

Análise Diferencial dos Escoamentos

PME 3230 - Mecânica dos Fluidos I

PME/EP/USP

Prof. Antonio Luiz Pacífico

2º Semestre de 2016

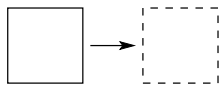
- 1 Introdução
- 2 Cinemática dos Elementos Fluidos
- 3 Conservação da Massa na Forma Diferencial
- 4 Conservação da Quantidade de Movimento na Forma Diferencial
- 5 Equações de Navier-Stokes
- 6 Soluções Exatas das Equações de Navier-Stokes
- 7 Exercícios

Nos tópicos anteriores foi desenvolvida a análise integral para as três leis de conservação: massa, energia e quantidade de movimento. Este tipo de análise é interessante quando o interesse é genérico sobre o campo de escoamento e quando se deseja apenas conhecer os efeitos deste campo sobre algum dispositivo.

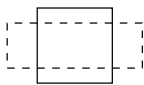
Contudo a abordagem integral não pode determinar distribuições de grandezas específicas no campo de escoamento. Por exemplo, a análise integral permite determinar o arrasto total sobre uma estrutura imersa no escoamento, mas não poderá fornecer as distribuições de tensões de cisalhamento e pressão ao redor desta estrutura que, ao final, são as grandezas que determinam o arrasto.

Este último tópico aborda, de maneira introdutória, a análise diferencial dos escoamentos, também formulando-a para duas das três leis de conservação: massa e quantidade de movimento.

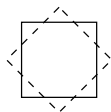
Cinemática dos Elementos Fluidos



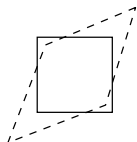
(a) translação



(c) deformação linear



(b) rotação



(d) deformação angular

Um elemento fluido possui quatro tipos fundamentais de movimento, ou deformação, ilustrados ao lado.

Em geral, no movimento real de fluidos, todos os quatro tipos de movimentos ocorrem simultaneamente.

A descrição dos movimentos acima ilustrados é feita na forma de taxas. Em particular: a velocidade e aceleração do elemento, \vec{V} e \vec{a} , respectivamente, indicam a sua taxa de translação; a velocidade angular, $\vec{\omega}$, é a medida da sua taxa de rotação; as taxas de deformação linear, ϵ , e angular, $\dot{\gamma}$, estão associadas aos movimentos (c) e (d) acima.

Translação: A translação de um elemento (ou partícula de) fluido é quantificada pelos seus vetores velocidade, \vec{V} , e aceleração, \vec{a} :

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (1)$$

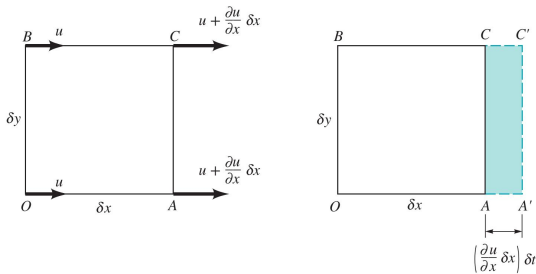
$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad (2)$$

Maiores informações sobre essas quantidades, descrições euleriana e lagrangiana do movimento; derivadas local e convectiva do vetor aceleração, entre outras associadas ao tema, devem ser recordadas do tópico T2 - Introdução à Cinemática dos Fluidos.

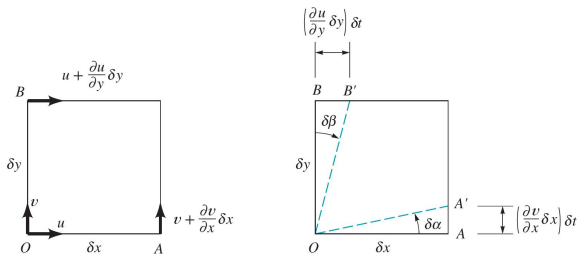
Cinemática dos Elementos Fluidos

Deformações Linear e Volumétrica: na deformação linear, a forma dos vértices do elemento fluido permanece imutável. Haverá mudança do comprimento do elemento na direção x somente se $\partial u / \partial x \neq 0$ (análogo para as direções y e z). Assim, essas derivadas parciais representam as componentes das taxas longitudinais de deformação nas três direções x , y e z . As variações no comprimento dos lados podem causar alterações no volume do elemento. A taxa de dilatação volumétrica local, instantânea, vale:

$$\text{Taxa de dilatação volumétrica} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad (3)$$



Rotação e Deformação Angular: A figura abaixo apresenta a composição de velocidades num elemento fluido que pode causar sua rotação e deformação angular.



Após as rotações dadas pelos ângulos $\delta\alpha$ e $\delta\beta$ os segmentos OA e OB vão para as novas posições OA' e OB' , respectivamente.

Cinemática dos Elementos Fluidos

As velocidades angulares dos segmentos OA e OB são dadas por:

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\alpha}{\delta t}; \quad \omega_{OB} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\beta}{\delta t}$$

Para ângulos pequenos:

$$\tan \delta\alpha \approx \delta\alpha = \frac{(\partial v / \partial x) \cdot \delta x \cdot \delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \delta t; \quad \tan \delta\beta \approx \delta\beta = \frac{(\partial u / \partial y) \cdot \delta y \cdot \delta t}{\delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \delta t$$

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\partial v / \partial x) \cdot \delta t}{\delta t} \right] = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \omega_{OB} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\partial u / \partial y) \cdot \delta t}{\delta t} \right] = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Nota: $\partial v / \partial x > 0$ para ω_{OA} anti-horário; $\partial u / \partial y > 0$ para ω_{OB} horário.

A velocidade angular em torno do eixo z , ω_z é definida como a média das velocidades angulares das duas linhas OA e OB e é tomada como positiva quando no sentido anti-horário. Assim,

$$\omega_z = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4)$$

Analogamente,

$$\omega_y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (5)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (6)$$

Logo,

$$\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (7)$$

Define-se o vetor **vorticidade** de um escoamento, $\vec{\xi}$, como sendo o dobro do vetor rotação:

$$\vec{\xi} = 2 \cdot \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (8)$$

Se $\vec{\xi} \neq 0$ num ponto de um campo de escoamento, a partícula de fluido que está naquele ponto está girando e o escoamento é dito rotacional. Ao contrário, se $\vec{\xi} = 0$ num ponto, o escoamento é dito irrotacional.

