TEOREMA de TRANSPORTE de REYNOLDS

DERIVADA DE UMA VARIÁVEL DE VOLUME EM VARIÁVEIS DE EULER

- FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES BÁSICAS EM TERMOS DE VOLUME DE CONTROLE (REGIÃO DE CONTROLE) AO INVÉS DE UTILIZAR SISTEMA

GRANDEZAS GENÉRICAS (N, F)

- EXTENSIVAS : N
- INTENSIVAS : η (por unidade de massa)
- ESPECÍFICAS : f (por unidade de volume)

$$N_{(t)} = \int_{m_{SIST.(t)}} \eta \, dm = \int_{\forall_{SIST(t)}} \rho \, \eta \, d\forall$$

$$F_{(t)} = \int_{\forall_{SIST(t)}} f \, d\forall \quad \therefore \quad \boxed{\rho \cdot \eta = f}$$

FORMULAÇÃO GERAL:

$$\left.\frac{dN}{dt_0}\right)_{SIST} = \frac{\partial}{\partial t_0} \int_{\forall.C.} \eta \rho \, d\forall + \int_{S.C.} \eta \rho \, \vec{v} \times \vec{n} \, dS$$

Taxa de variação total para o Sistema no instante t_0 (Grandeza Genérica N)

Taxa de variação local de η (P,t) em relação ao tempo, supondo que ∀.C. está coincidindo c/ o sistema então

Taxa resultante do Fluxo da propriedade η (t_0) através da S.C. no instante t_0

OU pode-se formular de outro modo:

$$\underbrace{\frac{d}{dt_o}\int_{\forall_{SIST.}\,(\text{móvel})} f(P,t)\,d\forall}_{I} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t_o}\int_{\forall.C._o\,(\text{fixo})} f(P,t)\,d\forall}_{II} + \underbrace{\int_{SC_o\,(\text{fixo})} f(P,t_o)\,\vec{v}\times\vec{n}\,dS_o}_{III}$$

ONDE:

I → Pode ser escrito como: $\left.\frac{d}{dt_o} F(P,t)\right|_{\substack{\text{SISTEMA}\\(\text{móvel})}}$

II → Derivada local, calculada supondo o corpo fluido em repouso em relação à S (Sist. Ref.), no instante t_o, onde o $\forall$.C. está fixo coincidente com $\forall_{SIST}$, e considerando $f(P,t)$ função só do tempo.

III → Termo convectivo, que é determinado supondo $f(P,t) = f(P,t_o)$ (no instante t_o) invariável com o tempo e supondo $\forall_{SIST}$ movendo-se, ocorrendo um fluxo (vazão) de $f(P,t_o)$ através de $S.C._o$

Observacão:

Movimentos contínuos, f e suas derivadas de 1ª ordem são contínuas, os operadores (sinais) da derivado local e da integral sao permutáveis:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} f\,d\forall = \int_{V.C.} \frac{\partial f}{\partial t}\,d\forall$$

Para um CAMPO PERMANENTE: $f(P,t)$ não varia c/ t este termo é <u>nulo</u> $\left(\partial/\partial t \int_{\forall.C.} f\,d\forall = 0\right)$

EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

FORMA INTEGRAL:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C_{(t_0)}} \rho \, d\forall + \int_{SC_{(t_0)}} \rho \, \vec{v} \times \vec{n} \, dS = 0$$

CASOS PARTICULARES:

- MOVIMENTO PERMANENTE:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C(t_0)} \rho \, d\forall = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{SC} \rho \, \vec{v} \times \vec{n} \, dS = 0$$

Lei dos Nós: $\Sigma M_i = 0$

- FLUIDO INCOMPRESSÍVEL
  (PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DO VOLUME)

$$\frac{d\forall}{dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} d\forall}_{\forall \text{ conserva-se} \Rightarrow 0} + \int_{SC} \vec{v} \times \vec{n} \, dS = \int_{SC} \vec{v} \times \vec{n} \, dS$$

ASSIM RESULTA P/ CORPO FLUIDO INCOMPRESSÍVEL, de VOLUME INVARIÁVEL:

$$\int_{SC} \vec{v} \times \vec{n} \, dS = 0$$

Lei dos Nós: $\Sigma Q_i = 0$

- UTILIZAÇÃO de VALORES MÉDIOS NA SEÇÃO
  - ESCOAMENTO UNIFORME NA SEÇÃO
  - ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL NA SEÇÃO

