EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES

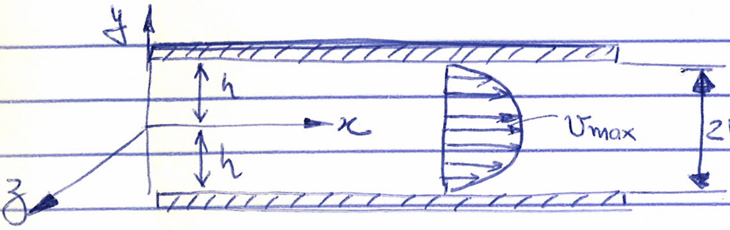
EXERCÍCIOS - SOLUÇÃO ANALÍTICA EM CASOS PARTICULARES

ESCOAMENTO DE COEUTTE ; e de POISEUILLE

$\boxed{\text{Ex 1}}$ - ESCOAMENTO ENTRE PLACAS PARALELAS FIXAS

HIPÓTESES e CONDIÇÕES DE CONTORNO

- Movimento laminar
- Fluido viscoso em escoamento incompressível
- Regime permanente
- Escoamento entre duas placas horizontais, paralelas e infinitas
- Escoamento unidimensional (em x) $\Rightarrow \vec{v} = v_x \vec{e_x} + 0\vec{e_y} + 0\vec{e_z}$



$$\downarrow \vec{g} = -g\vec{e_y} = g_y \vec{e_y}$$

Equação da Continuidade:

$$\text{div}\,\vec{v} = 0 \text{ ou } \nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0} \quad (\mathrm{I})$$

$\therefore$ $v_x = v_x(y)$ isto é, é função apenas de y

Equação de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

REESCRITA EM COORDENADAS CARTESIANAS e CONSIDERADAS AS CONDIÇÕES DE CONTORNO:

Em x: $(\vec{e_x})$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

(1) v_x

Da equação da CONTINUIDADE (I) resulta que $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ e que v_x é dependente apenas de y:

$$0 = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad (\mathrm{II})$$

EXERCÍCIO 1 - Eq. N-S (Escoamento PLACAS PARALELAS) - CONTINUAÇÃO

Em y: $\quad 0 = \rho g_y - \dfrac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow 0 = -\rho g - \dfrac{\partial p}{\partial y} \quad$ (III)

Em z: $\quad 0 = \rho g_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow 0 = - \dfrac{\partial p}{\partial z} \quad$ (IV)

Assim esta forma simplificada da Eq. de Navier-Stokes pode ser resolvida através de integração:

Da equação (IV) $\Rightarrow$ p não é função de z

Da equação (III) $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$

$$p = -\rho g y + f_1(x) \quad \text{(V)}$$

Pode-se verificar, então, que a função da pressão p varia hidrostaticamente na direção y.

Da equação (II): $\quad \dfrac{d^2 v_x}{dy^2} = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)$

Integrando-se em relação a (dy)

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + C_1$$

Novamente integrando, resulta

$$v_x = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2 + C_1 y + C_2$$

Observar que $\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)$ foi considerado como uma constante no processo de integração acima, pois a partir da equação (V), pode-se verificar que este gradiente não é função de y.

Para determinar os valores das constantes C_1 e C_2 é preciso aplicar as condições de contorno na equação que resultou para v_x:

EXERCÍCIO 1 - ESCOAMENTO PLACAS //s FIXAS (CONTINUAÇÃO)

Assim para

$$y = \pm h \Rightarrow v_x = 0$$ (Princípio da Aderência completa)

$$\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)h^2 + C_1(\pm h) + C_2 = 0$$

logo, (analisando os termos da igualdade acima), para que a expressão seja nula temos que:

$$C_1 = 0 \quad e \quad C_2 = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)h^2$$

Assim resulta a equação para o perfil de velocidades:

$$\boxed{v_x = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - h^2)}$$

Analisando as equações acima observa-se que:

a) Perfil de velocidades para escoamento laminar entre duas placas paralelas é parabólico (placas fixas)

b) A vazão em volume (Q) por unidade de largura (em z) das placas (b) pode ser avaliada por:

$$\frac{Q}{b} = \int_{-h}^{+h} v_x\,dy = \int_{-h}^{+h} \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - h^2)\,dy$$

$$\frac{Q}{b} = -\frac{2h^3}{3\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad (VI)$$

c) Como a vazão é positiva (equação VI), o gradiente de pressão $\left(\partial p/\partial x\right)$ é negativo pois a pressão diminui no sentido do escoamento (fluido real → perde energia na forma de pressão q^do^ escoa). Representando a perda de pressão em uma distância L como sendo Δp, tem-se:

$$\frac{\Delta p}{L} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$, que pode ser substituido em (VI)

EXERCÍCIO 1 - ESCOAMENTO ~~de COUETTE~~ PLACAS //s FIXAS (CONTINUAÇÃO)

c) Continuação:

$$\frac{Q}{b} = \frac{2h^3}{3\mu} \frac{\Delta p}{L}$$

Assim neste escoamento a vazão específica (por unidade de largura) é diretamente proporcional ao gradiente de pressão, inversamente proporcional à viscosidade e fortemente influenciada pela distância entre as placas (h^3).

d) Relação entre a velocidade máxima ($v_x = v_{max}$ p/ $y=0$) e a velocidade média (V) em uma seção transversal ao escoamento.