Cinemática dos Elementos Fluidos

Em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial(r \cdot V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{e}_z \quad (9)$$

Exemplos:

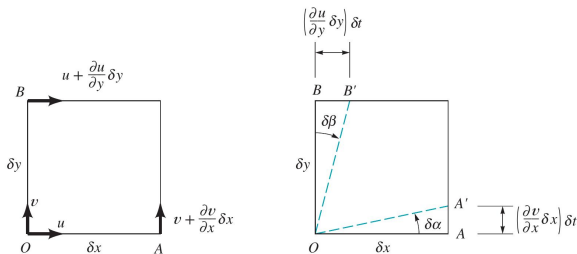
1. Considere o campo de escoamento bidimensional em r e θ dado por: $V_r = 0$ e $V_\theta = \omega \cdot r$. Este escoamento é rotacional?

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial(r \cdot V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial(\omega \cdot r^2)}{\partial r} - 0 \right) \cdot \vec{e}_z = 2 \cdot \omega \cdot \vec{e}_z \neq 0 \therefore \text{SIM!}$$

2. Considere o campo de escoamento bidimensional em r e θ dado por: $V_r = 0$ e $V_\theta = Cte/r$. Este escoamento é rotacional?

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial(r \cdot V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial Cte}{\partial r} - 0 \right) \cdot \vec{e}_z = 0 \therefore \text{NÃO!}$$

Retomando a figura anterior:



Note que as derivadas $\partial u/\partial y$ e $\partial v/\partial x$ não induzem só rotação no elemento, mas também podem provocar sua deformação angular. Chama-se $\delta\gamma$ o ângulo final, ou também deformação por cisalhamento, provocado pelas variações $\delta\alpha$ e $\delta\beta$: $\delta\gamma = \delta\alpha + \delta\beta$. A deformação por cisalhamento é positiva quando o ângulo formado pela intersecção das linhas OA' e OB' é menor que aquela formada pelas linhas OA e OB .

A taxa de deformação por cisalhamento, ou taxa de deformação angular, $\dot{\gamma}$, é dada por:

$$\dot{\gamma} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \gamma}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\partial v / \partial x) \cdot \delta t + (\partial u / \partial y) \cdot \delta t}{\delta t} \right] = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Generalizando:

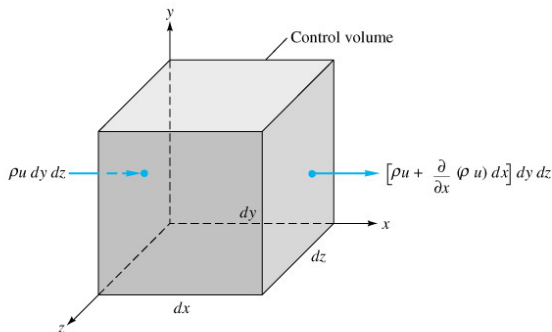
$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad (10)$$

Atenção: a definição da Eq. (10) é a fornecida pelo livro texto (Munson). Na apostila de exercícios resolvidos ela é definida como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

Equação da Continuidade na Forma Diferencial

Considere o volume de controle infinitesimal (dx, dy, dz) da figura abaixo.



A equação da conservação da massa em análise integral foi escrita como:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot d\mathcal{V} + \sum (\rho \cdot V \cdot A)_{\text{saídas}} - \sum (\rho \cdot V \cdot A)_{\text{entradas}} = 0 \quad (11)$$

Equação da Continuidade na Forma Diferencial

Como o VC agora é infinitesimal, pode-se escrever para o termo

$\int_{VC} (\partial\rho/\partial t) \cdot d\mathcal{V}$ que:

$$\int_{VC} \frac{\partial\rho}{\partial t} \cong \frac{\partial\rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (12)$$

Os termos dos fluxos de massa (entradas e saídas) ocorrem nas seis faces, sendo 3 entradas e 3 saídas. Esses 6 fluxos são resumidos na tabela abaixo.

Face	Fluxo Entrada	Fluxo Saída
x	$\rho \cdot u \cdot dy \cdot dz$	$\left[\rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \right] \cdot dy \cdot dz$
y	$\rho \cdot v \cdot dx \cdot dz$	$\left[\rho \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} \cdot dy \right] \cdot dx \cdot dz$
z	$\rho \cdot w \cdot dy \cdot dx$	$\left[\rho \cdot w + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \cdot dz \right] \cdot dy \cdot dx$

Introduzindo a Eq. (12) mais aquelas acima tabeladas na Eq. (11), resulta:

Equação da Continuidade na Forma Diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \quad (13)$$

O elemento de volume ($d\mathcal{V} = dx \cdot dy \cdot dz$) se cancela resultando na ED parcial envolvendo derivadas dos produtos $\rho \cdot V_i$, sendo $i = x, y, z$. Assim,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

A Eq. (14) é a Equação da Continuidade, ou Conservação da Massa, na forma diferencial. Manipulando-a, pode-se escrever:

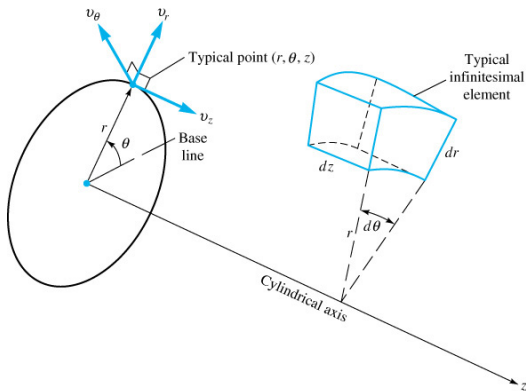
$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \bullet (\rho \cdot \vec{V}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) \bullet (\rho \cdot u \cdot \vec{i} + \rho \cdot v \cdot \vec{j} + \rho \cdot w \cdot \vec{k}) \\ &= \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \end{aligned}$$

Equação da Continuidade na Forma Diferencial

Portanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (15)$$

No sistema de coordenadas cilíndricas:



Equação da Continuidade na Forma Diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot r \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho \cdot V_z)}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

Quando o escoamento for compressível, porém em regime permanente,

$$\text{Coord. Cartesianas: } \vec{\nabla} \bullet (\rho \cdot \vec{V}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

$$\text{Coord. Cilíndricas: } \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot r \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho \cdot V_z)}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

Como ρ e \vec{V} são variáveis, para este caso, as Eqs. (17) e (18) ainda são não-lineares e, portanto, de solução mais complexa.

