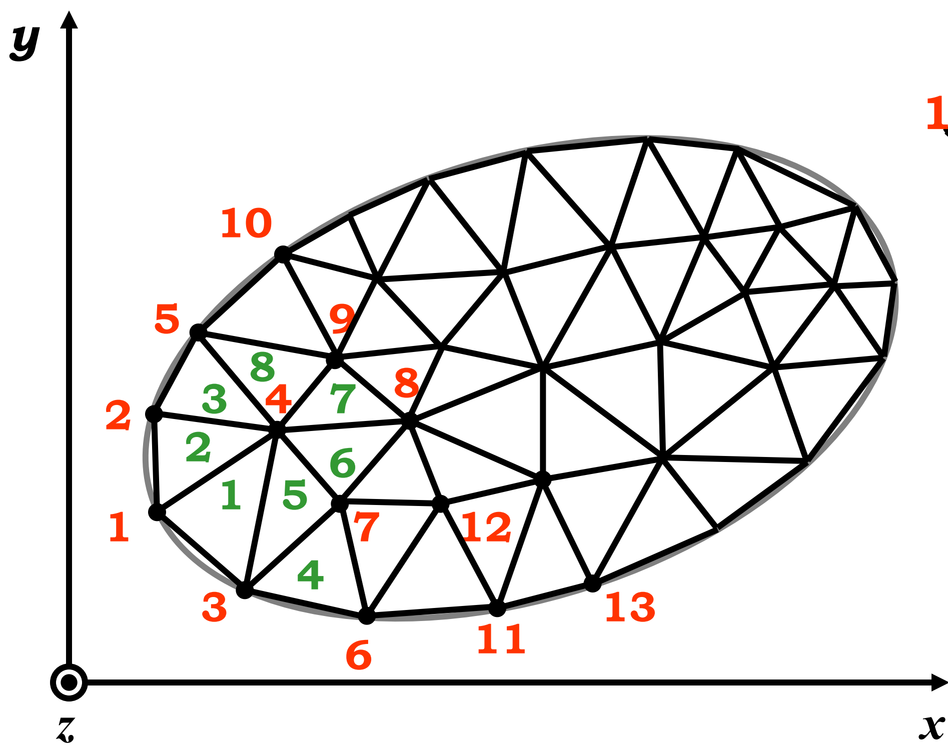
Minimização da
Funcional de Energia

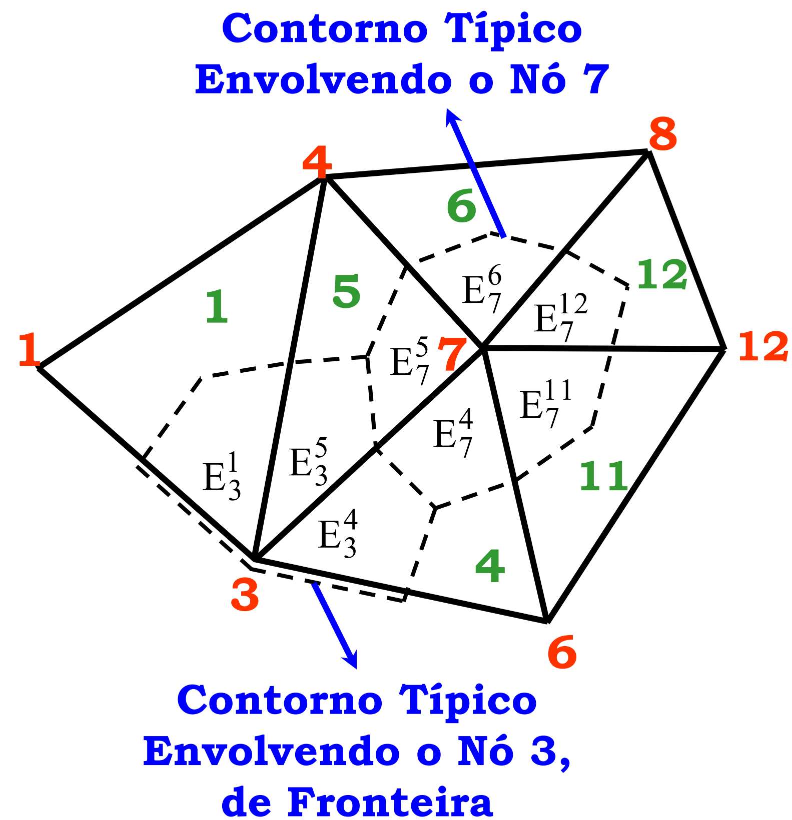
Discretização

Sistema de Equações
Algébrico

Regiões de Controle

- Numeração dos Nós