Determina-se V (velocidade média) $= \dfrac{Q}{S} = \dfrac{Q}{2bh}$

logo $$V = \frac{Q}{b} \cdot \frac{1}{2h} = \frac{\cancel{2}h^{\cancel{3}\,2}\Delta p}{3\mu L} \cdot \frac{1}{\cancel{2h}} = \frac{h^2 \Delta p}{3\mu L} \qquad (\boxed{VII})$$

mas $$v_{max}(y=0) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(-h^2)$$

$$v_{max} = -\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \qquad (\boxed{VIII})$$

Combinando as equações ($\boxed{VII}$ e $\boxed{VIII}$) tem-se:

$$\frac{V}{v_{max}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{v_{max} = \frac{3}{2} V} \quad \text{ou}$$

$$V = \frac{2}{3} v_{max}$$

e) Determinação da pressão em qualquer ponto do campo do escoamento: pode ser realizado a partir da equação (V) ~~[illegible]~~ determinando-se $f_1(x)$:

$$f_1(x) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) x + p_0$$

onde p_0 é uma pressão de referência (p.ex. para $x=y=0$)

Assim

$$p = -\rho g y + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) x + p_0$$

{ determina a pressão em qq pto do campo do escoamento

EXERCÍCIO 1 - ESCOAMENTO PLACAS //s (CONTINUAÇÃO)

f) Parâmetros numéricos (de validação da análise)

O escoamento entre as placas (CANAL) será laminar para valores de Reynolds menores que 1400.

$$Re = \frac{\rho V (2h)}{\mu} \qquad Re < 1400$$

EXERCÍCIO 2 . ESCOAMENTO de COUETTE

- Entre placas paralelas - Escoamento em movimento laminar
- Placa superior com velocidade constante $v = v_0$
- Placa inferior fixa

Alunos - fazer exercício apostila 12 → 12.1

Resultados e Análise dos resultados:

Muda-se de 2h → p/ b e Sist. Coordenados p/a placa inf

Equação do perfil de velocidades: $v_x = v_0 \frac{y}{b} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - by)$

Adimensionalisando a equação anterior:

$$\frac{v_x}{v_0} = \frac{y}{b} - \frac{b^2}{2\mu v_0}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

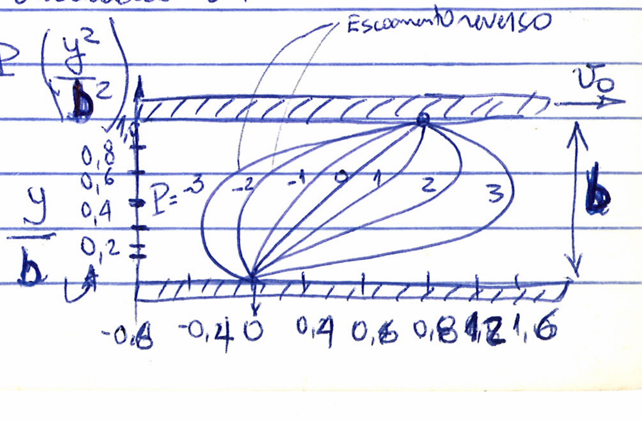
onde h é o valor da distância entre as placas

Assim o perfil de velocidades pode ser estabelecido em função de um parâmetro adimensional P, onde

$$P = -\frac{b^2}{2\mu v_0}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

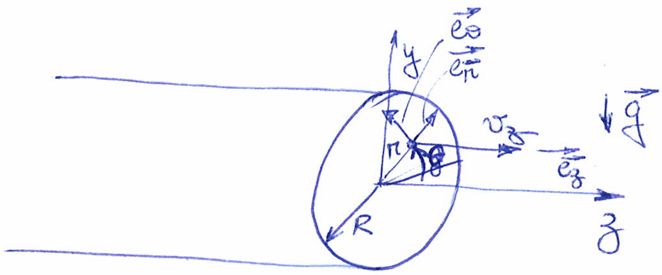
e a equação adimensional do perfil de velocidades é:

$$\frac{v_x}{v_0} = \frac{y}{b} + P\left(\frac{y}{b}\right) - P\left(\frac{y^2}{b^2}\right)$$



EXERCÍCIO 3

- ESCOAMENTO LAMINAR EM TUBOS RETOS ($D = c^{te}$)
- MOVIMENTO EM REGIME PERMANENTE
- ESTUDOS REALIZADOS POR J.L. POISEUILLE (1799-1869) e POR G.H.L. HAGEN (1797-1884) CONDUZIRAM A RESULTADOS QUE PODEM SER CONFIRMADOS PELA SOLUÇÃO DA EQ. DE NAVIER-STOKES EM TUBOS.