Quando, além do regime permanente, o escoamento também for de fluido incompressível, $\vec{\nabla} \bullet (\rho \cdot \vec{V}) = 0$, mas como ρ é, agora, constante, $\vec{\nabla} \bullet \vec{V} = 0$.

Assim,

Equação da Continuidade na Forma Diferencial

$$\text{Coord. Cartesianas: } \vec{\nabla} \bullet \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

$$\text{Coord. Cilíndricas: } \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

As Eqs. (19) e (20) são EDO's e uma ampla variedade de soluções são conhecidas para elas. Grandes são os casos práticos de engenharia onde os escoamentos podem ser considerados incompressíveis. Para gases, particularmente, pode-se considerar incompressíveis, com um erro menor que 5% quando $M < 0,3$. Ex.: No ar, escoamentos com velocidades menores que 100 m/s podem tratados como incompressíveis.

Conservação da Quantidade de Movimento na Forma Diferencial

No movimento de um fluido existem dois tipos de forças: de campo e de contato (ou superfície). Das forças de campo este curso considera apenas a devida ao campo gravitacional, força peso. As de contato podem ser devidas à pressão, atrito viscoso e outras. Designando por \vec{F}_C as de campo e por \vec{F}_S as de contato, ambas por unidade de volume:

$$\vec{F}_C = F_{c,x} \cdot \vec{i} + F_{c,y} \cdot \vec{j} + F_{c,z} \cdot \vec{k} = \rho \cdot \vec{g} \quad (21)$$

$$\vec{F}_S = F_{s,x} \cdot \vec{i} + F_{s,y} \cdot \vec{j} + F_{s,z} \cdot \vec{k}$$

Da 2ª Lei de Newton,

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F}_C + \vec{F}_S \quad (22)$$

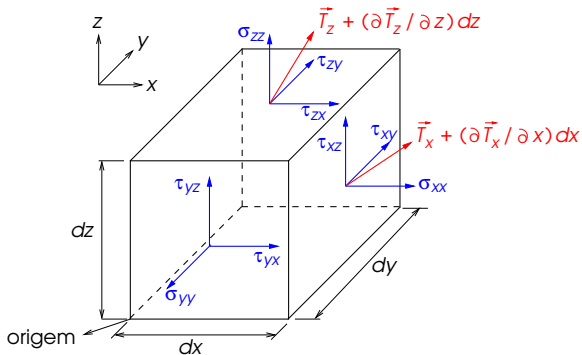
Conservação da Quantidade de Movimento na Forma Diferencial

Recordando, $D\vec{V}/Dt$ é a derivada material de \vec{V} , dada por:

$$\begin{aligned}\frac{D\vec{V}}{Dt} &= \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \bullet \nabla) \cdot \vec{V} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \\ &\quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \\ &\quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\tag{23}$$

A seguir, a figura ilustra o sistema geral de tensões num elemento de fluido deformável.

Conservação da Quantidade de Movimento na Forma Diferencial



O elemento possui volume $d\mathcal{V} = dx \cdot dy \cdot dz$. Em cada plano existe uma tensão resultante, T , dada pela soma vetorial de uma tensão normal, σ , e duas tensões de cisalhamento, τ . Na figura T é representada apenas em dois planos, a título de exemplo.

Conservação da Quantidade de Movimento na Forma Diferencial

Nomenclatura: \vec{T}_i significa tensão no plano ortogonal à direção i ; τ_{ij} significa tensão de cisalhamento no plano ortogonal à direção i , na direção j ; e σ_{ii} significa tensão normal atuante no plano ortogonal à i , na direção i .

Tomando como exemplo para análise a direção x , no plano ortogonal a x à direita atua $\vec{T}_{x+dx} = \vec{T}_x + (\partial\vec{T}_x/\partial x).dx$ e no plano ortogonal a x à esquerda atua \vec{T}_x , de modo que a tensão resultante nesta direção será dada por $(\partial\vec{T}_x/\partial x).dx$. Analogamente, para as outras direções: $(\partial\vec{T}_y/\partial y).dy$ e $(\partial\vec{T}_z/\partial z).dz$.

Note que essas tensões, se excluídas as diferenciais que as multiplicam, resultam nas forças de superfície por unidade de volume:

$$\vec{F}_s = \frac{\partial\vec{T}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{T}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{T}_z}{\partial z}$$

Conservação da Quantidade de Movimento na Forma Diferencial

onde,

$$\begin{aligned}\vec{T}_x &= \sigma_{xx} \cdot \vec{i} + \tau_{xy} \cdot \vec{j} + \tau_{xz} \cdot \vec{k} \\ \vec{T}_y &= \tau_{yx} \cdot \vec{i} + \sigma_{yy} \cdot \vec{j} + \tau_{yz} \cdot \vec{k} \\ \vec{T}_z &= \tau_{zx} \cdot \vec{i} + \tau_{zy} \cdot \vec{j} + \sigma_{zz} \cdot \vec{k}\end{aligned}\quad (24)$$

Na Eq. (24) os nove componentes formam o que se costumou chamar de **matriz de tensões**, π , ou tensor de tensões:

$$\pi = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}\quad (25)$$

Pode-se demonstrar que esta matriz é simétrica. Assim, $\tau_{mn} = \tau_{nm}$.
Conseqüentemente,

Conservação da Quantidade de Movimento na Forma Diferencial

$$\pi = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Assim, a força de superfície, por unidade de volume, fica:

$$\begin{aligned} \vec{F}_s = & \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \\ & \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \cdot \vec{j} + \\ & \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (27)$$

Introduzindo as Eqs. (27), (23) e (21), escrita em termos de seus componentes, na Eq. (22), obtém-se:

Conservação da Quantidade de Movimento na Forma Diferencial

$$\begin{aligned}\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho \cdot g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho \cdot g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho \cdot g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\end{aligned}\tag{28}$$

A eq. (28) é a equação da conservação da quantidade de movimento na forma diferencial. Se o escoamento for invíscido, desaparecem anulam-se as tensões de cisalhamento e, além disso, as tensões normais passam a ser iguais:

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 ; \text{ e } \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

Conservação da Quantidade de Movimento na Forma Diferencial

Para o caso completo, i.e., escoamento viscoso, as tensões de cisalhamento não são nulas e a pressão, p , é definida como a média aritmética das tensões normais com sinal negativo, uma vez que pressão é sempre uma tensão normal de compressão:

$$\frac{1}{3} \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -p \quad (29)$$

O próximo passo é escrever as tensões normais e de cisalhamento, na equação da conservação da quantidade de movimento, em termos de gradientes de velocidade de pressão. O resultado é o que se costumou chamar de Equações de Navier-Stokes.