$\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ · massa específica não varia de pto. a pto.
· perfil de velocidades pode ser subst. por $V_{média}$

EQUAÇÃO da ENERGIA CINÉTICA

Forma Geral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\left(\frac{v^2}{2}+gz\right)\rho\, d\forall + \int_{SC}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)\rho\, \vec{v}\times\vec{n}\, dS =$$

$$= \int_{\forall C} p \,\mathrm{div}\,\vec{v}\, d\forall + W_m + W_{ea} - W_a$$

'' W_{ia}

CASOS PARTICULARES:

A) FLUIDO INCOMPRESSÍVEL → V.C. Indeformável

- $W_{i,c,p} = \int_{\forall C} p \,\mathrm{div}\,\vec{v}\, d\forall = 0$ pois $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ (Eq. Cont.)
- $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho g z\, d\forall = g\left[\int_{\forall C}\frac{\partial z}{\partial t}\rho\, d\forall + z\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, d\forall)\right] = 0$

RESULTA:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\frac{v^2}{2g}\gamma\, d\forall + \int_{SC}\left(\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z\right)\gamma\, \vec{v}\times\vec{n}\, dS = W_m + W_{e,a} - W_a}$$

B) ESCOAMENTO PERMANENTE (e FLUIDO INCOMPRESSÍVEL)

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ⇒ $\boxed{\int_{SC}\left(\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z\right)\gamma\, \vec{v}\times\vec{n}\, dS = W_m + W_{e,a} - W_a}$

* Rever POTÊNCIA TOTAL DA CORRENTE FLUIDA NA SEÇÃO

POTÊNCIA TOTAL DA CORRENTE FLUIDA NA SEÇÃO

Potência → fluxo de energia (Vazão de Energia)

- CINÉTICA : $\mathbb{C}$ (já vimos)
- PRESSÃO : (Pot. das Forças de pressão)

Força de pressão elementar:

$$(-p\,dS\,\vec{n})$$

Trabalho realizado : $-p\,dS\,\vec{n} \times d\vec{P}$

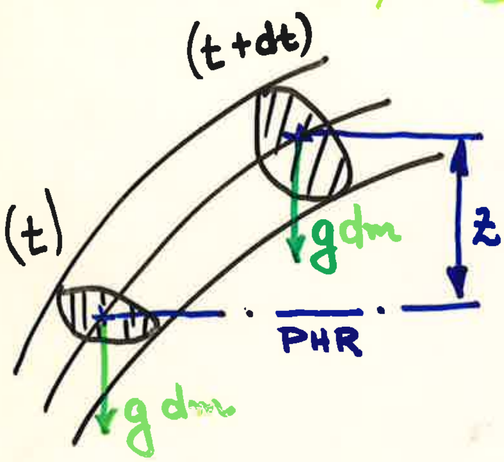
Potência : $-p\,dS\,\vec{n} \times \vec{v}$

Na SEÇÃO S : $- \int_S p\,\vec{v} \times \vec{n}\,dS$

outras formas :

$$-\int_S p\,dQ = -\int_S \frac{p}{\rho}\,dM = -\int_S \frac{p}{\gamma}\,dG$$

- FORÇA PESO : (Pot. da força peso)



· Força peso elementar: $g \cdot dm$

· Trabalho realizado : $(g \cdot dm) \cdot z$

· Potência : $\dfrac{z \cdot g \cdot dm}{dt} = z \cdot g\,dM = z \cdot dG$

EM S : cota média de S

$$\int_S z\,dG = z_m G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_S \rho g z\,\vec{v} \times \vec{n}\,dS = \int_S \rho g z\,dQ = \int_S g z\,dM = \int_S z\,dG$$

OUTRAS SIMPLIFICAÇÕES:

- $\forall C$ com nº finito de entradas e saídas, e nestas o escoamento é unidirecional: $SC = \Sigma S_e + \Sigma S_s + \Sigma'$ ↑lateral

$$\int_{SC}\left(\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z\right)\gamma\,\vec{v}\times\vec{n}\,dS = \int_{\Sigma S_e} + \int_{\Sigma S_s} + \cancel{\int_{\Sigma'}}^{\,0}$$