HIPÓTESES e CONDIÇÕES DE CONTORNO

- ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL COM VELOCIDADE $v_z = c^{te}$
  logo: $v_r = v_\theta = 0$
- Tubulação // a $\vec{e_z}$ (horizontal)
- Para $r = R \Rightarrow v_z = 0$ (Princípio Aderência completa)

* Eq. CONTINUIDADE:
  $\nabla \vec{v} = 0$
  $$\underbrace{\frac{\partial v_r}{\partial r}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}_{0} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0}$$

* Movimento em regime permanente $\rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$
* Logo $v_z = v_z(r)$, ou seja v_z é função de r.
* Assim Eq. de Navier-Stokes reduzem-se a:

  Adotando $g_r = -g\,\text{sen}\theta$ e $g_\theta = -g\cos\theta$

Em $\vec{e_r}$: $\quad 0 = -\rho g \operatorname{sen}\theta - \dfrac{\partial p}{\partial r} \qquad (A)$

Em $\vec{e_\theta}$ $\quad 0 = -\rho g \cos\theta - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} \qquad (B)$

Em $\vec{e_z}$ $\quad 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] \qquad (c)$

Integrando-se (A) e (B) para obter-se condições associadas a pressão:

$$p = -\rho g\,(r \operatorname{sen}\theta) + f_1(z)$$

Similar à equação obtida para o caso ~~da~~ das placas paralelas onde

$$p = -\rho g y + f_1(z)$$

$\Rightarrow$ pressão varia hidrostáticamente em qualquer seção transversal do tubo.

Nota-se também que a componente da pressão $\left(\partial p/\partial z\right)$ não é função de $\underline{r}$ ou de $\underline{\theta}$.

Assim a equação (C) fica:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

integrando-se:

$$r\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)r^2 + C_1$$

Novamente integrando-se:

$$v_z = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)r^2 + (\ln r)\,C_1 + C_2$$

Determina-se os valores de C_1 e C_2 a partir das condições de contorno:

- No centro do tubo: a velocidade deve ser finita $\Rightarrow C_1 = 0$
- Na parede $v_z = 0$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)R^2$$

Assim o perfil de velocidades do escoamento laminar é

$$\boxed{v_z = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(r^2 - R^2)}$$

ANALISE DOS RESULTADOS:

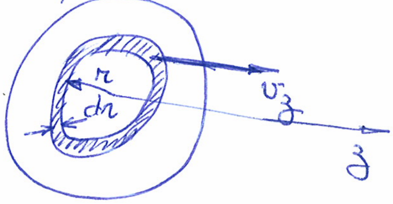
a) Perfil de velocidades é parabólico

b) DETERMINAÇÃO DA VAZÃO EM VOLUME:

$$Q = \int \vec{v} \times \vec{n}\, dS$$

Utilizando um anel circular com espessura infinitesimal:

$$dA = (2\pi r)\,dr$$



$$dQ = v_z (2\pi r)\,dr$$

$$Q = 2\pi \int_0^R v_z\, r\,dr$$

Utilizando a equação do perfil de velocidades:

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

c) EXPRESSÃO DA VAZÃO EM FUNÇÃO DA QUEDA DE PRESSÃO:

Para um comprimento L → ocorre perda Δp

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow \boxed{Q = +\frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}}$$

"Lei de Poiseuille"

d) RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE MÁXIMA (v_{max}) e VELOCIDADE MÉDIA (V)

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} \quad \text{e} \quad v_{max} = v(r=0) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(-R^2)$$

$$V = \frac{R^2 \Delta p}{8 \mu L} \qquad v_{max} = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{R^2 \Delta p}{4 \mu L}$$

Assim:

$$\boxed{v_{max} = 2 * V}$$

pode-se utilizar v_{max} na equação de v_z:

$$\frac{v_z}{v_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{ou} \quad v_z = v_{max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

e) PARÂMETROS NUMÉRICOS:

Conf. já visto em PME 2230 $Re_{D_{Laminar}} \leqslant \sim 2100$ ou 2000

Assim Equacionamento desenvolvido é aplicado para $Re = \frac{\rho V (2R)}{\mu} < \sim 2000$ //