Como visto no início deste tópico, o movimento completo de um elemento fluido abrange 4 movimentos, a saber:

- 1 translação pura, descrita pelos componentes u , v e w de \vec{V} ;
- 2 rotação de um corpo rígido, descrita por $\vec{\xi} = 2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$;
- 3 dilatação volumétrica, descrita por $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$;
- 4 deformação angular (ou por cisalhamento), descrita por $\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$

Os movimentos (1) e (2) geram meros deslocamentos de posição, porém (3) e (4) geram deformações (distorções).

A análise que se segue é válida somente para fluidos newtonianos, $\tau = \mu \cdot (dV/dy)$, e incompressíveis. O tratamento para fluidos compressíveis e/ou não-newtonianos está fora do escopo deste curso.

Equações de Navier-Stokes

Na a matriz de tensões, Eq. (26), seus componentes, para fluidos newtonianos incompressíveis, são dados por:

$$\sigma_{xx} = -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (30)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \quad (31)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad (32)$$

$$\tau_{xy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (33)$$

$$\tau_{yz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (34)$$

$$\tau_{xz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (35)$$

Equações de Navier-Stokes

Inserindo as Eqs. (30) a (35) na Eq. (28), chega-se a (apresentando desenvolvimento apenas para a direção x):

$$\underbrace{\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right)}_{\rho \cdot \frac{Du}{Dt}} = \underbrace{\rho \cdot g_x}_{F_{c,x}} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}}_{F_{s,x}}$$

$$\begin{aligned} F_{s,x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z \cdot \partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z \cdot \partial x} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \nabla^2 \cdot u + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \nabla^2 \cdot u + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{aligned}$$

Equações de Navier-Stokes

Para fluidos incompressíveis $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$. Assim,

$$F_{s,x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \nabla^2 \cdot u \quad (36)$$

Fazendo o mesmo para as direções y e z chega-se ao conjunto de equações conhecidas como Equações de Navier-Stokes (no caso, para escoamento de fluido incompressível e newtoniano).

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (37)$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (38)$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (39)$$

Equações de Navier-Stokes

Em notação vetorial:

$$\rho \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \bullet \vec{\nabla}) \cdot \vec{V} \right]}_{\frac{D\vec{V}}{Dt}} = \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot p + \mu \cdot \nabla^2 \cdot \vec{V} \quad (40)$$

A Eq. (40) e suas componentes, Eqs. (37) a (39), constituem a base do movimento de fluidos incompressíveis e newtonianos.

Estas equações mais a da continuidade ainda não determinam todas as incógnitas do campo de escoamento (u, v, w, p, ρ) , pois juntas são 4 equações para 5 incógnitas. A 5ª equação é a da energia, que não é abordada neste curso.

Estas equações foram determinadas por Claude-Louis Navier em 1827 e S. D. Poisson em 1831. Mais tarde, foram também obtidas por outro caminho por B. de Saint Venant em 1843 e George Gabriel Stokes em 1845.

Estas equações apresentam uma enorme dificuldade para serem resolvidas, e até hoje não se tem uma solução analítica para elas devido, principalmente, ao fato de serem não lineares. Tal caráter de não-linearidade é dado pelos termos

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ; v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} ; w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$$

No livro texto (Munson) recomenda-se a leitura das páginas 322 a 330, item 6.10, onde é apresentado, embora de modo bem introdutório, a técnica CFD, abreviação das palavras em inglês *Computational Fluid Dynamics*.

A formulação destas equações em coordenadas cilíndricas é mostrada a seguir.

$$\begin{aligned} & \rho \cdot \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \cdot \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = \\ & - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \cdot g_r + \mu \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

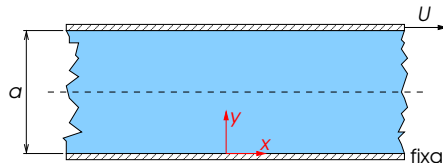
$$\begin{aligned} & \rho \cdot \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r \cdot V_\theta}{r} + V_z \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = \\ & - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho \cdot g_\theta + \mu \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \rho \cdot \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \cdot \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \\ & - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot g_z + \mu \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (43)$$

Em geral, encontrar soluções exatas para as Equações de Navier-Stokes (ENS) apresentam-se enormes dificuldades matemáticas, dada sua não-linearidade. Por outro lado, alguns casos particulares e de interesse prático têm soluções analíticas mais simples. Dentre esses casos, os principais são:

- escoamento viscoso entre placas planas;
- escoamento de Couette;
- escoamento de Poiseuille;
- escoamento viscoso em duto;
- escoamento viscoso em espaço annular;
- escoamento viscoso em superfícies verticais.

Escoamento Viscoso Entre Placas Planas



- hipóteses: (1) esc. plena/e desenvol. e plano
(2) esc. laminar
(3) esc. isotérmico
(4) so/e grav. como força de campo
(5) viscosidade constante
(6) fluido incompressível
(7) esc. em reg. perman.