$(G_i = \gamma Q)$

utilizando valores médios:

$$\int_{S_i}\left(\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z\right)\gamma\cdot\vec{v}\times\vec{n}\,dS = \sum\left(\frac{\alpha_i V_i^2}{2g}+\frac{p_i}{\gamma_i}+z_i\right)G_i$$

$\left(W_{ea} = \int \vec{\tau}\times\vec{v}\,dS\right)$

ASSIM:

$$\sum\left(\frac{\alpha_i V_i^2}{2g}+\frac{p_i}{\gamma}+z_i\right)G_i = W_m + W_{ea} - W_a$$

para seções de escoamento planas (Seção $\perp \vec{v}$) $\Rightarrow W_{ea} = 0$

utilizando o conceito de CARGA TOTAL MÉDIA em S:

$$H = \frac{\alpha V^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z$$

(Energia Mecânica total na seção por unidade de peso)

temos:

$$\boxed{\sum' G_s H_s - \sum G_e H_e = W_m - W_a}$$

Pot. total na saída — Pot total na Entrada — Pot máquinas — Potencia Fatrito int.

- Para TUBO de CORRENTE (Conduto sólido ou Superfície livre)

Escoam. Unidimensional em e e s: $G_e = G_s = \gamma Q$

A equação fica:

$$\boxed{H_s - H_e = \frac{W_m}{\gamma Q} - \frac{W_a}{\gamma Q}}$$

- SEM MÁQUINAS: (TUBO de CORRENTE)

$$H_s - H_e = -\frac{W_a}{\gamma Q} \quad \text{ou} \quad \boxed{H_e - H_s = \frac{W_a}{\gamma Q}}$$

onde:

$$\Delta H_{e,s} = \frac{W_a}{\gamma Q}$$

é dito: PERDA de CARGA ENTRE SEÇÕES ENT e SAÍDA

Observações: Podese definir, por unidade de peso:

- ENERGIA POTENCIAL de PRESSÃO: $\dfrac{p}{\gamma}$
- ENERGIA POTENCIAL de POSIÇÃO: z
- ENERGIA CINÉTICA: $\dfrac{v^2}{2g}$

ASSIM CONCLUE-SE:

POTÊNCIA MECÂNICA TOTAL DA CORR. FLUIDA NA SEÇÃO será a soma:

$$W(S,t) = \int_S \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right) dG$$

A função integranda, que representa a ENERGIA TOTAL MECÂNICA POR UNIDADE DE PESO É DEFINIDA COMO: CARGA MÉDIA NA SEÇÃO

$$H(S,t) = \frac{1}{G} \int_S \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right) dG$$ ou

em termos de valores médios:

$$H_{(S,t)} = \alpha \frac{V^2}{2g} + \frac{p_m}{\gamma} + z_m$$

$\left\{ V, p_m, z_m \Rightarrow \right.$ Valores médios na seção.

FLUXO (VAZÃO) DE ENERGIA CINÉTICA

$$C(S,t) = \frac{1}{2}\int_S v^2 dM = \frac{1}{2}\int v^2 \rho\, \vec{v} \times \vec{n}\, dS$$

$$C_0(S,t) = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} \rho_m V^2 Q$$

$$\alpha(S,t)\, C_0(S,t) = C(S,t)$$

FLUXO (VAZÃO) DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$$\vec{X}(S,t) = \int_S \vec{v}\, dM = \int_S \rho\, \vec{v}\, \vec{v} \times \vec{n}\, dS$$

$$\vec{X}_0(S,t) = \rho_m V^2 S \vec{n}$$

$$\vec{X} = \beta \vec{X}_0$$

PROPRIEDADES:

a) α e β em seções de escoamento planas
são iguais ou superiores à 1
(Escoam. Real > Escoam. fictício (modelado))

b) Relação entre α e β:

$$\boxed{\alpha \cong 3\beta - 2}$$

Obs: Seção de ESCOAMENTO PLANA:

$$\vec{v} = v\vec{n}$$

$$\therefore \vec{v} \times \vec{n} = v$$