- Numeração dos Elementos





Volume de Controle

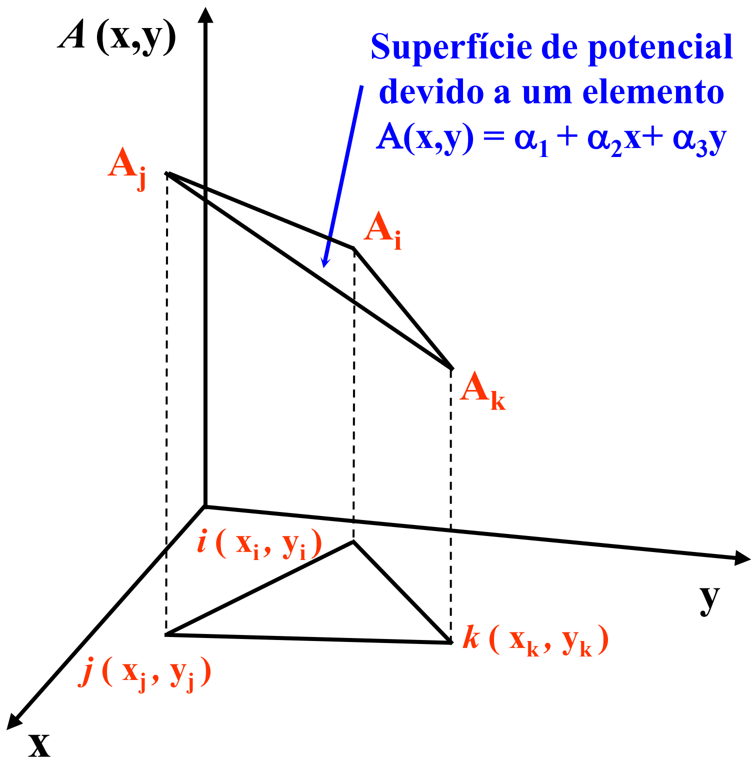
$$E_7^5 + E_7^6 + E_7^{12} + E_7^{11} + E_7^4 = \oint_{C_7} \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\mathbf{dl}}$$