Neste escoamento: $u = u(x, y, t)$
 $v = w = 0$
 $\rho = \rho(x, y, t)$
 $\partial / \partial z = 0$

Escoamento laminar
em regime permanente entre duas placas planas infinitas

Da hipótese (6), via equação da conservação da massa:

$\vec{\nabla} \bullet \vec{V} = 0 \therefore \partial u / \partial x = 0$. Logo $u = u(y, t)$. Mas da hipótese (7), $u = u(y)$ somente. Deste modo, a ENS na direção x , fica:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (44)$$

Escoamento Viscoso Entre Placas Planas

As condições de contorno são: (a) para $y = 0 \Rightarrow u = 0$; e (b) para $y = a \Rightarrow u = U$. Assim, integrando duas vezes a Eq. (44), resulta:

$$u(y) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot y^2 + \frac{C_1}{\mu} \cdot y + C_2 \quad (45)$$

e aplicando as condições de contorno:

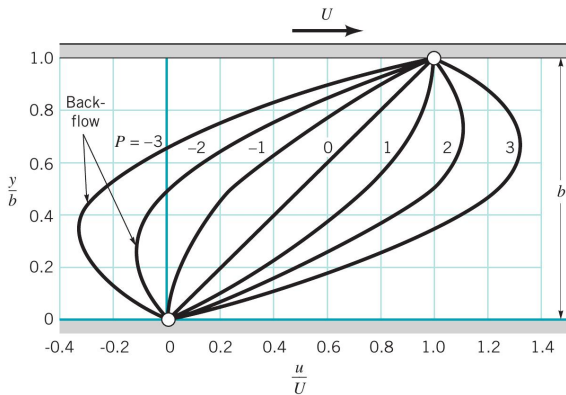
$$\frac{u(y)}{U} = \frac{y}{a} - \frac{a^2}{2 \cdot \mu \cdot U} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{y}{a} \right) \cdot \left(1 - \frac{y}{a} \right) \quad (46)$$

O livro texto designa por $P = -\frac{a^2}{2 \cdot \mu \cdot U} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$, assim:

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{y}{a} + P \cdot \left(\frac{y}{a} \right) \cdot \left(1 - \frac{y}{a} \right) \quad (47)$$

Escoamento Viscoso Entre Placas Planas

A figura abaixo ilustra os perfis de velocidade, dados pela Eq. (37) tendo P como parâmetro. Dois casos são mais importantes e serão discutidos adiante: (a) quando $\partial p/\partial x = 0$ e $U \neq 0$; e (b) quando $\partial p/\partial x = Cte$ e $U = 0$.



Escoamento Viscoso Entre Placas Planas

Neste escoamento específico, como $v = w = 0$ e $u = u(y)$, a única tensão de cisalhamento presente será:

$$\tau_{xy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Como a Eq. (44) integrada só uma vez dá:

$$\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot y + C_1$$

pode-se escrever, portanto, que,

$$\tau_{xy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot y + C_1$$

Das condições de contorno:

$$C_1 = \frac{\mu \cdot U}{a} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

Escoamento Viscoso Entre Placas Planas

Finalmente,

$$\tau_{xy} = \frac{\mu \cdot U}{a} + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot \left(y - \frac{a}{2} \right) \quad (48)$$

A vazão por unidade largura, b , será:

$$\frac{Q}{b} = \int_{y=0}^{y=a} u(y) \cdot dy = \int_{y=0}^{y=a} \left[\frac{U \cdot y}{a} - \frac{a^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{y}{a} \right) \cdot \left(1 - \frac{y}{a} \right) \right] \cdot dy$$
$$\frac{Q}{b} = \frac{U \cdot a}{2} - \frac{a^3}{12 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (49)$$

E a velocidade média na direção do escoamento, \bar{u} , é dada por:

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{b \cdot a} = \frac{U}{2} - \frac{a^2}{12 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (50)$$

Escoamento de Couette Plano

Este escoamento é o obtido quando $\partial p / \partial x = 0$ e $U \neq 0$. De acordo com a figura generalizada de perfis de velocidade, isto resulta em $P = 0$ e uma distribuição de velocidades linear. Neste caso, com $P = 0$, a Eq. (47) resulta em:

$$u(y) = \frac{U}{a} \cdot y \quad (51)$$

Além do perfil de velocidade pode-se calcular para este caso:

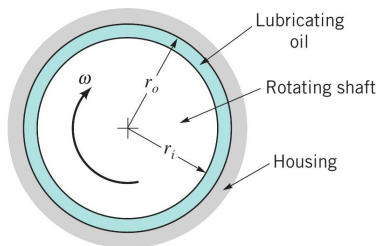
$$\tau_{xy} = \mu \cdot \frac{U}{a} \quad (52)$$

$$\frac{Q}{b} = \frac{U \cdot a}{2} \quad (53)$$

$$\bar{u} = \frac{U}{2} \quad (54)$$

Escoamento de Couette Plano

O escoamento de Couette plano é importante em mancais de deslizamento (com lubrificante preenchendo o espaço anular). Pode-se adotar perfil linear de velocidade entre mancais quando a folga entre eixo e mancal for pequena ($r_o - r_i \ll r_i$, Cf. figura abaixo).



Na figura ao lado $U = r_i \cdot \omega$ e a folga vale $b = r_o - r_i$. Uma vez que o perfil de velocidade é linear no fluido que preenche o mancal,

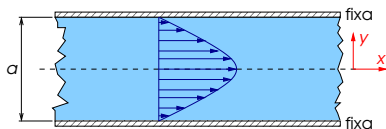
$$V_r = \frac{U}{b} \cdot (r_o - r) \quad (55)$$

$$\tau_r = \frac{\mu \cdot U}{b} \quad (56)$$

Escoamento de Poiseuille

Também conhecido como escoamento de Hagen-Poiseuille. Este escoamento ocorre tanto entre placas planas infinitas e fixas como no interior de dutos de seção circular. Neste item apresenta-se o escoamento entre placas planas infinitas e fixas e, no seguinte, para tubos (dutos de seção circular).

Este escoamento é o obtido quando $\partial p / \partial x = Cte$ e $U = 0$ (placas fixas)¹. De acordo com a figura generalizada de perfis de velocidade, isto resulta em $P \neq 0$.



