ESCOAMENTO DE FLUIDO REAL

EQUAÇÃO de NAVIER-STOKES

- FORMA DIFERENCIAL
- RESULTA DA APLICAÇÃO DA 2ª LEI DE NEWTON A UM ELEMENTO DE MASSA DE FLUIDO EM ESCOAMENTO.
- FORÇAS NORMAIS e TANGENCIAIS
- FORÇAS DE CAMPO (GRAVITACIONAIS) e DE CONTATO
- FLUIDO NEWTONIANO

Equacionamento

* 2ª LEI DE NEWTON aplicada a dm:

$$d\vec{F}_c + d\vec{F}_s = dm \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

desenvolvendo resulta na Eq. NAVIER-STOKES: (Fluidos incompressíveis)

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

→ SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS:

Em x:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

Em y:

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

Em z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

→ SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

Em $\vec{e_r}$:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\cdot\frac{v_\theta}{r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]$$

Em $\vec{e_\theta}$:

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right] =$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]$$

Em $\vec{e_z}$:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z +$$

$$+ \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

SOLUÇÕES EXATAS

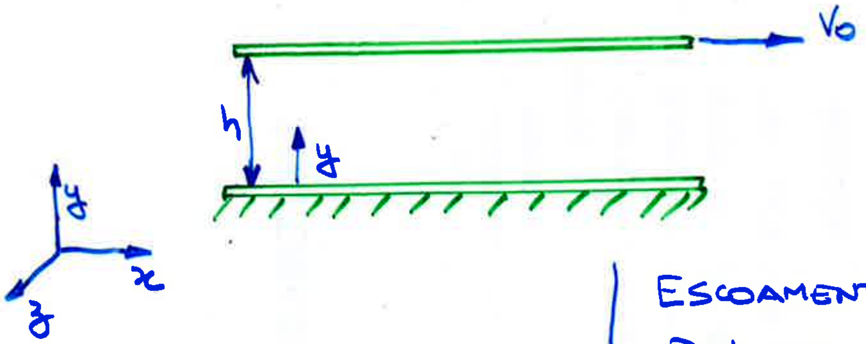
→ Possível para escoamentos em Mov. Laminar

→ Simplificações resultante das condições impostas pelas geometrias das fronteiras.

→ EXEMPLOS

- ESCOAMENTO LAMINAR EM TUBOS → → POISEUILLE
- ESCOAMENTO LAMINAR ENTRE PLACAS PARALELAS → COUETTE

EXERCÍCIO - FLUIDO REAL EQ. NAVIER-STOKES



ESCOAMENTO ENTRE PLACAS //s

Pede-se
- Determinar o diagrama de velocidades
- Calcular a (τ) Tensão de cisalhamento na placa inferior

HIPOTESES:
- Fluido em ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL
- REGIME PERMANENTE
- VELOCIDADE V_0 da PLACA = c^{te}
- p^*, pressão c^{te}
- μ, viscosidade dinâmica $\Rightarrow c^{te}$

SOLUÇÃO

Eq. de NAVIER-STOKES p/ FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

- A pressão é dada por $p^* = p + \gamma z$, onde z é a cota até um PHR
- Velocidade do escoamento $\vec{v} = v_x \cdot \vec{e_x}$ onde $v_x = v_x(x;y)$
- Sendo $p^* = c^{te} \Longrightarrow \nabla p^* = 0$

Eq. da CONTINUIDADE:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0$$

0 0

logo: $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ $\therefore$ velocidade não varia em x, só em y

Voltando à Eq. de N-S:

→ TERMO:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}}_{0\ \text{(R. Perm.)}} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \left(\text{pois } \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0\right)$$

Eq. Continuidade

→ TERMO: $\mu \nabla^2 \vec{v}$ onde $\vec{v} = v_x \vec{e_x}$

$$\mu \nabla^2 \vec{v} = \mu \left[\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}}_{0} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}}_{0} \right]$$

logo: $\mu \nabla^2 \vec{v} = \mu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ onde $v_x = v_x(y)$

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \mu \int \frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0$$

Integrando-se:

$$\frac{d v_x}{dy} = C_1$$

Novamente → $\displaystyle\int \frac{dv_x}{dy} = \int C_1 \Rightarrow \boxed{v_x = C_1 y + C_2}$

CONDIÇÕES DE CONTORNO: (determinação C_1 e C_2)

→ para $y = 0 \Rightarrow v_x = 0$ (princípio da Ader. Compl.)

→ para $y = h \Rightarrow v_x = v_0$ (" " " ")

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_1 = +\dfrac{V_0}{h} \end{array}\right\}$ $\boxed{v_x = \dfrac{V_0 y}{h}}$

ASSIM PERFIL de VELOCIDADES é LINEAR

$v_x = \dfrac{V_0 \cdot y}{h}$ e TENSÃO de CISALHAMENTO:

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} \Rightarrow \boxed{\tau = \mu \frac{V_0}{h}}$$

valor constante em todos os pontos, inclusive na parede inferior.