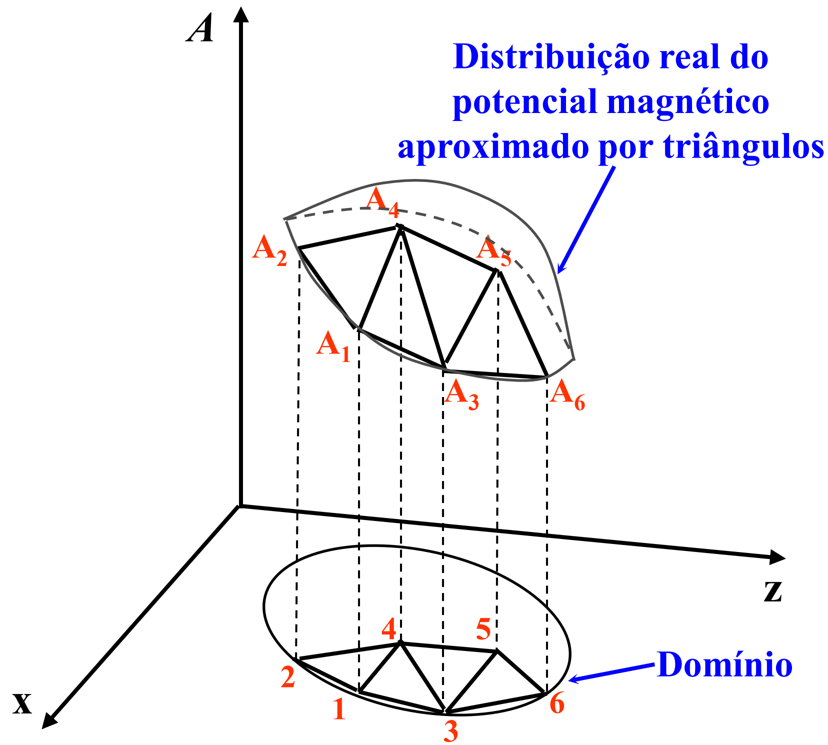
e

$$\sum_{e=1}^{NE} E_i^e = \sum_{e=1}^{NE} I_i^e$$

para todos os nós

Aproximação





Aproximação Linear do Potencial

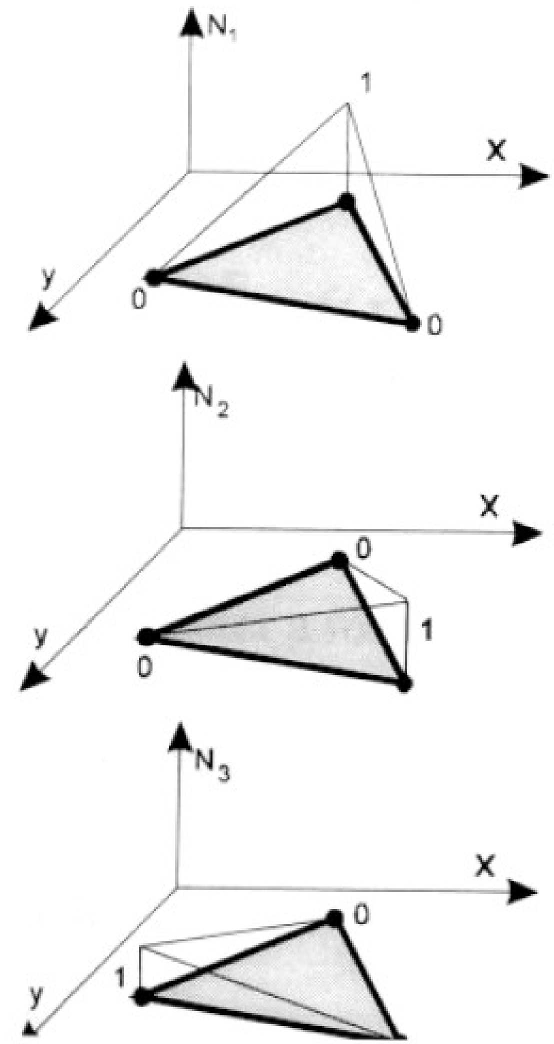
no elemento

$$A(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \times A_i$$

Aproximação: Função de Forma

Propriedade:

$$N_i(x,y) = \begin{cases} se\left(x = x_i \, e \, y = y_i\right) = 1 \\ se\left(x = x_j \, e \, y = y_j\right) = 0 \\ se\left(x = x_k \, e \, y = y_k\right) = 0 \end{cases}$$



Aproximação: Função de Forma

Assim, se $$N_i(x,y) = p_i + q_i x + r_i y$$

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = p_i + q_i\, x_i + r_i\, y_i = 1 \\ N_i\left(x_j, y_j\right) = p_i + q_i\, x_j + r_i\, y_j = 0 \\ N_i\left(x_k, y_k\right) = p_i + q_i\, x_k + r_i\, y_k = 0 \end{cases}$$

3 equações e 3 incógnitas (*p_i, q_i e r_i*)