Escoamento de Poiseuille

Partindo da ENS para direção x , Eq. (44), com as condições de contorno: $y = a/2 \Rightarrow u = 0$ e $y = -a/2 \Rightarrow u = 0$, chega-se às seguintes soluções:

$$u(y) = \frac{1}{8 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot (4 \cdot y^2 - a^2) \quad (57)$$

$$\tau_{xy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot y \quad (58)$$

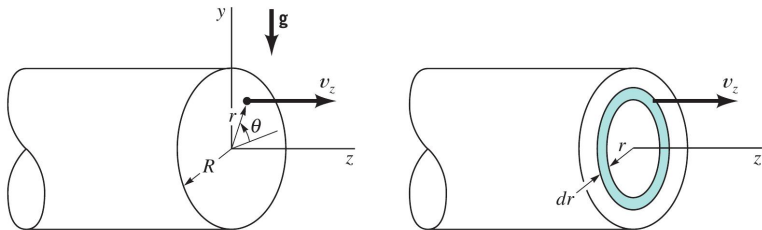
$$\frac{Q}{b} = -\frac{a^3}{12 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (59)$$

$$\bar{u} = -\frac{a^2}{12 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (60)$$

$$u_{max} = \frac{3 \cdot \bar{u}}{2} \quad (61)$$

Escoamento Viscoso em Tubos

Este escoamento também é conhecido como escoamento laminar de fluido incompressível de Hagen-Poiseuille. Para este caso, o sistema de coordenadas cilíndricas é mais adequado. A figura abaixo ilustra as principais variáveis envolvidas neste tipo de escoamento.



Na figura acima, θ é medido a partir do plano horizontal (zx) no sentido anti-horário.

Escoamento Viscoso em Tubos

Neste escoamento $V_r = 0$ e $V_\theta = 0$. Assim, aplicando a equação da conservação da massa, resulta: $\partial V_z / \partial z = 0 \Rightarrow V_z$ é independente de z , logo $V_z = V_z(r, \theta)$. Porém, levando em consideração que o escoamento é axissimétrico, $V_z = V_z(r)$ somente.

As ENS para a direção de interesse, i.e., direção z é:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right] \quad (62)$$

A Eq. (62), integrada duas vezes, resulta:

$$V_z = \frac{1}{4\mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot r^2 + C_1 \cdot \ln(r) + C_2 \quad (63)$$

As condições de contorno são: para $r = 0 \Rightarrow \partial V_z / \partial r = 0$ o que resulta em $C_1 = 0$; a outra é que para $r = R \Rightarrow V_z = 0$ o que resulta em

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot R^2$$

Finalmente,

$$V_z(r) = \frac{1}{4.\mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot (r^2 - R^2) \quad (64)$$

A vazão é determinada por $dQ = V_z(r).2.\pi.r.dr$, logo,

$$Q = 2.\pi. \int_0^R V_z(r).r.dr \Rightarrow Q = -\frac{\pi.R^4}{8.\mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (65)$$

Considerando uma perda de carga finita entre 2 pontos fixos no duto, Δp , separados por uma distância L , segue-se que $-\partial p/\partial z = \Delta p/L$ (para $\Delta p = p_{montante} - p_{jusante}$). Assim,

$$Q = \frac{\pi.R^4.\Delta p}{8.\mu.L}$$

Escoamento Viscoso em Tubos

Velocidade média: $\overline{V}_z = Q/A$:

$$\overline{V}_z = \frac{R^2 \cdot \Delta p}{8 \cdot \mu \cdot L} \quad (66)$$

Velocidade máxima:

$$V_{z,max} = \frac{R^2 \cdot \Delta p}{4 \cdot \mu \cdot L} \quad (67)$$

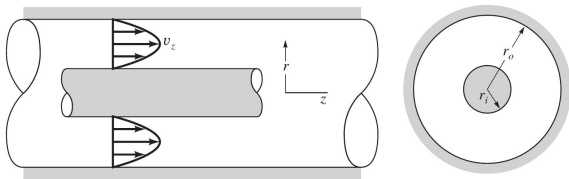
Observe que $V_{z,max} = 2 \cdot \overline{V}_z$. Assim,

$$V_z = V_{z,max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (68)$$

Como já era conhecido de aulas de tópicos anteriores deste curso.

Escoamento Viscoso em Espaço Anular

Escoamento importante para trocadores de calor. As condições de escoamento nesta configuração são:



$V_z = 0$ tanto para $r = r_i$ como para $r = r_o$. A Eq. (63) também se aplica aqui como solução do campo de velocidades na direção z . Utilizando as novas condições de contorno:

$$V_z(r) = \frac{1}{4\mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot \left[r^2 - r_o^2 + \frac{r_i^2 - r_o^2}{\ln(r_o/r_i)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_o}\right) \right] \quad (69)$$

Para o cálculo da vazão:

$$Q = \int_{r_i}^{r_o} V_z(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$

Escoamento Viscoso em Espaço Anular

Cujo resultado é:

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot \left[r_o^4 - r_i^4 - \frac{(r_o^2 - r_i^2)^2}{\ln(r_o/r_i)} \right] \quad (70)$$

Ou, utilizando a definição $-\partial p/\partial z = \Delta p/L$:

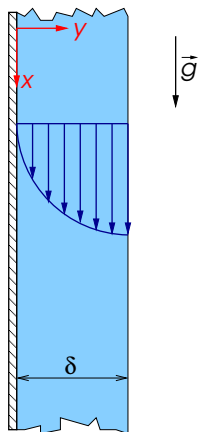
$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\mu L} \cdot \left[r_o^4 - r_i^4 - \frac{(r_o^2 - r_i^2)^2}{\ln(r_o/r_i)} \right] \quad (71)$$

$V_{z,max}$ ocorre para posição radial r_m , dada por:

$$r_m = \sqrt{\frac{r_o^2 - r_i^2}{2 \ln(r_o/r_i)}} \quad (72)$$

★ Ler comentário do Munson sobre diâmetro hidráulico ao final da página 320 e início da página 321.

Escoamento Viscoso em Superfícies Verticais



Considerando escoamento de fluido newtoniano, viscoso e incompressível, em regime permanente e laminar (completamente desenvolvido), verticalmente descendente, com espessura δ constante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ECM: } \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \\ v = w = 0 \end{array} \right\} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \therefore u = u(y)$$

$$\text{ENS, direção } x: 0 = \rho \cdot g_x + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

OBS: há superfície livre, logo $\partial p / \partial x = 0$. Assim,

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho \cdot g$$

Escoamento Viscoso em Superfícies Verticais

Integrando,

$$u = -\frac{\rho \cdot g}{\mu} \cdot \frac{y^2}{2} + C_1 \cdot y + C_2$$

Condições de contorno: $y = 0 \Rightarrow u = 0$; e $y = \delta \Rightarrow \partial u / \partial y = 0$ (desprezando a resistência do ar).

Aplicando essas condições, resulta $C_2 = 0$ e $C_1 = \rho \cdot g \cdot \delta / \mu$. Finalmente,

$$u(y) = \frac{\rho \cdot g \cdot \delta^2}{\mu} \cdot \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (73)$$

A tensão de cisalhamento será:

$$\tau_{xy} = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \cdot g \cdot (\delta - y) \quad (74)$$

Escoamento Viscoso em Superfícies Verticais

Vazão por unidade de largura, Q/b :

$$Q = \int_0^{\delta} u(y) \cdot b \cdot dy \Rightarrow \frac{Q}{b} = \int_0^{\delta} u(y) \cdot dy$$

$$\frac{Q}{b} = \frac{\rho \cdot g \cdot \delta^3}{3 \cdot \mu} \quad (75)$$

Velocidade média, \bar{u} :

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} \Rightarrow \bar{u} = \frac{\rho \cdot g \cdot \delta^2}{3 \cdot \mu} \quad (76)$$

TODO EQUACIONAMENTO DAS SOLUÇÕES EXATAS (OU SIMPLES) DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES FOI FEITO CONSIDERANDO ESCOAMENTO LAMINAR COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO.

Enunciado: Os três componentes do vetor velocidade de um escoamento são:

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

$$v = x.y + y.z + z^2$$

$$w = -3.x.z - \frac{z^2}{2} + 4$$

- (a) Determine a taxa de dilatação volumétrica e interprete o resultado;
(b) Determine a expressão do vetor rotação. Este escoamento é irrotacional?
[(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.4]

Enunciado: Um escoamento unidimensional é descrito por:

$$u = a.y + b.y^2$$

$$v = w = 0$$

onde a e b são constantes e diferentes de zero. Este escoamento é irrotacional? Qual é a combinação das constantes que propicia uma taxa de deformação angular nula? [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.6]

Enunciado: Uma série de experimentos realizados num escoamento tridimensional e incompressível indicou que $u = 6.x.y^2$ e $v = -4.y^2.z$. Entretanto, os dados relativos a velocidade na direção z apresentam conflitos. Um conjunto de dados experimentais indica que $w = 4.y.z^2$ e outro indica $w = 4.y.z^2 - 6.y^2.z$. Qual dos dois conjuntos é o correto? Justifique sua resposta. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.10]

Enunciado: Um campo de velocidade é dado por:

$$\vec{V} = (3.y^2 - 3.x^2).\vec{i} + C.x.y.\vec{j} + 0.\vec{k}$$

Determine o valor da constante C , sendo o escoamento: **(a)** incompressível; e **(b)** irrotacional. [(WHITE, 2002), exercício 4.9]

Enunciado: A velocidade de um escoamento de fluido invíscido em cantos é dada por:

$$\vec{V} = a.(x^2 - y^2).\vec{i} - 2.a.x.y.\vec{j} + 0.\vec{k}$$

Verificar se o escoamento é irrotacional.

Enunciado: Um tanque de volume \mathcal{V} contém gás nas condições (ρ_0, p_0, T_0) . No tempo $t = 0$, o tanque é perfurado por um orifício de área A . Sabe-se que o fluxo de massa que sai por este orifício é aproximadamente proporcional a A e à pressão no tanque. Supondo que a temperatura no tanque seja constante e o gás seja perfeito, encontre uma expressão para a variação da pressão dentro do tanque. [(WHITE, 2002), exercício 4.23]

Enunciado: Um fluido escoar em condições tais que sua massa específica, ρ , é função apenas do tempo. Dado o campo de velocidades:

$$u = 4.x ; v = -2.y$$

pede-se: **(a)** a expressão de $\rho(t)$ para que o escoamento seja possível; e **(b)** a equação das linhas de corrente. [Apostila, exercício 2.35]

Enunciado: Um amortecedor a gás na suspensão de um automóvel comporta-se como um dispositivo pistão-cilindro. No instante em que o pistão está a L afastado da extremidade fechada do cilindro, a massa específica do gás é uniforme e vale ρ e o pistão começa a se mover, afastando-se da extremidade fechada do cilindro com velocidade V_p . A velocidade do gás é unidimensional e proporcional à distância em relação à extremidade fechada, variando linearmente de zero, na extremidade, a $V_g = V_p$ conforme o pistão se afasta da extremidade fechada. Obtenha uma expressão para a massa específica média do gás em função do tempo. [(FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006), exercício 5.2]

Enunciado: O campo de velocidade do escoamento bidimensional e incompressível de glicerina a 20 °C (fluido newtoniano) é descrito por:

$$\vec{V} = (12.x.y^2 - 6.x^3).\vec{i} + (18.x^2.y - 4.y^3).\vec{j}$$

onde x e y são dados em metros e a velocidade em m/s. Determine as tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} no ponto ($x = 0,5$ m; $y = 1,0$ m) se a pressão neste ponto é igual a 6 kPa. Faça um esboço para apresentar estas tensões.

[(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.69]

Enunciado: Mostre que a componente na direção z do vetor vorticidade, ξ_z , de um escoamento incompressível no plano xy varia de acordo com

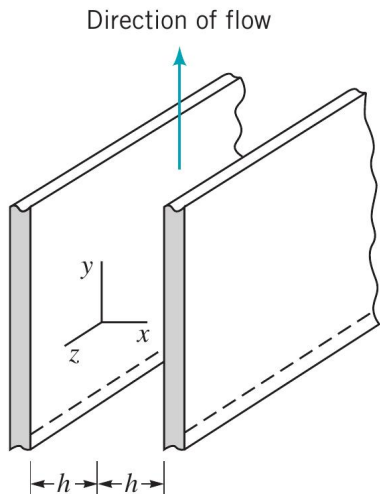
$$\frac{D\xi_z}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \xi_z$$

Qual é a interpretação física desta equação num escoamento invíscido?
[(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.71]

Enunciado: Uma lâmina de fluido viscoso, com espessura constante, escoar em regime permanente num plano infinito e inclinado (a velocidade perpendicular a placa é nula). Utilize as Equações de Navier-Stokes para obter uma equação que relacione a espessura da lâmina com a vazão no filme (por unidade de largura). O escoamento é laminar e a tensão de cisalhamento na superfície livre da lâmina é nula. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.76]