Aproximação: Função de Forma

$$N_i(x,y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}$$

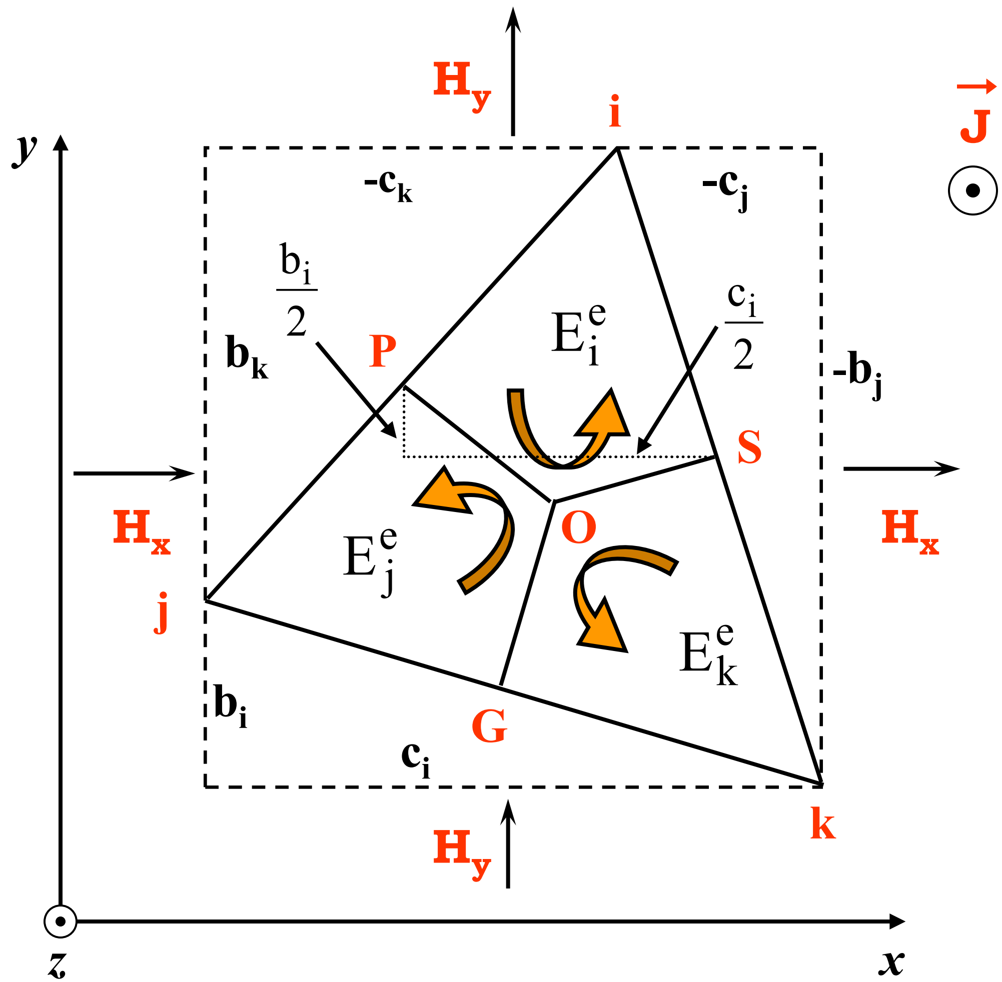
$$\begin{cases} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2; & b_1 = y_2 - y_3; & c_1 = x_3 - x_2; \\ a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3; & b_2 = y_3 - y_1; & c_2 = x_1 - x_3; \\ a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1; & b_3 = y_1 - y_2; & c_3 = x_2 - x_1; \end{cases}$$

O Valor do Campo Magnético no Elemento

$$\vec{H} = \nu \vec{B} = \nu \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{H} = \nu \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(c_i \vec{u}_x - b_i \vec{u}_y\right)}{2\Delta} A_i$$

Elemento Genérico



Elemento Genérico

$$\begin{bmatrix} E_i^e \\ E_j^e \\ E_k^e \end{bmatrix} = \frac{\nu}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações

Obtém-se:

$$[K]\,[\,A] = [\,I]$$

E cada linha é a Lei de Ampère para um determinado nó.

Vantagens da Formulação

- Parte diretamente das equações de Maxwell
- Significado físico evidente
- Fácil entendimento

Extensões possíveis

- Eletrostática $[C]\cdot[V]=[Q]$
- Eletrocinética $[G]\cdot[V]=[I]$
- Magnetostática $[S]\cdot[A]=[I]$
- Magnetodinâmica $j\omega[C]\cdot[\dot{A}]+[S][\dot{A}]=[\dot{I}]$
- Magneto-Transitório $[C]\cdot\left[\frac{dA}{dt}\right]+[S]\cdot[A]=[I]$
- Dielétrico $[D]\cdot[V]=[Q]$
- Alta Freqüência $[A]\cdot[\dot{H}]=\lambda[B]\cdot[\dot{H}]$