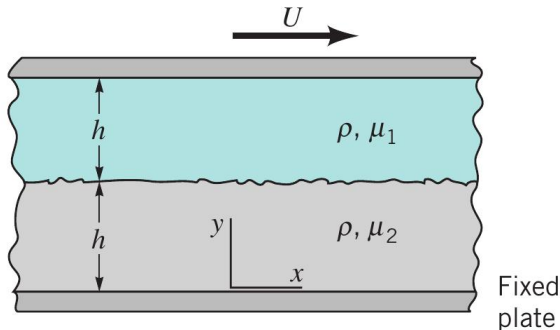
Exercício de Aula 12

Enunciado: Um fluido viscoso escoá, em regime permanente, entre as duas placas infinitas, verticais e paralelas indicadas na figura ao lado. Utilize as Equações de Navier-Stokes para determinar o gradiente de pressão na direção do escoamento. Admita que o escoamento é laminar e incompressível. Expresse seu resultado em função da velocidade média do escoamento. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.77]



Exercício de Aula 13

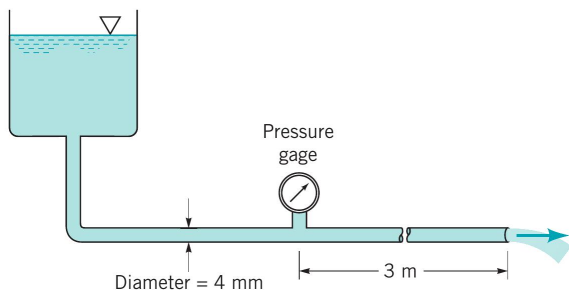
Enunciado: Dois fluidos imiscíveis, incompressíveis e viscosos escoam entre as placas infinitas, paralelas e horizontais mostradas na figura abaixo. As massas específicas dos fluidos são iguais mas as viscosidades são diferentes. A placa inferior é imóvel e



a superior apresenta o movimento indicado na figura. Determine a velocidade na interface dos fluidos. Expresse seus resultados em função de U , μ_1 e μ_2 . O escoamento é promovido apenas pelo movimento da placa superior, ou seja, não existe gradiente de pressão na direção x . Os perfis de velocidade e de tensão de cisalhamento são contínuos na interface entre os fluidos. Admita que o escoamento é laminar. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.81]

Exercício de Aula 14

Enunciado: O arranjo experimental indicado ao lado pode ser utilizado para estudar escoamentos em regime permanente em tubos. O líquido contido no reservatório apresenta viscosidade dinâmica igual a $0,015 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$



e massa específica igual a $1200 \text{ kg}/\text{m}^3$. O escoamento descarrega para a atmosfera com velocidade média de $1 \text{ m}/\text{s}$. **(a)** Qual é o regime do escoamento no tubo? **(b)** Qual é a leitura no manômetro sabendo que o escoamento é plenamente desenvolvido no trecho da tubulação localizado a jusante do manômetro. **(c)** Qual é o módulo da tensão de cisalhamento na parede do tubo, τ_{rz} , na região com escoamento plenamente desenvolvido? [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.90]

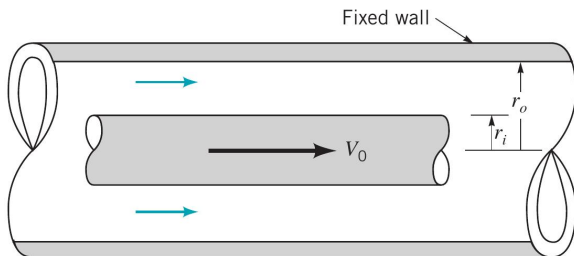
Enunciado: (a) Um fluido Newtoniano com viscosidade dinâmica μ escoou num tubo (escoamento de Poiseuille). Mostre que a tensão de cisalhamento na parede do tubo, τ_{rz} , é dada por

$$|(\tau_{rz})_{parede}| = \frac{4 \cdot \mu \cdot Q}{\pi \cdot R^3}$$

onde a vazão do escoamento no tubo é Q . (b) Um fluido com viscosidade dinâmica igual a $0,003 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ escoou num tubo com diâmetro interno igual a 2 mm e velocidade média de $0,1 \text{ m/s}$. Nestas condições, determine o módulo da tensão de cisalhamento na parede. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.92]


Exercício de Aula 16


Enunciado: A figura abaixo mostra um fluido newtoniano escoando, em regime permanente, num canal anular e longo. O cilindro externo é imóvel, mas o interno apresenta velocidade V_0 . Qual deve ser o valor de V_0 para que o arrasto no cilindro interno seja nulo? Admita que o escoamento é laminar, incompressível, axissimétrico e plenamente desenvolvido. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.93]




Enunciado: Um fio com diâmetro d está instalado na linha de centro de um tubo que apresenta diâmetro interno D . Admita que a queda de pressão por unidade de comprimento de tubo é constante. Determine a redução na vazão em volume no tubo se: **(a)** $d/D = 0,1$; e **(b)** $d/D = 0,01$. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 6.101]

Enunciado: Um líquido viscoso enche o espaço anular entre dois cilindros concêntricos verticais. O cilindro interno é estacionário e o cilindro externo gira com velocidade constante. O escoamento é laminar. Simplifique as equações da continuidade, de Navier-Stokes e da tensão de cisalhamento tangencial para modelar este campo de escoamento. Obtenha expressões para o perfil de velocidades do líquido e para a distribuição de tensões de cisalhamento. Compare a tensão de cisalhamento na superfície do cilindro interior com aquela calculada por meio de uma aproximação obtida pelo “desdobramento” do espaço anular em um plano e com a consideração de um perfil de velocidade linear através da folga. Determine a razão entre os raios dos cilindros para a qual a aproximação “planar” prediz a tensão de cisalhamento na superfície do cilindro interno com incerteza máxima de 1%. [(FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006), exemplo 5.10]

 FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. ISBN 978-85-216-1468-5.

 MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentos da Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. São Paulo: Blücher, 2004. ISBN 978-85-212-0343-8.

 WHITE, F. M. *Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. Rio de Janeiro: McGraw Hill, 2002. ISBN 978-85-868-0424-3.